Mathematics. — *Differentialinvarianten von zwei kovarianten Vektoren in vier Veraenderlichen.* Von G. F. C. GRISS. (Communicated by Prof. R. WEITZENBÖCK).

(Communicated at the meeting of February 22, 1930).

Unser Ziel ist unter anderem das Aufstellen einer algebraischen Basis von Differentialinvarianten zweiter Ordnung der zwei genannten Vektoren. Wir halten uns dabei an die von M. EUWE [1]) gebrauchte Bezeichnung.

Die Transformationsformeln für die gegebenen Vektoren a_i und α_i sind

$$\bar{a}_i = a_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_i} \quad \text{und} \quad \bar{\alpha}_i = \alpha_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_i} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Bei Differentiation ergibt sich

$$\frac{\partial \bar{a}_i}{\partial \bar{x}_k} = \frac{\partial a_\nu}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_i} \frac{\partial x_\mu}{\partial \bar{x}_k} + a_\nu \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial \bar{x}_i \, \partial \bar{x}_k} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \bar{\alpha}_i}{\partial \bar{x}_k} = \quad \ldots \quad (2)$$

Die Elimination der zweiten Ableitungen führt zu dem folgenden Reduktionssatz: Die Differentialinvarianten erster Ordnung von a_i und α_i sind die projektiven Invarianten von a_i, α_i und ihren Rotationen f_{ik} und φ_{ik}; kürzer: Das "Adjunktionssystem" erster Ordnung von a_i und α_i wird gebildet von f_{ik} und φ_{ik}, wobei

$$f_{ik} = \frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \quad \text{und} \quad \varphi_{ik} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_i} \quad \ldots \quad (3)$$

Ein (kleinstes) volles System von projektiven Invarianten dieser Tensoren ist:

$$\left.\begin{array}{lll} A_{11} = \tfrac{1}{2} (f' f)^2 & A_{12} = \tfrac{1}{2} (f' \varphi)^2 & A_{22} = \tfrac{1}{2} (\varphi' \varphi)^2 \\ B_1 = (a f')(f' \alpha) & B_2 = (\alpha \varphi')(\varphi' a) & \end{array}\right\} \quad . \quad (4)$$

woraus 4 unabhängige absolute Invarianten gebildet werden können.

Zudem werden im Folgenden die Vektoren

$$b_i = \frac{f_i \, (f \varphi')(\varphi' a)}{\tfrac{1}{2} A_{11}} \quad \text{und} \quad \beta_i = \frac{\varphi_i \, (\varphi f')(f' \alpha)}{\tfrac{1}{2} A_{22}} \quad \ldots \quad (5)$$

viel benutzt, wobei $N = (a \, \alpha \, b \, \beta) \neq 0$; die Minoren in N geteilt durch N bilden 4 kontravariante Vektoren ${}_h n^i$.

Weiter setzen wir noch

$${}_{hl}F = {}_h n^\mu \, {}_l n^\nu \, f_{\mu\nu} \quad \text{und} \quad {}_{hl}\Phi = {}_h n^\mu \, {}_l n^\nu \, \varphi_{\mu\nu} \quad \ldots \quad (6)$$

[1]) M. EUWE, Differentiaalinvarianten van twee covariante vectorvelden met vier veranderlijken. Diss. Amsterdam, (1926).

Für die 4 unabhängigen absoluten Differentialinvarianten erster Ordnung wählen wir (alles in Einklang mit M. EUWE)

$$\left.\begin{array}{l} {}_1V = {}_{12}F = {}_{34}F = -\,{}_{23}\Phi \quad , \quad {}_3V = {}_{23}F \\ {}_2V = {}_{14}F = {}_{12}\Phi = \quad {}_{34}\Phi \text{ und } {}_4V = {}_{14}\Phi \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Zur Bestimmung eines Adjunktionssystems zweiter Ordnung muss man die Transformationsformeln für f_{ik} und φ_{ik} differentiieren. Dabei erhält man 2×20 unabhängige Gleichungen, während die Gleichungen (2) noch 2×10 liefern (2×6 sind schon benutzt zur Bestimmung des Adjunktionssystems erster Ordnung). Die Anzahl zweiter Ableitungen $\dfrac{\partial^2 x_i}{\partial x_\mu \, \partial x_\nu}$, welche eliminiert werden müssen, ist 40. Da diese zweiten Ableitungen berechenbar sind, hat das gefragte Adjunktionssystem $2 \times 20 + 2 \times 10 - 40 = 20$ unabhängige Komponenten. Man findet dann folgenden Reduktionssatz:

Ein Adjunktionssystem zweiter Ordnung wird gebildet von ${}_h v_i = \dfrac{\partial\, {}_h V}{\partial x_i}$ und den Rotationen c_{ik} und γ_{ik} von b_i und β_i, wobei 8 invariante Relationen gelten:

$$\left.\begin{array}{l} ({}_1v\, a\, \alpha\, p) + ({}_2v\, a\, \beta\, p) + ({}_3v\, \alpha\, b\, p) + ({}_1v\, b\, \beta\, p) - \\ -\, {}_1V \{ (f'\alpha)(f'p) - (\varphi'a)(\varphi'p) \} - {}_2V \{ (f'\beta)(f'p) - (\gamma'a)(\gamma'p) \} - \\ -\, {}_3V \{ (\varphi'b)(\varphi'p) - (c'\alpha)(c'p) \} - {}_1V \{ (c'\beta)(c'p) - (\gamma'b)(\gamma'p) \} = 0 \ldots \{p\} \end{array}\right\} . \quad (8)$$

$$\left.\begin{array}{l} ({}_2v\, a\, \alpha\, p) + ({}_4v\, a\, \beta\, p) - ({}_1v\, \alpha\, b\, p) + ({}_2v\, b\, \beta\, p) - \\ \quad -\, {}_2V \{ (f'\alpha)(f'p) - (\varphi'a)(\varphi'p) \} - {}_4V \{ (f'\beta)(f'p) - (\gamma'a)(\gamma'p) \} + \\ \quad +\, {}_1V \{ (\varphi'b)(\varphi'p) - (c'\alpha)(c'p) \} - {}_2V \{ (c'\beta)(c'p) - (\gamma'b)(\gamma'p) \} = 0 \ldots \{p\} \end{array}\right\} . \quad (9)$$

(für jeden Vektor p_i).

Die Anzahl unabhängiger Komponenten ist hier tatsächlich $4 \times 4 + 2 \times 6 - 8 = 20$.

Hieraus folgt z.B., dass W. EUWE [1]) mit Unrecht in seiner Dissertation mit dazu gehörigen Thesen behauptet, es seien von mir und M. EUWE nicht alle unabhängigen Relationen zwischen den Komponenten des Reduktionssystems zweiter Ordnung angegeben worden. Er stellt noch 4 andere Relationen auf. Wir zeigen in Kürze, wie z.B. die erste dieser 4 Relationen aus den Formeln (8) und (9) abzuleiten ist.

Wir substituieren für p_i in die erste Gleichung b_i und in die zweite a_i und summieren; dabei ergibt sich

$$\left.\begin{array}{l} -\, {}_1V (f'\alpha)(f'b) - {}_2V (f'\beta)(f'b) - {}_2V (f'\alpha)(f'b) - {}_4V (f'\beta)(f'a) + \\ \quad +\, {}_2V (c'\alpha)(c'b) - {}_1V (c'\beta)(c'b) - {}_1V (c'\alpha)(c'b) - {}_2V (c'\beta)(c'a) = 0 \end{array}\right\} . \quad (10)$$

---

[1]) W. EUWE, Differentiaalinvarianten en partieele differentiaalvergelijkingen uit de tensorrekening. Diss. Amsterdam (1928). S. 44 und 45. These 2. Ich benutze die Gelegenheit, auch auf folgende Unvollständigkeit in dieser Dissertation aufmerksam zu machen. Auf S. 2 heisst es, dass ich die Differentialinvarianten für mindestens n Vektoren aufgesucht habe. Ich habe aber Reduktionssysteme angegeben für jede beliebige Anzahl von Vektoren in R_n. Siehe: G. F. C. GRISS, Differentialinvarianten von Systemen von Vektoren. Diss. Amsterdam. (1925).

Umrechnung gibt

$$(f'c)^2 = (f'\varphi)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (11)$$

Dieses Resultat stimmt überein mit der Relation

$$\tfrac{1}{2}(f'\,\underline{c})^2 = -\tfrac{1}{2}(a\,\varphi')\left(\varphi'\,\frac{\partial\dfrac{A_{11}}{A_{22}}}{\partial x}\right) + \tfrac{1}{2}\frac{A_{11}\,A_{22}}{A_{12}}, \quad . \quad . \quad . \qquad (12)$$

welche W. EUWE gibt; das liegt daran, dass W. EUWE statt (5) setzt:

$$\underline{b}_i = \frac{f_i\,(f\,\varphi')\,(\varphi'\,a)}{A_{22}},$$

was augenscheinlich weniger einfach ist. In diesem Falle wird

$$\underline{c}_{ik} = \frac{\partial \underline{b}_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \underline{b}_k}{\partial x_i} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial b_i}{\partial x_k} - \frac{\partial b_k}{\partial x_i}\right)\frac{A_{11}}{A_{22}} + \tfrac{1}{2}\left(b_i\,\frac{\partial\dfrac{A_{11}}{A_{22}}}{\partial x_k} - b_k\,\frac{\partial\dfrac{A_{11}}{A_{22}}}{\partial x_i}\right).$$

Also

$$(f'\underline{c})^2 = \tfrac{1}{2}(f'c)^2\frac{A_{11}}{A_{22}} + (b\,f')\left(f'\frac{\partial\dfrac{A_{11}}{A_{22}}}{\partial x}\right) = \frac{A_{11}A_{22}}{A_{12}} - (a\,\varphi')\left(\varphi'\,\frac{\partial\dfrac{A_{11}}{A_{22}}}{\partial x}\right).$$

Wir leiten jetzt aus dem Reduktionssatz für Differentialinvarianten zweiter Ordnung eine algebraische Basis von Differentialinvarianten ab. Dazu bestimmen wir eine algebraische Basis der Tensoren a_i, α_i, f_{ik}, φ_{ik}, ${}_h v_i$, c_{ik} und γ_{ik}, wobei wir also vorläufig von den Relationen (8) und (9) absehen. Die 4 unabhängigen Vektoren geben 16 Transformationsgleichungen, aus welchen die Transformationskoeffizienten $\dfrac{\partial x_i}{\partial \overline{x}_k}$ berechnet werden können. Substitution in die Transformationsgleichungen für a_i, α_i, f_{ik} und φ_{ik} ergibt natürlich nichts Neues, Substitution in die Transformationsgleichungen für ${}_h v_i$, c_{ik} und γ_{ik} ergibt 28 Invarianten, welche linear sind in diesen Komponenten. Aus dem vollen System von 169 Invarianten, das M. EUWE aufstellt, kann man zur Bestimmung einer algebraischen Basis von vornherein alle diejenigen Invarianten fortlassen, welche nicht linear sind in ${}_h v_i$, c_{ik} und γ_{ik}. Es bleiben übrig:

$$\left.\begin{array}{cccc}
(f'\,c)^2 & (\varphi'\,c)^2 & (f'\,\gamma)^2 & (\varphi'\,\gamma)^2 \\
(a\,f')\,(f'{}_h v) & (\alpha\,f')\,(f'{}_h v) & (a\,\varphi')\,(\varphi'{}_h v) & (\alpha\,\varphi')\,(\varphi'{}_h v) \\
 & (a\,c')\,(c'\,\alpha) & (a\,\gamma')\,(\gamma'\,\alpha) & \\
[a\,f\,\varphi\,c\,a] & [a\,f\,\varphi\,c\,\alpha] & [\alpha\,f\,\varphi\,c\,\alpha] & \\
[a\,f\,\varphi\,\gamma\,a] & [a\,f\,\varphi\,\gamma\,\alpha] & [\alpha\,f\,\varphi\,\gamma\,\alpha] &
\end{array}\right\} . \qquad (13)$$

(Bei Vertauschung der Komplexsymbole in den letzten 6 Invarianten ergeben sich nur abhängige Invarianten).

Wir haben hier 28 Invarianten, in welchen alle anderen algebraisch ausdrückbar sind. Es muss deren gerade 28 geben, also ist (13) eine kleinste algebraische Basis.

Berücksichtigen wir jetzt die 8 Relationen (8) und (9), welche durch Substitution von a, α, b und β für p 8 Invarianten geben, welche identisch Null sind. Wir wissen schon, dass die ersten 4 Invarianten von (13) abhängig von den übrigen werden. Weiter ist einfach zu beweisen, dass aus diesen Relationen auch $(a\,c')(c'\,\alpha)$, $(a\,\gamma')(\gamma'\,\alpha)$, $[a\,f\varphi\,c\,\alpha]$ und $[a\,f\varphi\,\gamma\,\alpha]$ berechenbar sind, *sodass also eine kleinste algebraische Basis von Differentialinvarianten zweiter Ordnung von a_i und α_i gebildet wird von den 20 Invarianten* [1])

$$\begin{array}{llll} (a\,f')(f'_h v) & (\alpha\,f')(f'_h v) & (a\,\varphi')(\varphi'_h v) & (\alpha\,\varphi')(\varphi'_h v) \\ [a\,f\varphi\,c\,a] & [\alpha\,f\varphi\,c\,\alpha] & [a\,f\varphi\,\gamma\,a] & [\alpha\,f\varphi\,\gamma\,\alpha]. \end{array}$$
$$(h = 1, 2, 3, 4).$$

[1]) Bei der Bestimmung des vollen Systems, das W. EUWE auf S. 28 seiner Dissertation gibt, sind die invarianten Relationen (8) und (9) nicht berücksichtigt, was leicht aus (11) zu ersehen ist.