Mathematics. — *Teilweise geordnete Moduln.* By HANS FREUDENTHAL. (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER.)

(Communicated at the meeting of April 25, 1936.)

1. (1 . 1) (+) [1]) $\mathfrak{R}$ sei ein *Modul* (Elemente: kleine lateinische Buchstaben auszer k, l, m, n, die natürliche Zahlen bedeuten) in bezug auf den Körper der reellen Zahlen (kleine griechische Buchstaben), d. h. eine abelsche Gruppe mit den reellen Zahlen als Operatoren.

(1 . 2 . 1) (+) $\mathfrak{R}$ sei *teilweise geordnet* [2]) (Ordnungsrelation $>$), und es gelte wie üblich:

(1 . 2 . 2) (+) Zu je zwei Elementen a, b gibt es ein Element $c = a \vee b$, $c \geqq a$, $c \geqq b$, $c \leqq$ jedes x, das $\geqq a$ und $\geqq b$ ist.

(1 . 2 . 2′) (+) Zu je zwei Elementen a, b gibt es ein Element $d = a \wedge b$, $d \leqq a$, $d \leqq b$, $d \geqq$ jedes x, das $\leqq a$ und $\leqq b$ ist. [2a])

Weiter gelte:

(1 . 3 . 1) (+) Ist $a > 0$, so ist $0 > -a$.

(1 . 3 . 2) (+) Ist $a > b$, so ist $a + c > b + c$.

(1 . 4) (+) Ist $a > 0$, $\alpha > 0$, so ist $\alpha a > 0$.

2. Man beweist ohne Mühe:

(2 . 1 . 1) Ist $a > b$, so ist $-b < -a$.

(2 . 1 . 2) $(a \vee b) + (-a \wedge -b) = 0$

(das zeigt, dasz 1 . 2 . 2′ aus den vorgehenden folgt).

(2 . 1. 3)
$$(a \vee b) + x = (a + x) \vee (b + x)$$
$$(a \wedge b) + x = (a + x) \wedge (b + x).$$

Die Operation + wirkt also distributiv in bezug auf $\vee$ und $\wedge$. Dasselbe gilt hinsichtlich der Multiplikation mit $\gamma \geqq 0$:

(2 . 1 . 4)
$$\gamma (a \vee b) = \gamma a \vee \gamma b$$
$$\gamma (a \wedge b) = \gamma a \wedge \gamma b \quad \text{für } \gamma \geqq 0.$$

---

1) Axiome sind durch ein (+) hinter der Nummer gekennzeichnet.

2) Teilweise geordnete Mengen sind in der letzten Zeit von mehreren Verf. betrachtet worden. Teilweise geordnete Moduln (lineare Räume) hat eigentlich bereits F. RIESZ (Kongresz Bologna 1928 III, 143—148) untersucht. Explizit eingeführt hat sie L. KANTOROWITSCH (C. R. **202**, 813—816 (1936)), mit dessen Sätzen sich ein Teil unserer eng berührt. Zusatz bei der Korrektur: Siehe auch seine zweite Note (C. R. **202**, 1251—1253 (1936)).

2a) Die hier verwendeten Zeichen scheinen mir am praktischsten; die gebogenen Zeichen reserviert man am besten für die konkrete Vereinigungs- und Durchschnittsbildung.

Addiert man im zweiten Summand der linken und auf der rechten Seite von 2 . 1 . 2 (unter Berücksichtigung von 2 . 1 . 3) $a+b$, so hat man:

$$(2.2) \qquad (a \vee b) + (a \wedge b) = a + b.$$

Das kann man so deuten: Die Funktion, die jedes Element von $\mathfrak{R}$ sich selbst zuordnet, benimmt sich formal wie das Masz (oder die lineare Dimension).

$$(2.3) \qquad \text{Für } a \wedge b = 0 \text{ ist } a + b = a \vee b.$$

Wir schreiben auch

$$(2.4.1) \qquad a \vee 0 = a_+ \ , \ a \wedge 0 = a_-.$$

Aus (2 . 2) wird dann mit $b = 0$:

$$(2.4.2) \qquad a_+ + a_- = a.$$

3. Die Operationen $\vee$ und $\wedge$ befolgen nicht nur (wie evident)

(3 . 1) *die kommutativen und assoziativen Gesetze,*

sondern auch

(3 . 2) *die distributiven Gesetze* [3]).

Wir beweisen also [4])

$$(3.2.1) \qquad (a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$$

$$(3.2.2) \qquad (a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c).$$

Ohne weiteres gelten:

$$(3.2.3) \quad [(a \wedge b) \vee c] \vee b = [(a \wedge b) \vee b] \vee c = (b \vee c) \vee b \geqq [a \wedge (b \vee c)] \vee b$$

$$(3.2.4) \quad [(a \wedge b) \vee c] \wedge b \geqq (a \wedge b) \wedge b = (a \wedge b) \wedge (b \vee c) = \\ = [a \wedge (b \vee c)] \wedge b.$$

Addiert man das erste (letzte) Glied von 3 . 2 . 3 zum ersten (letzten) von 3 . 2 . 4, berücksichtigt man 2 . 2 und subtrahiert man auf beiden Seiten b, so erhält man

$$(3.2.5) \qquad (a \wedge b) \vee c \geqq a \wedge (b \vee c).$$

Vertauschung von a und b liefert

$$(a \wedge b) \vee c \geqq b \wedge (a \vee c),$$

also auch

$$(a \wedge b) \vee c \geqq [b \wedge (a \vee c)] \vee c \geqq (a \vee c) \wedge (b \vee c)$$

(wegen 3 . 2 . 5 mit $a \vee c$ statt a).

---

[3]) Man weisz, dasz das eine bedeutende Einschränkung gegenüber beliebigen teilweise geordneten Mengen bedeutet.

[4]) Wir dürften uns hier etwa auf O. ORE (Annals of Math. (2) **36**, 406—437 (1935)), δ_2, S. 414, berufen, doch scheint mir unser Beweis von Interesse, besonders wegen 3. 2. 5, einer wesentlichen *Un*gleichheit, die sich als dem distributiven Gesetz äquivalent erweist.

Andererseits ist

$$(a \wedge b) \vee c \leqq \begin{cases} a \vee c \\ b \vee c \end{cases}$$

also gilt 3.2.2. Analog oder als Folge hiervon beweist man 3.2.1.

4. Wir brauchen später die Ungleichung

(4.1) $$(a + c) \vee (b + c) \geqq (a \vee c) + (b \wedge c),$$

die für $c = 0$ spezialisiert lautet:

(4.2) $$a \vee b \geqq a_+ + b_-.$$

Sie ergibt sich so:

$$a + c \geqq a + (b \wedge c)\ ,\ a + c - (b \wedge c) \geqq a,$$
$$[a + c - (b \wedge c)] \vee (b \vee c) \geqq a \vee c.$$

Addition von $b \wedge c$ unter Berücksichtigung von 2.1.3 und 2.2 liefert 4.1.

5. (5.1) (+) Es gebe in $\mathfrak{R}$ ein positives Element, 1 genannt, mit der Eigenschaft: $a \wedge 1 > 0$ für jedes $a > 0$.

Statt $\alpha\, 1$ schreiben wir kurz α, da das zu keinem Miszverständnis führen kann.

(5.2) $e \in \mathfrak{E}$ bedeute: $0 \leqq e \leqq 1$, $e \wedge (1 - e) = 0$ (oder, was nach 2.2 dasselbe ist, $e \vee (1 - e) = 1$).

(5.3) $0 \in \mathfrak{E}$, $1 \in \mathfrak{E}$.

(5.4) Sind e_1 und e_2 in $\mathfrak{E}$, so sind es auch $e_1 \vee e_2$, $e_1 \wedge e_2$ und, falls $e_1 \leqq e_2$, auch $e_2 - e_1$.

Dabei ist 5.3 und der letzte Teil von 5.4 trivial: das Uebrige ergibt sich so: $(e_1 \vee e_2) \wedge [1 - (e_1 \vee e_2)] = [e_1 \wedge (1 - (e_1 \vee e_2))] \vee [(e_2 \wedge (1 - (e_1 \vee e_2))] \leqq$ $\leqq [e_1 \wedge (1 - e_1)] \vee [e_2 \wedge (1 - e_2)] \leqq 0$, andererseits $\geqq 0$, also $= 0$. Analog ergibt sich die andere Beziehung unter Verwendung der Paranthese von 5.2.

(5.5) $e \in \mathfrak{E}$ dann und nur dann, wenn für jedes $\alpha \geqq 1$ gilt $\alpha e \wedge 1 = e$. „Dann" ist trivial, denn für $\alpha = 2$ erhält man $2e \wedge 1 = e$, also wegen 2.1.3 wirklich $e \wedge (1 - e) = 0$. Umgekehrt schlieszt man aus $e \in \mathfrak{E}$ auf $2e \wedge 1 = e$; für ganzzahliges $\alpha = n$ folgt aus der Induktionsannahme $ne \wedge 1 = e$:

$$(n + 1)\, e \wedge 1 \leqq (n + 1)\, e \wedge (1 + e) = e + (ne \wedge 1) = 2e$$

und weiter wegen $(n + 1)\, e \wedge 1 \leqq 1$:

$$(n + 1)\, e \wedge 1 \leqq 2e \wedge 1 = e,$$

während doch

$$(n + 1)\, e \wedge 1 \geqq e \wedge 1 = e$$

ist, so dasz für alle n

$$ne \wedge 1 = e.$$

gilt. Für beliebiges $\alpha \geqq 1$ hat man $n \leqq \alpha \leqq n+1$ (mit geeignetem n), also

$$e = ne \frown 1 \leqq \alpha e \frown 1 \leqq (n+1)e \frown 1 = e.$$

6. (6.1) Die Menge $\mathfrak{M}$ aus $\mathfrak{R}$ heiszt nach oben (unten) ordnungsbeschränkt [kurz: o. o. b. bzw. u. o. b., und, wenn beides erfüllt ist, einfach o. b.], wenn ein c existiert, so dasz $a \leqq c$ für alle $a \in \mathfrak{M}$ gilt. c heiszt obere (untere) Schranke [kurz: o. S. (u. S.)] von $\mathfrak{M}$.

(6.2) Ist $\mathfrak{M}$ eine Menge aus $\mathfrak{R}$, so bedeute

$$\bigvee_{a \in \mathfrak{M}} a \quad \text{bzw.} \quad \bigwedge_{a \in \mathfrak{M}} a \quad ^{4a)}$$

die kleinste o. S. bzw. gröszte u. S. von $\mathfrak{M}$ (falls sie existiert).

(6.3) (+) Für jede steigende o. o. b. (sinkende u. o. b.) Folge[5]) a_n existiere $\bigvee_n a_n$ ($\bigwedge_n a_n$).

(6.4) Für jede o. o. b. (u. o. b.) Folge a_n existiert $\bigvee_n a_n$ ($\bigwedge_n a_n$). Das ergibt sich, wenn 6.3 auf die Folge $b_n = \bigvee_{k=1}^{n} a_k$ ($\bigwedge_{k=1}^{n} a_k$) anwendet.

(6.5) Sei $a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots < a$, $b_1 \leqq b_2 \leqq \ldots < b$ und $\alpha \geqq 0$. Dann ist

$$\bigvee_n (a_n + b_n) = \bigvee_n a_n + \bigvee_n b_n, \quad \bigvee_n \alpha a_n = \alpha \bigvee_n a_n.$$

Entsprechendes gilt für sinkende u. o. b. Folgen.

Man hat nämlich: $\bigvee_n (a_n + b_n) \geqq a_k + b_k \geqq a_k + b_l$ (für $k \geqq l$), also $\bigvee_n (a_n + b_n) \geqq \bigvee_n a_n + b_l$, also auch $\geqq \bigvee_n a_n + \bigvee_n b_n$. Dies ist aber wieder $\geqq a_k + b_k$, also $\geqq \bigvee_n (a_n + b_n)$, womit die erste Behauptung bewiesen ist. Der Rest ist evident.

(6.6) $\bigvee_n a_n \smile \bigvee_n b_n = \bigvee_n (a_n \smile b_n)$, $\bigvee_n a_n \frown \bigvee_n b_n = \bigvee_n (a_n \frown b_n)$ usw. (wenn die linken Seiten existieren, dann existieren auch die rechten).

Die erste Aussage ist klar. Man darf weiter annehmen, dasz a_n, b_n den Voraussetzungen von 6.5 genügen.

Wegen 2.2 hat man:

$$\bigvee_n a_n \frown \bigvee_n b_n = \bigvee_n a_n + \bigvee_n b_n - (\bigvee_n a_n \smile \bigvee_n b_n) =$$
$$= \bigvee_n (a_n + b_n) - \bigvee_n (a_n \smile b_n) =$$
$$\bigvee_n (a_n \smile b_n) + \bigvee_n (a_n \frown b_n) - \bigvee_n (a_n \frown b_n) = \bigvee_n (a_n \frown b_n).$$

[4a]) Diese Zeichen, mit denen ähnlich wie mit Σ und Π operiert wird, scheinen mir besonders zweckmäszig zu sein; analog kann man gebogene Zeichen einführen.

[5]) Es ist wohl bemerkenswert, dasz für unsere Betrachtungen diese Voraussetzung, die nur *abzählbare* Folgen betrifft, ausreicht.

7. (7 . 1) Mit e_n liegt auch $\bigvee_n e_n$ und $\bigwedge_n e_n$ in $\mathfrak{E}$. (Klar nach 6 . 6 .)

(7 . 2) Zu jedem a existiert die kleinste o. S. der $e \in \mathfrak{E}$ mit $e \geqq 1 \wedge a$. Sie berechnet sich zu $e(a) = \bigvee_{n=1}^{\infty} [(na)_+ \wedge 1]$.

(7 . 2′) Zu jedem a existiert die grösste u. S. der $e \in \mathfrak{E}$ mit $e \leqq a \vee 0$. Sie berechnet sich zu $e'(a) = 1 - e(1-a)$.

Wir beweisen 7 . 2 (daraus folgt 7 . 2′ ohneweiteres):

$$2e(a) \wedge 1 = \bigvee_n [(2na)_+ \wedge 1] = \bigvee_n [(na)_+ \wedge 1] = e(a),$$

also wegen 5 . 5: $e(a) \in \mathfrak{E}$. $e(a) \geqq a \wedge 1$ ist evident. Sei $e \in \mathfrak{E}$, $e \geqq a \wedge 1$; dann ist $\bigvee_n (ne \wedge 1) \geqq \bigvee_n [(na)_+ \wedge 1]$, also wegen 5 . 5 auch $e \geqq e(a)$.

(7 . 3) $e(a) + e(-a) \leqq 1$. (Klar.)

(7 . 4 . 1) Wir setzen $[(c \vee \alpha) \wedge \beta] - \alpha = [(c \wedge \beta) \vee \alpha] - \alpha = c_{\alpha,\beta}$ für $\alpha < \beta$. Ferner: $d_{\alpha,\beta} = \frac{c_{\alpha,\beta}}{\beta - \alpha}$. Schlieszlich: $e(c-\alpha) = e_\alpha$.[6]).

(7 . 4 . 2) $c_{\alpha,\beta} + c_{\beta,\gamma} = c_{\alpha,\gamma}$. (Leicht zu beweisen).

(7 . 4 . 3) Für $0 \leqq \beta - \alpha \leqq 1$ ist $e_\alpha \geqq d_{\alpha,\beta} \geqq e_\beta$.

Nach der Formel aus 7 . 2 ist nämlich $e_\alpha = e(c-\alpha) \geqq \frac{c-\alpha}{\beta-\alpha} \wedge 1 = \frac{1}{\beta-\alpha}[(c-\alpha) \wedge (\beta-\alpha)]$ (wegen 2 . 1 . 4). $(\beta-\alpha)e_\alpha$ ist also einerseits $\geqq (c-\alpha) \wedge (\beta-\alpha) = (c \wedge \beta) - \alpha$ (wegen 2 . 1 . 3), andererseits $\geqq 0$, also auch $\geqq [(c \wedge \beta) - \alpha] \vee 0 = c_{\alpha,\beta}$ (wegen 2 . 1 . 3). Daraus folgt die erste Ungleichheit. Die zweite entsteht aus der ersten, wenn man α, β, c bzw. durch $-\beta, -\alpha, -c$ ersetzt. Dann geht nämlich $d_{\alpha,\beta}$ in $1 - d_{\alpha,\beta}$ über und e_α in $e(-c+\beta)$, was (nach 7 . 4 . 2) $\leqq 1 - e_\beta$ ist.

(7 . 4 . 4) Zu jedem positiven c gibt es positive γ und $e \in \mathfrak{E}$ mit $\gamma e \leqq c$. (Man wähle einfach $\gamma > 0$ so, dasz $c - \gamma$ nicht $\leqq 0$ ist; dann ist $e_\gamma = e(c-\gamma)$ auch positiv; nach 7 . 4 . 3 ist aber $c \geqq c_{0,\gamma} \geqq \gamma e_\gamma$.)

(7 . 4 . 5) $$\bigwedge_{m=1}^{\infty} \bigvee_{n=1}^{\infty} \{[c \vee (-m)] \wedge n\} = c.$$ [7])

Zum Beweise setzen wir bequemlichkeitshalber $c \geqq 0$ voraus. Sei $e \in \mathfrak{E}$, $\gamma \geqq 0$ und $c \geqq c' + \gamma e$, wobei $c' = \bigvee_n (c \wedge n)$ gesetzt sei. Dann ist

$$\bigvee_n (c' \wedge ne) = \bigvee_n (c \wedge ne) \geqq \bigvee_n [(c' + \gamma e) \wedge ne] =$$
$$= \gamma e + \bigvee_n [c' \wedge (n-\gamma)e] = \gamma e + \bigvee_n (c' \wedge ne)$$

also $\gamma e = 0$, also nach 7 . 4 . 4, wie wir beweisen wollten, $c' = c$.

---

[6]) Die Abhängigkeit des $d_{\alpha,\beta}$ und des e von c bringen wir bequemlichkeitshalber nicht zum Ausdruck.

[7]) Die beiden „Grenzübergänge" sind sogar ganz unabhängig voneinander, was wir nicht explizit zum Ausdruck bringen.

(7 . 5) Sei γ_n für alle ganzen n erklärt, $0 \leqq \gamma_{n+1} - \gamma_n \leqq \delta > 0$, $\lim\limits_{n \to \pm\infty} \gamma_n = \pm\infty$. Dann ist (wie sich aus 7 . 4 . 2,3,5 ohneweiteres ergibt):

$$\bigvee_{-\infty}^{\infty} (\gamma_{n+1} - \gamma_n)\, e_{\gamma_{n+1}} \leqq c \leqq \bigvee_{-\infty}^{\infty} (\gamma_{n+1} - \gamma_n)\, e_{\gamma_n}.$$

Linkes und rechtes Glied unterscheiden sich dabei um höchstens δ. (Ist $-m \leqq c \leqq m$ für ein geeignetes m, durchläuft also n de facto nur endlich viel Nummern, so kann man $\bigvee$ durch Σ ersetzen; im allgemeinen geht das noch nicht, da unendliche Summen nicht erklärt sind.)

8. (8 . 1) $\mathfrak{R}_e^+$ sei die Gesamtheit der $a \geqq 0$ mit $a \wedge (1-e) = 0$. $\mathfrak{R}_e$ sei die von $\mathfrak{R}_e^+$ erzeugte lineare Mannigfaltigkeit.

(8 . 2 . 1) Sind $a, b \in \mathfrak{R}_e^+$, $\alpha \geqq 0$, so gehören ebenfalls zu $\mathfrak{R}_e^+$: $a \vee b$ (wegen 3 . 2 . 1), αa (klar), jedes positive $c \leqq a$ (klar), $a + b$ (weil $\leqq 2(a \vee b)$).

(8 . 2 . 2) Jedes Element von $\mathfrak{R}_e$ läszt sich als Differenz zweier Elemente von $\mathfrak{R}_e^+$ schreiben. (Klar wegen der zweiten und vierten Aussage von 8 . 2 . 1.)

(8 . 2 . 3) Jedes positive Element von $\mathfrak{R}_e$ liegt in $\mathfrak{R}_e^+$. Mehr noch: Ist $c \in \mathfrak{R}_e$, so ist $c_+ \in \mathfrak{R}_e^+$ (also auch $\in \mathfrak{R}_e$), ebenso $-c_-$.

Denn nach 8 . 2 . 2 ist $c = a - b$, $a \in \mathfrak{R}_e^+$, $b \in \mathfrak{R}_e^+$. Also $c_+ = (a-b) \vee 0 = (a \vee b) - b \leqq a \vee b$, also nach der ersten und dritten Aussage von 8 . 2 . 1: $c_+ \in \mathfrak{R}_e^+$. Analog ergibt sich der Rest.

(8 . 2 . 4) Für eine wachsende o. o. b. (abnehmende u. o. b.) Folge $a_n \in \mathfrak{R}_e^+$, ist auch $\bigvee a_n\, (\bigwedge a_n) \in \mathfrak{R}_e$. (Klar nach 8 . 2 . 3 und 6 . 6 .)

(8 . 3) $a \in \mathfrak{R}_e$ ist äquivalent mit $\bigwedge\limits_{n=1}^{\infty} \bigvee\limits_{n=1}^{\infty} [(a \vee -ne) \wedge ne] = a$.

(8 . 4) $\mathfrak{R}$ ist direkte Summe[7a]) von $\mathfrak{R}_e$ und $\mathfrak{R}_{1-e}$.

Wir beweisen beides zusammen: Bequemlichkeitshalber setzen wir $a \geqq 0$ voraus. Für $a \in \mathfrak{R}_e$, $a \in \mathfrak{R}_{1-e}$ hat man $a \wedge e = a \wedge (1-e) = 0$, also (nach 3 . 2 . 1) $a \wedge 1 = 0$, also (nach (5 . 1) $a = 0$. Für irgendein $a \geqq 0$ setze man $\bigvee\limits_n (a \wedge ne) = a'$ und $\bigvee\limits_n [a \wedge n(1-e)] = a''$, nach 6 . 6 ist $a' \in \mathfrak{R}_e$, $a'' \in \mathfrak{R}_{1-e}$ und weiter $a' + a'' = \bigvee\limits_n (a \wedge n)$, das ist aber (nach 7 . 4 . 5) $= a$, womit 8 . 4 bewiesen ist. Ist $a \in \mathfrak{R}_e$, so ist $a'' = 0$, also $a = a'$, womit 8 . 3 bewiesen ist.

(8 . 5 . 1) P_e sei die (lineare) Abbildung, die a überführt in a' (seine Komponente in $\mathfrak{R}_e$).

(8 . 5 . 2) Für $a \geqq b$ ist $P_e a \geqq P_e b$. Für $a \geqq 0$ ist $P_e a \leqq a$. (Klar.)

9. (9 . 1) (+) In $\mathfrak{R}$ gebe es einen eindeutigen Limesbegriff mit den Eigenschaften:

(9 . 1 . 1) $\lim a = a$.

[7a]) Mit Inbegriff der Ordnungsbeziehungen.

(9 . 1 . 2) $\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$; $\lim \alpha_n a_n = \lim \alpha_n \lim a_n$ [8]).

(9 . 1 . 3) Für $a_n \geqq 0$ ist $\lim a_n \geqq 0$ (falls existent).

(9 . 1 . 4) Für $\lim b_n = 0$ und $0 \leqq a_n \leqq b_n$ existiert $\lim a_n = 0$.

(9 . 1 . 5) Für eine wachsende o.o.b. (abnehmende u.o.b.) Folge a_n existiert $\lim a_n = \bigvee_n a_n$ $(\bigwedge_n a_n)$.

(9 . 1 . 6) Für $\lim a_n = 0$ existiert $\lim (a_n)_+ = 0$ (also auch $\lim (a_n)_- = 0$).

Folgende zwei Sätze sind evident:

(9 . 2 . 3) Für $a_n \geqq b_n$ ist $\lim a_n \geqq \lim b_n$ (falls existent).

(9 . 2 . 4) Für $\lim a_n = \lim b_n = c$ und $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ existiert $\lim c_n = c$.

(9 . 2 . 6) Für $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ existiert $\lim (a_n \vee b_n) = a \vee b$ also auch $\lim (a_n \wedge b_n) = a \wedge b$.

Wir dürfen nämlich $a = 0$ (wegen 9 . 1 . 2) voraussetzen. Aus 4 . 2 schlieszen wir

$$(a_n \wedge 0) + (b_n \vee 0) \leqq a_n \vee b_n \leqq (a_n \vee 0) \vee (b_n \vee 0) \leqq (a_n \vee 0) + (b_n \vee 0).$$

Nach 9 . 2 . 4 ist unser Behauptung bewiesen, sobald wir wissen, dasz $\lim (b_n)_+ = b_+$ ist, denn dann konvergiert (wegen 9 . 1 . 2 und 9 . 2 . 4) linkes und rechtes Glied unserer Ungleichung nach b_+. Dasz $\lim (b_n)_+ = b_+$ ist, steht aber auch in unserer Ungleichung, sobald wir dort a_n durch $b_n - b$ und b_n durch $-b$ ersetzen und 9 . 1 . 6 sowie $(b_n \vee 0) - b = (b_n - b) \vee (-b)$ berücksichtigen.

10. Mit den Begriffen von 9 (doch ohne Verwendung von 9 . 1 . 6 und 9 . 2 . 6) läszt sich 7 . 5 so deuten:

Zu jedem Modul $\mathfrak{R}$, der den Axiomen (1), (5 . 1), (6 . 3), (9 . 1 . 1–5) *genügt, läszt sich eine Boolesche Algebra $\mathfrak{E}$ und zu jedem $c \in \mathfrak{R}$ eine Schar $e_\gamma \in \mathfrak{E}$ finden* ($e_\alpha \leqq e_\beta$ für $\alpha \leqq \beta$), *so dasz für c die Lebesgue-Stieltjes-Integraldarstellung*

$$c = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma \, de_\gamma$$

gilt, Dann und nur dann ist $c \geqq 0$, wenn das Integral de facto nur von 0 bis ∞ zu erstrecken ist. Jedes Integral zwischen endlichen Grenzen stellt ein Element von $\mathfrak{R}$ dar. Umgekehrt kann man zu jeder Booleschen Algebra $\mathfrak{E}$ einen solchen Modul $\mathfrak{R}$ konstruieren.

Man beachte aber, dasz $\mathfrak{R}$ durch $\mathfrak{E}$ nicht eindeutig festgelegt ist, da über die Zugehörigkeit der uneigentlichen Integrale und über zusätzliche Limesbeziehungen nichts bekannt ist. Immerhin kann man sagen, dasz der kleinste von $\mathfrak{E}$ erzeugte Modul in jedem andern überall dicht liegt.

Wir wollen uns auf diese Angaben beschränken, da wir sonst die ganze Theorie des hier verwendeten Integralbegriffs aufrollen müszten.

[8]) d.h.: wenn die rechten Seiten existieren, so auch die linken.

11. (Alle Axiome werden verwendet).

(11 . 1) $\mathfrak{R}_e$ ist abgeschlossen. (Siehe 8 . 1.)

(11 . 2) P_e ist stetig. (Siehe 8 . 5.)

Sei nämlich $a_n \in \mathfrak{R}_e$, $\lim a_n = a$. Nach 8 . 2 . 3 ist $(a_n)_+ \in \mathfrak{R}_e$ und nach 9 . 2 . 6 ist $\lim (a_n)_+ = a_+$. Da $(a_n)_+ \frown (1-e) = 0$ (wegen 8 . 2 . 3) ist, ist (wegen 9 . 2 . 6) auch $a_+ \frown (1-e) = 0$, also $a_+ \in \mathfrak{R}_e$; analog schlieszt man für a_-; daraus folgt dann $a \in \mathfrak{R}_e$.

Sei a_n beliebig, $\lim a_n = a$. Wir beweisen $\lim P_e a_n = P_e a$. Ueberlegungen wie im vorigen Absatz gestatten, $a_n \geqq 0$ vorauszusetzen. Weiter dürfen wir uns wegen der Linearität von P_e und wegen 9 . 1 . 2 auf $a = 0$ beschränken. Nun ist aber $0 \leqq P_e a_n \leqq a_n$ (wegen 8 . 5 . 2), und daraus folgt (wegen 9 . 1 . 4) der Satz.

12. Die Betrachtungen von 7, 8, 10 lassen sich mit einigen Änderungen ausdehnen auf den Fall, dasz man auf die Existenz der 1 verzichtet (5 . 1). Wir führen das hier nicht aus, beweisen aber doch etwas, was in dieser Richtung wichtig ist.

(12 . 1) Sei $a_n > 0$, $a_k \frown a_l = 0$ für $k \neq l$. Dann gibt es auszer der trivialen keine Relation $\sum_1^m \gamma_n a_n = 0$.

Denn seien $\gamma_n \gtreqqless 0$ für $n \leqq m'$ und $\gtreqqless 0$ für $n > m'$, also $\sum_1^{m'} \gamma_n a_n = - \sum_{m'+1}^{m} \gamma_n a_n$, also $\bigvee_1^{m'} \gamma_n a_n = \bigvee_{m'+1}^{m} (-\gamma_n) a_n$. Fügt man auf beiden Seiten $\frown a_k$ zu, so erhält man $\gamma_k = 0$.

(12 . 2) Unter Benutzung von 9 . 2 . 6 läszt sich das auf unendliche Summen ausdehnen.

(12.3) *In separablen Riesz-Banachschen Räumen ist die Existenz der 1 beweisbar.* Allgemeiner in allen metrischen separablen $\mathfrak{R}$, in denen mit irgendeiner Folge jede Teilfolge konvergiert und zu jeder Folge a_n eine Folge positiver α_n existiert mit konvergentem $\Sigma\, \alpha_n a_n$.

Beweis: $\mathfrak{A}$ sei eine maximale Menge positiver Elemente, die zu je zweien $a \frown b = 0$ liefern (für $a \neq b$). a_n sei eine in $\mathfrak{A}$ überall dichte Teilfolge. Käme $a \in \mathfrak{A}$ nicht unter den a_n vor, so gäbe es eine Teilfolge a'_n von a_n mit $a'_k \neq a'_l$ für $k \neq l$ und mit $\lim a'_n = a$. Wegen 9 . 2 . 6 wäre $a \frown a = \lim (a'_n \frown a'_{n+1}) = 0$, also $a = 0$, was nicht geht. $\mathfrak{A}$ fällt also mit der Folge a_n zusammen. Wir setzen $1 = \sum_1^\infty \alpha_n a_n$, $\alpha_n > 0$. Sei $c > 0$, also $1 \frown c = c \frown \Sigma\, \alpha_n a_n$. Wegen der Maximalität von $\mathfrak{A}$ ist mindestens ein Summand positiv, also auch $1 \frown c$, w. z. b. w.

13. Von $\mathfrak{R}$ werden nur die Axiome 1 vorausgesetzt (eigentlich noch weniger), von dem Modul $\mathfrak{S}$ alle (auszer 5 . 1), jedoch 6 . 3 in der schärferen Fassung:

(13 . 1) (+) [9]) Für *jede* o. o. b. (u. o. b.) Menge $\mathfrak{M}$ existiert $\bigvee_{a \in \mathfrak{M}} a$ $(\bigwedge_{a \in \mathfrak{M}} a)$.

(13 . 2) Die lineare Abbildung $T\mathfrak{R} < \mathfrak{S}$ heisze o. b., wenn sie jede o. b. Menge in eine ebensolche überführt.

(13 . 3) Die Menge $\mathfrak{T}$ der o. b. T wird wieder ein teilweise geordneter Modul, sobald man $T \geqq 0$ dann und nur dann setzt, wenn $Ta \geqq 0$ für alle $a \geqq 0$ gilt.

(13 . 4) $T_1 \vee T_2$ existiert in $\mathfrak{T}$.

Beim Beweise folgen wir einer Methode von F. RIESZ [10]): Wir bilden $Ta = \bigvee (T_1 a_1 + T_2 a_2)$ für alle $a \geqq 0$, wobei $\bigvee$ zu erstrecken ist über alle Paare a_1, a_2 mit $a_1 + a_2 = a$, $a_n \geqq 0$. Ta existiert, denn die Menge der $T_1 a_1$ ist o. b. wegen $0 \leqq a_1 \leqq a$, ebenso die Menge der $T_2 a_2$, also auch die der $T_1 a_1 + T_2 a_2$. Die Linearität des auf ganz $\mathfrak{R}$ fortgesetzten T und die Zugehörigkeit zu $\mathfrak{T}$ sind klar.

Analog beweist man:

(13 . 5) In $\mathfrak{T}$ gilt 13 . 1.

(13 . 6) Ist speziell $\mathfrak{R}$ ein vollständiger euklidischer Raum (endlichdimensional, Hilbertsch oder nichtseparabel) und $\mathfrak{S}$ der Additionsmodul der reellen Zahlen, so wird $\mathfrak{T}$, der Modul der linearen Funktionale von $\mathfrak{R}$, im Wesentlichen mit $\mathfrak{R}$ identisch. Es ist nun natürlich, zu fordern, dasz dann die teilweise Ordnung von $\mathfrak{R}$ mit der von $\mathfrak{T}$ übereinstimmt. Diese Bemerkung legt untenstehendes Axiom 14 . 2 nahe.

14. Wir stellen jetzt alle teilweisen Ordnungen der endlichdimensionalen euklidischen und des Hilbertschen Raumes auf.

Wir setzen alle Axiome auszer 5 . 1 und 13 . 1 voraus. Auszerdem:

(14 . 1 . 1) (+) $\mathfrak{R}$ ist separabel und vollständig [10a]).

(14 . 1 . 2) (+) in $\mathfrak{R}$ gibt es ein reelles inneres Produkt (a, b) mit den üblichen Eigenschaften und die auf $|a|^2 = (a, a)$ gegründete Topologie.

(14 . 2) (+) $(a, b) \geqq 0$ dann und nur dann für alle $b \geqq 0$, wenn $a \geqq 0$.

(14 . 2 . 1) Ist $a' \geqq 0$, so ist $(a, b) \geqq (a', b')$ dann und nur dann für alle $b \geqq b'$, wenn $a \geqq a'$. (Klar.)

(14 . 3) In $\mathfrak{R}$ gilt 5 . 1, d. h. die 1 existiert. (Folgt aus 12.)

(14 . 4) Dann und nur dann ist (für Elemente von $\mathfrak{E}$ mit $e_1 \leqq e_2$) $|e_1| < |e_2|$, wenn $e_1 < e_2$ ist.

„Dann" ist klar. „Nur dann": Mit $e_3 = e_2 - e_1$ ist $|e_2|^2 = |e_1|^2 + |e_3|^2 + 2(e_1, e_3)$; hier ist (wegen 14 . 2 . 1) $(e_1, e_3) \geqq 0$, während $|e_3|^2 > 0$ ist; daraus folgt die Behauptung.

(14 . 5) In $\mathfrak{E}$ gilt 13 . 1. (Denn wegen der Separabilität läszt sich 13.1 auf 6 . 3 zurückführen, wenn man die gegebene Menge $\mathfrak{M}$ aus $\mathfrak{E}$ durch eine überall dichte Teilmenge ersetzt).

(14 . 6) Für $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $(a, b) = 0$ ist $a \wedge b = 0$.

---

[9]) Dies Axiom wird nur in 13 verwendet.

[10]) a. a. O. [2]).

[10a]) Die Vollständigkeit ist *nicht* wesentlich.

Denn mit $c = a \wedge b$ ist $(c, c) \leqq (a, b)$ (wegen 14 . 2 . 1), also $c = 0$.

Schwieriger ist die Umkehrung:

(14 . 7) Für $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $a \wedge b = 0$ ist $(a, b) = 0$. (Beweis später.)

(14 . 8 . 1) Wir setzen $(a, b)' = (P_e a, P_e b) + (P_{1-e} a, P_{1-e} b)$. Dann ist $(a, b)'$ linear in a und b (wegen 8 . 5 . 1) und stetig (wegen 11 . 2). Bekanntlich gibt es dann einen beschränkten linearen (Hermiteschen) Operator H mit

$$(a, b)' = (a, Hb) \quad (a, b \text{ beliebig}). \quad ^{10b)}$$

(14 . 8 . 2) Für $b \geqq 0$ ist $Hb \geqq 0$.

Denn ist noch $a \geqq 0$, so hat man (wegen 8 . 5 . 2) $P_e a \geqq 0$, $P_e b \geqq 0$ usw., also $(a, b)' \geqq 0$ (wegen 14 . 2), also $(a, Hb) \geqq 0$ für alle $a \geqq 0$, also (wegen 14 . 2) $Hb \geqq 0$.

(14 . 8 . 3) Ist $e \in \mathfrak{E}$ und $(e, a) > 0$ für alle $a > 0$, so ist $e = 1$.

Wählen wir nämlich a irgendwie in $\mathfrak{R}^+_{1-e}$, so ist $(e, Ha) = (e, a)' = 0$; andererseits ist (14 . 8 . 2) $Ha \geqq 0$, also nach Voraussetzung $Ha = 0$. Also $(a, Ha) = 0$, $(a, a)' = 0$, $P_e a = P_{1-e} a = 0$, $a = 0$. Also $\mathfrak{R}^+_{1-e} = (0)$, also $1-e = 0$, w. z. b.w.

(14 . 9) Für $e \in \mathfrak{E}$ ist $(e, 1-e) = 0$.

Denn zu e gibt es (nach 14 . 5) ein maximales $e' \in \mathfrak{E}$ mit $(e, e') = 0$. Dann besitzt $(e + e', e'') = 0$ nur die Lösung $e'' = 0$ $(e'' \in \mathfrak{E})$. Sei $a > 0$; nach 7 . 4 . 4 gibt es positive α und $e''' \in \mathfrak{E}$ mit $a \geqq \alpha e'''$, und es ist $(e + e', a) \geqq (e + e', \alpha e''') > 0$ (für alle $a > 0$), also (nach 14 . 8 . 3) $e + e' = 1$, $e' = 1 - e$, $(e, 1-e) = 0$.

(14 . 10) Beweis von 14 . 7: Man bilde (laut 10) $a = \int \alpha \, de_\alpha$, $b = \int \beta \, df_\beta$.

Dann sieht man ohneweiteres, dasz $e_\alpha \wedge f_\beta = 0$, also (nach 14 . 9) $(e_\alpha, f_\beta) = 0$, also unter Berücksichtigung der Linearität und Stetigkeit des inneren Produktes: $(a, b) = 0$.

(14 . 11) $\mathfrak{V}$ heisze ein teilweise geordneter linearer Raum, der entsteht, wenn man in einem endlichdimensionalen euklidischen oder im Hilbertschen Raum ein vollständiges Orthogonal-Koordinatensystem einführt und ein Element dann und nur dann $\geqq 0$ nennt, wenn alle seine Koordinaten $\geqq 0$ sind. $\mathfrak{W}$ heisze der teilweise geordnete lineare Raum, der entsteht, wenn man im Raum der (im Intervall $0 \leqq \xi \leqq 1$) L-quadratintegrablen Funktionen ein Element dann und nur dann $\geqq 0$ nennt, wenn es (als Funktion) in $(0 \leqq \xi \leqq 1) \geqq 0$ ist (bis auf eine Nullmenge). $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ genügen unseren Axiomen.

(14 . 12) *Ein gemäsz* (1), (5 . 1), (6 . 3), (9 . 1) [11], (14 . 1,2) *teilweise geordneter endlichdimensionaler euklidischer oder Hilbertscher Raum ist im Wesentlichen ein* $\mathfrak{V}$ *oder* $\mathfrak{W}$ *oder direkte Summe von* $\mathfrak{W}$ *und einem* $\mathfrak{V}$.

10b) H hängt natürlich von e ab.

11) Es wäre sehr erfreulich, wenn sich 9. 1. 6 entbehren liesze; es ist das einzige Axiom, das etwas künstlich wirkt.

Beweis: (14.12.1) Ein positives Element von $\mathfrak{E}$ heisze minimal, wenn zwischen ihm und 0 kein weiteres Element von $\mathfrak{E}$ liegt. Man bestimme in $\mathfrak{E}$ ein maximales Orthogonalsystem $e_1, e_2, \ldots$, bestehend aus lauter minimalen Elementen, und setze $e = \sum_n e_n = \bigvee_n e_n$. $\mathfrak{R}_e$ ist dann im Wesentlichen ein auf die Achsen $e_1, e_2, \ldots$ bezogener Raum $\mathfrak{V}$. Nach 8.4 ist $\mathfrak{R}$ direkte Summe von $\mathfrak{R}_e$ und $\mathfrak{R}_{1-e}$. Wir schreiben also statt $\mathfrak{R}_{1-e}$ wieder $\mathfrak{R}$, d.h. wir setzen voraus, dasz $\mathfrak{R}$ keine minimalen Elemente mehr besitzt. Wir dürfen ferner $(1, 1) = 1$ normieren.

(14.12.2) Sei $e < e'$.[12]) Dann gibt es ein e'', $e < e'' < e'$, $|e'' - e| < \varepsilon$ (ε beliebig positiv). Wir dürfen zum Beweise $e = 0$ voraussetzen. Wir setzen $e'_0 = e'$ und nehmen an, dasz ein positives $e'_n < e'$ mit $|e'_n| \leqq 2^{-n}|e'|$ bereits bestimmt sei. Dann bestimmen wir ein positives $e_{n+1} < e'_n$ und nennen e'_{n+1} dasjenige unter den Elementen e_{n+1} und $e'_n - e_{n+1}$, dessen absoluter Betrag am kleinsten ist (evtl. hat man die Wahl zwischen beiden). Dann ist $0 < e'_{n+1} < e'_n < e'$ und $|e'_{n+1}| \leqq \frac{1}{2}|e'_n| \leqq 2^{-n}|e'|$, womit die Behauptung bewiesen ist.

(14.12.3) Sei $e < e'$. Dann gibt es ein e'', $e < e'' < e'$, $|e'' - e| = \frac{1}{2}|e' - e|$. Denn man wähle zu jeder Ordinalzahl n ein e_n mit $e < e_n < e'$, $|e_n - e| \leqq \frac{1}{2}|e' - e|$, und zwar folgendermaszen: Ist n nicht Limeszahl, so soll $e_{n-1} < e_n$ gelten (was sich nach 14.12.2 erreichen läszt). Ist n Limeszahl, so setze man $e_n = \bigvee_{m<n} e_m$ (wegen der Separabilität braucht man m in $\bigvee$ nur eine abzählbare Menge (m') durchlaufen zu lassen, und wegen 9.1.5 hat man $e_n = \lim_{m'} e_{m'}$, so dasz wegen der Stetigkeit des inneren Produktes immer noch $|e_n - e| \leqq \frac{1}{2}|e' - e|$ gilt). Das Verfahren bricht für ein gewisses $e'' = e_{n_0}$ ab, und dann hat man (nach 14.12.2) $|e'' - e| = \frac{1}{2}|e' - e|$.

(14.12.4) Nach 14.12.3 bestimme man $e_1 + e_2 = 1$, $|e_1| = \frac{1}{2}$, und allgemein, wenn $e_{k_1,\ldots,k_n}$ bereits bestimmt ist, $e_{k_1,\ldots,k_n,0} + e_{k_1,\ldots,k_n,1} = e_{k_1,\ldots,k_n}$, $|e_{k_1,\ldots,k_n,0}| = 2^{-n-1}$. Man ordne $e_{k_1,\ldots,k_n}$ die Funktion zu, die überall in $(0 \leqq \xi \leqq 1)$ verschwindet, auszer in $(\alpha \leqq \xi < \alpha + 2^{-n})$, wo sie eins ist; dabei sei $\alpha = \sum_{m=1}^{n} k_m 2^{-m}$. Man sieht leicht, dasz damit die gesuchte Identifizierung von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{W}$ entsteht.

---

[12]) Alle Elemente, von denen jetzt die Rede ist, gehören zu $\mathfrak{E}$