Mathematics. — *Der Existenzsatz für ein wesentliches System bei Invarianten von Differentialformen.* Von G. F. C. GRISS. (Communicated by Prof. R. WEITZENBÖCK).

(Communicated at the meeting of May 31, 1930.)

§ 1. Wenn in n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ein System von Differentialformen oder Tensoren $f = a_{ikl\ldots} dx^i dx^k dx^l \ldots$, gegeben ist, so versteht man unter einer algebraischen Differential-Invariante m-ter Ordnung I eine algebraische Funktion

$$I\left(a_{ikl\ldots}, \frac{\partial a_{ikl\ldots}}{\partial x_r}, \ldots, \frac{\partial^m a_{ikl\ldots}}{\partial x_{r_1} \partial x_{r_2} \ldots \partial x_{r_m}}\right)$$

der Tensorkomponenten und deren Ableitungen bis einschliesslich m-ter Ordnung, die bei der Transformation

$$\bar{x}_i = \varphi_i (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

die Invarianteneigenschaft $\bar{I} = \left|\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k}\right|^p . I$ besitzt. Es gibt dann zu jedem gegebenen m eine endliche algebraische Basis, ja selbst eine endliche Modulbasis für ganze rationale I.

Bei absoluten algebraischen Differential-Invarianten I existiert ein Endlichkeitssatz, der auch von der Differentiationsordnung m frei ist: Es gibt eine endliche Anzahl absoluter Basis-Invarianten $I_1, I_2, \ldots, I_\sigma$ derart, dass jede absolute Differential-invariante der gegebenen Tensoren $f, \ldots$ eine rationale Funktion dieser Basisinvarianten I_ν und deren Ableitungen $\frac{\partial I_\nu}{\partial x_{r_1}}, \frac{\partial^2 I_\nu}{\partial x_{r_1} \partial x_{r_2}}, \ldots$ wird. Die Invarianten $I_1, I_2, \ldots, I_\sigma$ bilden dann ein sogenanntes *wesentliches System* von Differentialinvarianten der gegebenen Tensoren.

§ 2. Es sei zuerst ein System von n unabhängigen Skalaren (= absoluten Invarianten) und ausserdem ein willkürlicher Tensor, z. B. a^α_β, gegeben. Wir haben dann:

$${}_hI(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = {}_hI(x_1, \ldots, x_n) \ldots (h = 1, \ldots, n).$$

$$\frac{\partial\, {}_h\bar{I}}{\partial \bar{x}_i} = \frac{\partial\, {}_hI}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\mu}{\partial \bar{x}_i} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Wir setzen

$${}_hc_i = \frac{\partial\, {}_hI}{\partial x_i} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Und

$$_{hk}I = {}_h c_\alpha \, {}_k c^\beta \, a^\alpha_\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Die Invarianten $_{hk}I$ und $_hI$ bilden ein wesentliches System.

Beweis: Ein Adjunktionssystem 1ster Ordnung wird gebildet von den mittels den n Vektoren $_hc_i$ bestimmten kovarianten Ableitungen $a^\alpha_{\beta(\gamma)}$ und den Vektoren $_hc_i$ selbst. Eine algebraische Basis von Differentialinvarianten 1ster Ordnung ist also [1])

$$_{hkl}I = a^\alpha_{\beta(\gamma)} \, {}_h c_\alpha \, {}_k c^\beta \, {}_l c^\gamma = {}_{hk}I_{(\gamma)} \, {}_l c^\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

(die kovarianten Ableitungen der Vektoren $_hc_i$ sind nämlich null). Diese Invarianten sind aber in der Tat Funktionen von $_{hk}I$, $_hI$ und deren Ableitungen.

Eine algebraische Basis von Differentialinvarianten 2ter Ordnung ist $_{hkl}I_{(\delta)} \; {}_m c^\delta$, u.s.w.

§ 3. Es sei jetzt ein willkürliches System von Grundformen gegeben. Gibt es nur $m < n$ unabhängige absolute Differentialinvarianten, so bilden diese natürlich ein wesentliches System. Sobald aber $m \geqq n$ ist, können wir wieder mittels n Invarianten $_hI$ n Vektoren $_hc_i$ bestimmen. Wie im zweiten Paragraphen zeigt man, dass *eine algebraische Basis von $_hc^i$ und den gegebenen Tensoren mit $_hI$ ein wesentliches System ist.*

Ein einfaches Beispiel hat man bei zwei Vektoren a_i und b_i. Es gibt dann gerade n absolute Invarianten 1ster Ordnung $_hI$ [2]) und das wesentliche System wird gebildet von

$$_hI \quad , \quad _hI' = a_i \, {}_h c^i \quad \text{und} \quad _hI'' = b_i \, {}_h c^i \; .$$

Man hat in dieser Weise also ein *algebraisches Verfahren* zur Bestimmung eines wesentlichen Systems, in Gegensatz zu den analytischen Entwicklungen von TRESSE [3]).

§ 4. *Anwendung auf geometrische Differentialinvarianten.*

Es sei eine Fläche in R_3 gegeben:

$$y_i = f_i\,(x_1, \, x_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (i = 1, \, 2, \, 3).$$

Die Differentialinvariante $I\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_1}, \frac{\partial y_i}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_1{}^2}, \ldots\right)$ soll erstens die Invarianteneigenschaft haben hinsichtlich der Gruppe der Euclidischen Bewegungen.

Man beweist leicht, dass eine jede solche Invariante ausdrückbar ist durch

[1]) Siehe: G. F. C. GRISS, Differentialinvarianten von Systemen von Vektoren. Diss. Amsterdam (1925). Kap. VI.

[2]) GRISS, Differentialinvarianten, u.s w. Kap. VII und VIII.

[3]) Acta Mathematica **18** (1894). Sur les Invariants differentiels des groupes continus de transformations par AR. TRESSE. (S. 42).

$$\left.\begin{aligned}
&E=\sum_i\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_1}\right)^2 \quad , \quad F=\sum_i\frac{\partial y_i}{\partial x_1}\frac{\partial y_i}{\partial x_2} \quad , \quad G=\sum_i\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_2}\right)^2 ,\\
&E'=\begin{vmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1{}^2}\\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_1{}^2}\\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 y_3}{\partial x_1{}^2}\end{vmatrix} \quad , \quad F'=\begin{vmatrix}\frac{\partial y_i}{\partial x_1} & \frac{\partial y_i}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_1\,\partial x_2}\end{vmatrix} \quad , \quad G'=\dots
\end{aligned}\right\}\quad (5)$$

und deren Ableitungen.

Zweitens soll I invariant sein hinsichtlich der Gruppe der Parametertransformationen

$$x_\alpha=F_\alpha(x_1,\ x_2)\ \ .\ .\ .\ (\alpha=1,\ 2).$$

Setzen wir

$$H^2=EG-F^2;$$
$$a_{11}=E \quad , \quad a_{21}=a_{12}=F \quad , \quad a_{22}=G;$$
$$b_{11}=E'H^{-1},\quad b_{21}=b_{12}=F'H^{-1},\quad b_{22}=G'H^{-1};$$

so sind a_{ik} und b_{ik} zwei symmetrische Tensoren zweiter Stufe.

Mit Hilfe des bewiesenen Existenzsatzes bestimmen wir jetzt ein wesentliches System von Differentialinvarianten dieser Tensoren.

Es gibt drei relative Invarianten nullter Ordnung

$$\tfrac{1}{2}(aa')^2=H^2 \quad , \quad \tfrac{1}{2}(ab)^2 \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}(bb')^2,$$

also zwei absolute

$$\left.\begin{aligned}
{}_1I&=\frac{(ab)^2}{(aa')^2}=\frac{EG'+E'G-2FF'}{2H^3}\\
{}_2I&=\frac{(ab')^2}{(aa')^2}=\frac{E'G'-F'^2}{H^4}
\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ .\ .\ .\ . \quad (6)$$

Das gefragte wesentliche System wird gebildet von

$${}_1I,\ {}_2I,\ {}_{hk}I={}_hc^\alpha\,{}_kc^\beta\,a_{\alpha\beta} \quad \text{und} \quad {}_{hk}I'={}_hc^\alpha\,{}_kc^\beta\,b_{\alpha\beta} \quad .\ .\ . \quad (7)$$

Man beweist aber leicht die folgenden zwei Relationen:

$$\left.\begin{aligned}
{}_{11}I\,{}_{22}I-{}_{12}I^2&=H^2\begin{vmatrix}\frac{\partial_1 I}{\partial x_1} & \frac{\partial_1 I}{\partial x_2}\\ \frac{\partial_2 I}{\partial x_1} & \frac{\partial_2 I}{\partial x_2}\end{vmatrix}^2=H^2\left(\frac{\partial({}_1I,\ {}_2I)}{\partial(x_1,\ x_2)}\right)^2\\
{}_{11}I'\,{}_{22}I'-{}_{12}I'^2&=H^2\,{}_2I\left(\frac{\partial({}_1I,\ {}_2I)}{\partial(x_1,\ x_2)}\right)^2
\end{aligned}\right\}\quad .\ . \quad (8)$$

Hieraus folgt, dass man z. B. ${}_{22}I$ und ${}_{22}I'$ aus dem wesentlichen System fortlassen kann.

Wir bringen unser Resultat in Uebereinstimmung mit der bekannten Tatsache, dass

$$R_1,\ R_2,\ \frac{\partial R_1}{\partial s_1},\ \frac{\partial R_2}{\partial s_1},\ \frac{\partial R_1}{\partial s_2}\ \text{und}\ \frac{\partial R_2}{\partial s_2}\ \ldots\ldots \quad (9)$$

ein wesentliches System bilden, wobei R_1 und R_2 die Krümmungsradien sind, und $\frac{\partial}{\partial s}$ ein Differentiation in die Richtung einer Krümmungslinie ist [1]).

Dazu bilden wir

$$\left.\begin{aligned} {}_{11}I + \lambda\, {}_{11}I' &= (a_{11} + \lambda\, b_{11}) \left(\frac{\partial_2 I}{\partial x_2}\right)^2 - \\ &\quad - 2\,(a_{12} + \lambda\, b_{12}) \frac{\partial_2 I}{\partial x_2} \frac{\partial_2 I}{\partial x_1} + (a_{22} + \lambda\, b_{22}) \left(\frac{\partial_2 I}{\partial x_1}\right)^2 \\ {}_{22}I + \lambda\, {}_{22}I' &= \ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

und bestimmen λ aus

$$(a_{11} + \lambda\, b_{11})(a_{22} + \lambda\, b_{22}) - (a_{12} + \lambda\, b_{12})^2 = 0 \ldots \text{(zwei Werte für } \lambda) \ . \ (11)$$

Man kann jetzt das wesentliche System (7), indem man ${}_{12}I$ und ${}_{12}I'$ vermöge (8) fortlässt, ersetzen durch

$$\left.\begin{aligned} &{}_1I \ \text{und}\ {}_2I \\ &\sqrt{a_{11} + \lambda_i\, b_{11}}\, \frac{\partial_2 I}{\partial x_2} - \sqrt{a_{22} + \lambda_i\, b_{22}}\, \frac{\partial_2 I}{\partial x_1} \quad \text{und} \\ &\sqrt{a_{11} + \lambda_i\, b_{11}}\, \frac{\partial_1 I}{\partial x_2} - \sqrt{a_{22} + \lambda_i\, b_{22}}\, \frac{\partial_1 I}{\partial x_1} \quad (i = 1, 2) \end{aligned}\right\} \ . \ . \ (12)$$

Die zwei Werte für λ sind aber $-R_1$ und $-R_2$, so dass

$$\sqrt{a_{11} + \lambda_i\, b_{11}} = \sqrt{a_{11} - R_i\, b_{11}} = \frac{\partial x_2}{\partial s_i}$$

$$\sqrt{a_{22} + \lambda_i\, b_{22}} = -\sqrt{a_{22} - R_i\, b_{22}} = -\frac{\partial x_1}{\partial s_i}$$

Das System (12) erhält die Form

$${}_1I,\ {}_2I,\ \frac{\partial_1 I}{\partial s_1},\ \frac{\partial_2 I}{\partial s_1},\ \frac{\partial_1 I}{\partial s_2}\ \text{und}\ \frac{\partial_2 I}{\partial s_2},$$

und diese Invarianten sind in diejenigen von (9) auszudrücken vermöge

$${}_1I = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{und} \quad {}_2I = \frac{1}{R_1\, R_2}.$$

Umgekehrt kann man auch, obwohl nicht rational, das System (9) in die Invarianten von (7) ausdrücken.

---

[1]) G. SCHEFFERS. Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie II. § 10 S. 353.