Mathematics. — *Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus* [1]. By Prof. L. E. J. BROUWER.

(Communicated at the meeting of December 17, 1927).

LITERATUR.

HILBERT.

Mathematische Probleme, Vortrag, gehalten auf dem Intern. Mathem.-Kongress zu Paris 1900 (nach dem Abdruck im Archiv d. Math. u. Phys. (3) 1 (1901) hier zitiert als F 1).

Ueber die Grundlagen der Logik und der Arithmetik, Verhandlungen des III. Intern. Mathem.-Kongr. Heidelberg 1904, Leipzig 1905 (hier zitiert als F 2).

Axiomatisches Denken, Math. Annalen 78 (1918) (hier zitiert als F 3).

Neubegründung der Mathematik, Hamburger math. Seminarabhandlungen 1 (1922) (hier zitiert als F 4).

Die logischen Grundlagen der Mathematik, Math. Annalen 88 (1922) (hier zitiert als F 5).

Ueber das Unendliche, Math. Annalen 95 (1926) (hier zitiert als F 6).

BROUWER.

Over de grondslagen der wiskunde, Amsterdam-Leipzig 1907 (hier zitiert als I 1).

De onbetrouwbaarheid der logische principes, Tijdschrift voor Wijsbegeerte 2 (1908) (hier zitiert als I 2).

Intuitionism and Formalism, Amer. Bull. 20 (1913) (hier zitiert als I 3).

Besprechung des Buches von SCHOENFLIES: *Die Entwickelung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen,* Jahresber. d. D. M. V. 23 (1914) (hier zitiert als I 4).

Addenda en corrigenda over de grondslagen der wiskunde, N. archief v. wisk. (2) 12 (1918) (hier zitiert als I 5).

Intuitionistische Mengenlehre, Jahresber. d. D. M. V. 28 (1920) (hier zitiert als I 6).

Ueber die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie, Journ. f. Math. 154 (1924) (hier zitiert als I 7).

Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe, Jahresber. d. D. M. V. 33 (1925) (hier zitiert als I 8).

Ueber Definitionsbereiche von Funktionen, Math. Annalen 97 (1927) (hier zitiert als I 9).

---

[1]) In ungefähr gleichlautender Form am 16. 2. 1928 der Berliner Akademie der Wissenschaften vorgelegt.

§ 1.

Die Richtigkeitsdifferenzen zwischen der formalistischen Neubegründung und dem intuitionistischen Neubau der Mathematik werden beseitigt sein, und die Wahl zwischen beiden Beschäftigungen sich auf eine Geschmacksangelegenheit reduzieren, sobald die folgenden in erster Linie auf den Formalismus bezüglichen, aber in der intuitionistischen Literatur zuerst formulierten Einsichten allgemein durchgedrungen sein werden. Dieses Durchdringen ist deshalb nur eine Zeitfrage, weil es sich um reine Besinnungsergebnisse handelt, die kein diskutables Element enthalten und zu denen jederman der sie einmal verstanden hat, sich bekennen muss. Von den vier Einsichten ist bisher für zwei dieses Verständnis und dieses Bekenntnis in der formalistischen Literatur erreicht. Das Eintreten der gleichen Sachlage für die beiden übrigen wird das Ende des Grundlagenstreites in der Mathematik bedeuten.

Erste Einsicht. *Die Einteilung der formalistischen Bemühungen in einen Aufbau des „mathematischen Formelbestandes" (formalistischen Bildes der Mathematik) und eine intuitive (inhaltliche) Theorie der Gesetze dieses Aufbaues, sowie die Erkenntnis, dass für die letztere Theorie die intuitionistische Mathematik der Menge der natürlichen Zahlen unentbehrlich ist.*

Zweite Einsicht. *Die Verwerfung der gedankenlosen Anwendung des logischen Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, sowie die Erkenntnis, erstens dass die Erforschung des Berechtigungsgrundes und des Gültigkeitsbereichs des genannten Satzes einen wesentlichen Gegenstand der mathematischen Grundlagenforschung ausmacht, zweitens dass dieser Gültigkeitsbereich in der intuitiven (inhaltlichen) Mathematik nur die endlichen Systeme umfasst.*

Dritte Einsicht. *Die Identifizierung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten mit dem Prinzip von der Lösbarkeit jedes mathematischen Problems.*

Vierte Einsicht. *Die Erkenntnis dass die (inhaltliche) Rechtfertigung der formalistischen Mathematik durch den Beweis ihrer Widerspruchslosigkeit einen circulus vitiosus enthält, weil diese Rechtfertigung auf der (inhaltlichen) Richtigkeit der Aussage, dass aus der Widerspruchslosigkeit eines Satzes die Richtigkeit dieses Satzes folge, d. h. auf der (inhaltlichen) Richtigkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten beruht.*

1. Die erste Einsicht fehlt noch in F 2 (vgl. insbesondere den mit derselben in Widerspruch stehenden Absatz V auf S. 184—185). Nachdem sie durch POINCARÉ stark vorbereitet worden war, tritt sie zum ersten Mal in der Literatur auf in I 1, wo S. 173—174 die genannten Teile der formalistischen Mathematik als *mathematische Sprache* und *Mathematik 2. Ordnung* unterschieden und der intuitive Charakter des letzteren Teiles betont wird [2]). Mit der Bezeichnung der Mathematik

[2]) Eine mündliche Erörterung der ersten Einsicht Herrn HILBERT gegenüber hat im Herbst 1909 in mehreren Unterhaltungen stattgefunden.

2. Ordnung als *Metamathematik* ist sie in F 4 (vgl. insbesondere S. 165 u. 174) in der formalistischen Literatur durchgebrochen. Der Anspruch der formalistischen Schule, mit dieser dem Intuitionismus entnommenen Einsicht den Intuitionismus ad absurdum zu führen (vgl. Math. Zeitschr. 26, S. 3), ist wohl nicht ernst zu nehmen.

2. Die gedankenlose Anwendung des logischen Satzes vom ausgeschlossenen Dritten findet sich noch in F 2 und F 3 (vgl. z. B. F 3, S. 413, Z. 11—4 v. u., und insbesondere F 2, S. 182, Z. 16—19 v. o., S. 182, Z. 2 v. u. —S. 183, Z. 2 v. o., S. 184, Z. 21—13 v. u., wo jedesmal der Satz vom ausgeschlossenen Dritten als mit dem Satz vom Widerspruch im wesentlichen gleichbedeutend angesehen wird). Zum ersten Male findet sich die zweite Einsicht in der Literatur in I 2, und sodann mehr oder weniger ausführlich in jeder der Veröffentlichungen I 3—8. Abgesehen von der mit ihr aufs engste verbundenen Erkenntnis der intuitionistischen Widerspruchslosigkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, bricht sie in der formalistischen Literatur durch in F 5 [3]), wo einerseits die beschränkte inhaltliche Gültigkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten anerkannt (vgl. insbesondere S. 155—156), andererseits die widerspruchslose Kombination einer logischen Formulierung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten mit anderen Axiomen im Rahmen der formalistischen Mathematik als Aufgabe gestellt wird. Besonders eloquent wird dann auf die beschränkte inhaltliche Gültigkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten hingewiesen in F 6, S. 173—174, wo aber die Erweiterung seiner Anzweiflung auf die übrigen Aristotelischen Gesetze über das Ziel hinausschiesst.

3. Während der Zeit der gedankenlosen Anwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der formalistischen Literatur wird das Prinzip von der Lösbarkeit jedes mathematischen Problems zunächst in F 1, S. 52 als Axiom bzw. Ueberzeugung, sodann in F 3, S. 412—413 in zwei verschiedenen Formen (in welchen statt von „Lösbarkeit" der Reihe nach von „prinzipieller Lösbarkeit" und von „Entscheidbarkeit durch eine endliche Anzahl von Operationen" gesprochen wird) als Gegenstand noch zu erledigender Probleme hingestellt. Aber auch nach der Erörterung der dritten Einsicht in I 2, S. 156, I 4, S. *80*, I 6, S. 203—204, und nach dem Durchbruch der zweiten Einsicht in der formalistischen Literatur wird in F 6, S. 180, wo das Problem der Widerspruchsfreiheit des Axioms von der Lösbarkeit eines beliebigen mathematischen Problems als Beispiel einer „in den mathematischen Denkbereich fallenden Frage grundsätzlicher Art, an die man sich früher nicht heranmachen konnte" hingestellt wird, diese Frage als unabhängig von der Sicherung der (die Widerspruchsfreiheit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten mit umfassenden) Grundlagen der mathematischen Wissenschaft noch offenstehend vorgeführt.

---

[3]) Nachdem schon in F 4, S. 160 Aufmerksamkeit auf den Satz vom ausgeschlossenen Dritten bekundet wird.

4. Die vierte Einsicht wird zum Ausdruck gebracht in I 9, S. 64. In der formalistischen Literatur findet sich von ihr bisher keine Spur, wohl aber manche ihr widersprechende Aeusserung, z.B. in F 1, S. 55—56 und vor allem in F 6, wo S. 162—163 noch ausgerufen wird: „Nein, wenn über den Nachweis der Widerspruchsfreiheit hinaus noch die Frage der Berechtigung zu einer Massnahme einen Sinn haben soll, so ist es doch nur die, ob die Massnahme von einem entsprechenden Erfolge begleitet wird" [4]).

Nach dem Vorstehenden hat der Formalismus vom Intuitionismus nur Wohltaten empfangen und weitere Wohltaten zu erwarten. Dementsprechend sollte die formalistische Schule dem Intuitionismus einige Anerkennung zollen, statt gegen denselben in höhnischem Ton zu polemisieren und dabei nicht einmal die richtige Erwähnung der Autorschaft einzuhalten. Ueberdies sollte die formalistische Schule bedenken, dass im Rahmen des Formalismus von der eigentlichen Mathematik bisher noch immer *nichts* gesichert ist (weil ja der metamathematische Widerspruchsfreiheitsbeweis des Axiomensystems nach wie vor aussteht), wogegen der Intuitionismus auf der Grundlage seiner konstruktiven Mengendefinition und seiner Haupteigenschaft der finiten Mengen [5]) schon einige Lehrgebäude der eigentlichen Mathematik in unerschütterlicher Sicherheit neu errichtet hat. Wenn also die formalistische Schule nach ihrer Aeusserung in F 6, S. 180 beim Intuitionismus Bescheidenheit bemerkt hat, so sollte sie darin Anlass finden, in bezug auf diese Tugend dem Intuitionismus nicht nachzustehen.

§ 2.

In I 7, S. 3 wurde bemerkt, dass bei den Bestrebungen zur Durchführung des Widerspruchsfreiheitsbeweises der formalistischen Metamathematik die intuitionistische Widerspruchslosigkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten als ermutigender Umstand gelten kann.

Wenn die kombinierte Aussage des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten für endlichviele mathematische Eigenschaften bzw. für eine beliebige Spezies von mathematischen Eigenschaften [6]) als *mehrfacher Satz vom ausgeschlossenen Dritten erster* bzw. *zweiter Art* bezeichnet wird, dann ist einerseits klar, dass die Widerspruchslosigkeit des einfachen Satzes vom ausgeschlossenen Dritten keineswegs unmittelbar diejenige des mehrfachen Satzes vom ausgeschlossenen Dritten nach sich zieht, andererseits,

---

[4]) Uebrigens liegt bei derartigen Aeusserungen genau genommen doch wieder eine gedankenlose Anwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, mithin eine Verdunkelung der zweiten Einsicht vor.

[5]) Vgl. F 9, S. 66 (Theorem 2).

[6]) D.h. die Existenzaussage eines Simultangesetzes, das für sie alle die Richtigkeit oder Absurdität entscheidet.

dass die im vorigen Absatze in Erinnerung gebrachte Bemerkung erst dann ihre volle Tragweite erlangt, wenn nicht nur für den einfachen Satz vom ausgeschlossenen Dritten, sondern auch für den mehrfachen Satz vom ausgeschlossenen Dritten erster Art, die Widerspruchslosigkeit feststeht. In der Tat wird im Folgenden der Beweis der letzteren Widerspruchslosigkeit erbracht. Des weiteren wird sich ergeben, dass der (für die formalistischen Hoffnungen belanglose) mehrfache Satz vom ausgeschlossenen Dritten zweiter Art keine Widerspruchslosigkeit mehr besitzt.

Die Widerspruchsfreiheit des mehrfachen Satzes vom ausgeschlossenen Dritten erster Art beweisen wir mittels vollständiger Induktion. Es sei n eine natürliche Zahl, es sei die Widerspruchsfreiheit der kombinierten Aussage des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten für n beliebige mathematische Eigenschaften bewiesen, es seien $n + 1$ mathematische Eigenschaften $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ vorgegeben, und es sei einen Augenblick angenommen, dass die kombinierte Aussage des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten für $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ zu einem Widerspruch führte. Das würde heissen, dass jede der 2^{n+1} Kombinationen von $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ je mit dem Richtigkeits- oder mit dem Absurditätsprädikat versehen, zu einem Widerspruch führte.

Wir behaupten, dass unter dieser Annahme der einfache Satz vom ausgeschlossenen Dritten für a_{n+1} notwendig absurd sein muss. Denn wäre a_{n+1} richtig bzw. absurd, so wäre auf Grund der Widerspruchsfreiheit der kombinierten Aussage des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten für n beliebige mathematische Eigenschaften die Kombination der Richtigkeit bzw. Absurdität von a_{n+1} mit der kombinierten Aussage des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten für $a_1, a_2, \ldots, a_n$ widerspruchsfrei, entgegen der Annahme des vorigen Absatzes. Die Annahme des vorigen Absatzes hat sich also als unstatthaft erwiesen, und die kombinierte Aussage des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten für $n + 1$ beliebige mathematische Eigenschaften hat sich als widerspruchsfrei herausgestellt.

Gegenbeispiele der Widerspruchsfreiheit des mehrfachen Satzes vom ausgeschlossenen Dritten zweiter Art liefert der aus der Haupteigenschaft der finiten Mengen folgende Satz, dass bei Zerlegung des Einheitskontinuums in zwei Teilspezies eine dieser Teilspezies mit dem Einheitskontinuum identisch und die andere leer ist. Aus diesem Satze folgt nämlich, dass die kombinierte Aussage des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten für eine beliebige Eigenschaft in bezug auf *alle* Punktkerne des Einheitskontinuums dann und nur dann widerspruchsfrei ist, wenn die Eigenschaft entweder für alle Punktkerne des Einheitskontinuums richtig oder für alle Punktkerne des Einheitskontinuums absurd ist. Insbesondere sind die beiden folgenden Aussagen kontradiktorisch:

1. *Alle Punktkerne des Einheitskontinuums sind entweder rational oder negativ-irrational.*

2. *Für alle Punktkerne des Einheitskontinuums ist die Rationalitätsfrage entweder entscheidbar oder unentscheidbar.*

Formulieren wir in Analogie mit dem Obigen folgende drei Fassungen des Prinzips der Reziprozität der Komplementärspezies:

1. *Jedes Element der Komplementärspezies der Komplementärspezies von R gehört zu R* (einfaches Prinzip der Reziprozität der Komplementärspezies).

2. *Jede endliche Spezies von Elementen der Komplementärspezies der Komplementärspezies von R gehört zu R* (mehrfaches Prinzip der Reziprozität der Komplementärspezies erster Art).

3. *Jede Spezies von Elementen der Komplementärspezies der Komplementärspezies von R gehört zu R* (mehrfaches Prinzip der Reziprozität der Komplementärspezies zweiter Art).

Alsdann besteht auch hier die Widerspruchsfreiheit nur für 1. und 2., und nicht für 3. Ein Gegenbeispiel liefert die Spezies G derjenigen Punktkerne des Einheitskontinuums C, für welche die Rationalitätsfrage entscheidbar ist. Denn die Komplementärspezies der Komplementärspezies in C von G ist mit C identisch (weil nämlich die Komplementärspezies in C von G leer ist), während wir oben gesehen haben, dass G unmöglich mit C identisch sein kann.