Huygens Institute - Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences (KNAW)

Citation:

Johannes Diderik van der Waals & Korteweg, D.J., Algemene theorie der ponderomotorische krachten door D.J. Korteweg, edition , volume

This PDF was made on 24 September 2010, from the 'Digital Library' of the Dutch History of Science Web Center (www.dwc.knaw.nl) > 'Digital Library > Proceedings of the Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences (KNAW), http://www.digitallibrary.nl'

ALGEMEENE THEORIE

DER

PONDEROMOTORISCHE KRACHTEN.

DOOR

D. J. KORTEWEG.

GEVOLGD DOOR

EENIGE OPMERKINGEN NAAR AANLEIDING VAN DE ALGEMEENE THEORIE DER PONDEROMOTORISCHE KRACHTEN" VAN Dr. D. J. KORTEWEG.

DOOR J. D. VAN DER WAALS.

Uitgegeven door de Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

AMSTERDAM.
JOHANNES MÜLLER.
1879.

ALGEMEENE THEORIE

DER

PONDEROMOTORISCHE KRACHTEN.

DOOR

D. J. KORTEWEG.

GEVOLGD DOOR

EENIGE OPMERKINGEN NAAR AANLEIDING VAN DE ALGEMEENE THEORIE DER PONDEROMOTORISCHE KRACHTEN" VAN Dr. D. J. KORTEWEG.

DOOR J. D. VAN DER WAALS.

Uitgegeven door de Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1879.

ALGEMEENE THEORIE

DER

PONDEROMOTORISCHE KRACHTEN.

DOOR

D. J. KORTEWEG.

INLEIDING.

1. De electrodynamische theorie van AMPÈRE * heeft aan verschillende aanvallen blootgestaan. Deze betroffen *òf* de juistheid der experimenten, *òf* de gegrondheid der hypothesen. WILHELM WEBER heeft in zijne *Electrodynamische Maaszbestimmungen* † het onvoldoende der experimenten van AMPÈRE betoogd, maar tevens door nieuwe experimenten bewezen dat de ponderomotorische krachtwerkingen tusschen gesloten lineaire stroomen inderdaad zoodanig zijn als de theorie van AMPÈRE ze aangeeft. Daarentegen mocht men terecht nog langen tijd blijven twijfelen aan de bewijskracht van het bekende experiment van AMPÈRE waaruit moest worden afgeleid dat de resultante van de krachten door een gesloten stroom uitgeoefend op een stroomelement loodrecht staat op dit element. Vooreerst echter bewees C. NEUMANN § dat de wet door AMPÈRE voor de ponderomotorische werking tusschen twee stroomelementen gevonden, indien men eenmaal de hypothesen van AMPÈRE aannam, ook kon worden afgeleid uit de krachtwerkingen van gesloten stroomen op elkander, zoodat het betwijfelde

* *Mémoires de l'académie des sciences de l'institut de France*, 1823, pag. 175.

† *Abhandlungen der kön. Sächs. Ges, der Wissenschaften*, Bd. I. 1852.

§ *Math. Annalen*, (von CLEBSCH und NEUMANN), Bd. XI. pag. 309. 1877.

feit als bewijsmiddel in het stelsel van AMPÈRE eigenlijk overbodig werd. Verder heeft onlangs v. ETTINGHAUSEN * met inachtneming van alle voorzorgen de proeven van AMPÈRE herhaald en daarmede waarschijnlijk experimenteel afdoende aangetoond dat de resultante van de krachten door een gesloten stroom op een stroomelement uitgeoefend, loodrecht staat op dit element.

2. De hypothesen die men thans nog te hulp moet roepen om tot eene bewijsvoering van de wet van AMPÈRE te geraken, zijn door C. NEUMANN † ongeveer als volgt samengevat:

EERSTE HYPOTHESE. *De ponderomotorische krachten tusschen twee stroomelementen zijn evenredig met de lengte der elementen en de stroomsterkte.* Zij worden dus tegengesteld zoodra in *één* der beide elementen de stroomrichting omkeert en blijven onveranderd als dit in beide elementen geschiedt.

TWEEDE HYPOTHESE. *Behalve van de lengte der elementen en de stroomsterkte zijn deze krachten uitsluitend afhankelijk van de ligging der beide elementen ten opzichte van elkander*, zoodat derhalve tusschen de spiegelbeelden der elementen de spiegelbeelden der krachten werkzaam zijn.

DERDE HYPOTHESE. *Men mag de krachtwerkingen tusschen twee elementen vervangen door die tusschen hunne zoogenaamde componenten.*

VIERDE HYPOTHESE. *Er bestaan tusschen twee stroomelementen geene ponderomotorische krachten buiten de verbindingslijn en geene richtende koppels.*

3. Voor zoover mij bekend is bestaat er geene electrodynamische theorie waarin niet de drie eerste hypothesen uitdrukkelijk of stilzwijgend worden aangenomen. Tevens voeren alle theoriën voor gesloten stroomen tot dezelfde krachtwerkingen die het bondigst worden uitgedrukt door de potentiaalformule van F. NEUMANN, de vader. Daarentegen werd de vierde hypothese herhaaldelijk door andere hypothesen vervangen. Eerst door GRASZMANN §, later door HELMHOLTZ **. De hypothese van GRASZMANN luidt: *alle ponderomotorische krachten staan loodrecht op de elementen waarop ze werkzaam zijn.* Die van HELMHOLTZ: *Twee stroomelementen oefenen op elkaar krachtwerkingen uit* (krachten en richtende koppels) *die een potentiaal bezitten.*

Elk van deze beide hypothesen geven even als de vierde van AMPÈRE aanleiding tot eene electrodynamische theorie. Deze theoriën stemmen overeen, wat de resultaten betreft, voor gesloten, maar verschillen voor open stroomen. Ieder

---

* *Wien. Ber.* pag. 109, 1878.

† *Math. Annalen*, Bd. XI pag. 318

§ POGG., *Ann.* Bd. 64. pag, 1. 1845.

** CRELLE, *Journal*, Bd 72. 1870

der drie vindt ook thans nog aanhangers. C. NEUMANN * bijv. verdedigt in 1877 de wetten van AMPÈRE; CLAUSIUS †) stelt in datzelfde jaar eene algemeene electrodynamische wet op die voor de ponderomotorische krachten tusschen lineaire stroomelementen tot de wet van GRASZMANN voert §; ook HELMHOLTZ ** houdt zijne potentiaaltheorie staande. Daarom zal het nut eener meer algemeene theorie, waarbij de vierde hypothese van AMPÈRE verworpen maar geene nieuwe hypothese wordt ingevoerd, bezwaarlijk kunnen worden ontkend. Dat zij functiën zal moeten bevatten die uit de experimenteele kennis van heden niet nader te bepalen zijn, spreekt van zelve. Zij zal de drie theoriën van AMPÈRE, GRASZMANN en HELMHOLTZ als bijzondere gevallen in zich sluiten en hunne onderlinge verhouding het best in het licht stellen. Het eenige bezwaar tegen het opstellen zulk eener theorie zoude kunnen zijn de mathematische uitvoerbaarheid. De ongegrondheid van dit bezwaar zal echter blijken.

4. De eerste proef eene meer algemeene theorie op te stellen, welke echter slechts de theoriën van AMPÈRE en GRASZMANN in zich bevatten moest, is van STEFAN ††. Daarbij wordt geen acht geslagen op richtende koppels wier mogelijkheid niet kan worden ontkend en die in de potentiaaltheorie opgenomen zijn. Tevens wordt de nieuwe hypothese ingevoerd dat alle krachten omgekeerd evenredig veranderen met het vierkant van den afstand. Deze hypothese beperkt onnoodig de algemeenheid van de theorie van STEFAN al is ze ook voor het door hem beoogde doel — een brug te slaan tusschen de theoriën van AMPÈRE en GRASZMANN — onschadelijk. Dat zij bewezen zou zijn of zou kunnen worden door experimenten met gesloten stroomen §§ is onjuist. Het zoogenaamde

---

* *Math. Ann.* Bd. XI. pag. 309.

† CRELLE, *Journal*, Bd 82. pag. 85.

§ POGG., *Ann.* Bd. 161, pag. 160.

** In de woorden van HELMHOLTZ (POGG. *Ann.* 1876, Bd. 158, pag. 87) lees ik geene intrekking zijner potentiaaltheorie, wel eene erkenning (pag. 95) tegen zijne vroegere meening (*Journal* v. CRELLE, Bd. 78, 1874, pag. 281) in dat de convectie van electriciteit als een electrische stroom moet worden in rekening gebracht en voorts (pag. 102) dat op de dielectrische polarisatie behoort te worden gelet. Wij zullen dan ook zien dat — behoorlijk geformuleerd — de potentiaaltheorie met alle tot heden bekende ponderomotorische wetten vereenigbaar is. Men zie over dit onderwerp ook de *Monatsberichte der Ak. zu Berlin* 1876, p. 211—216, vertaald in het *Phil. Mag.* Vol. II. Serie 5, 1876, September, pag. 233. Uit de daar vermelde proeven zoude blijken dat de convectie van electriciteit geheel als een electrische stroom moet worden in rekening gebracht.

†† *Wien. Ber.* Bd. 59, pag. 693, 1869.

§§ *Wien. Ber.* Bd. 59, pag. 708.

bewijs door AMPÈRE medegedeeld *, en door STEFAN waarschijnlijk bedoeld, vervalt als men bedenkt dat er tusschen de stroomelementen krachten bestaan kunnen wier resultante verdwijnt zoodra een der stroomen gesloten wordt, of ook zoodra beide gesloten worden.

5. Ook MAXWELL † heeft eene algemeene theorie gegeven, omvattende die van GRASZMANN en AMPÈRE, zonder dat daarbij de hypothese van STEFAN is ingevoerd. Behalve echter dat door eene verwarring van teekens de formules foutief zijn — wat gemakkelijk te herstellen ware — worden ook hier geene richtende koppels in de theorie opgenomen.

Eindelijk komt het mij voor dat HELMHOLTZ § bij het opstellen zijner potentiaaltheorie aanvankelijk gemeend heeft eene algemeene theorie te geven.

„*Bei diesem Widerstreit der Theoriën schien es mir rathsam möglichst wenig den Boden der Thatsachen zu verlaszen und in der Theorie unbestimmt zu laszen, was bisher nicht als durch Versuchen entschieden angesehen werden konnte.*"

Hij heeft dan, natuurlijk ten onrechte, in zijne eerste verhandeling het bestaan eener potentiaal — ook voor stroomelementen — als iets dat aan geen redelijken twijfel onderworpen was, opgevat.

6. Alvorens verder te gaan moeten wij ter vermijding van misverstand eene onderscheiding bespreken die wij gemakshalve zullen inkleeden in de uitdrukkingswijze der dualistische electriciteitstheorie, tevens aannemende dat de som der absolute hoeveelheid positieve en negatieve electriciteit constant is en dus een stroom steeds bestaat uit twee gelijke en tegengestelde stroomingen van positieve en negatieve electriciteit.

Men stelle zich voor de stroomeinden van een lineaire open stroom. Aan ieder stroomeind stroomt een zekere hoeveelheid electriciteit van de eene soort toe, terwijl een even groote hoeveelheid electriciteit van de andere soort van dit stroomeind afstroomt naar het andere stroomeind toe. Men kan zich nu voorstellen:

1°. dat de electriciteit van de eene soort in het stroomeind inderdaad in rust komt en de electriciteit van de andere soort zich aldaar in beweging zet;

2°. dat integendeel de electriciteit van de eene soort het stroomeind verlatende

---

* *Mémoires de l'institut*, T. 6. pag. 374. 1823.

† *Treatise on electricity and magnetism*, MACMILLAN, London, Tome II, pag. 159, 1873.

§ CRELLE, *Journal*, Bd. 72, pag. 57. HELMHOLTZ stelt dan ook in dat opstel de verhouding van zijne potentiaaltheorie tot die van WEBER verkeerd voor. Het is *niet* waar dat voor eene bepaalde waarde van k zijne theorie wat de resultaten betreft, in die van WEBER overgaat.

voortstroomt en die van de andere zich daar niet in beweging zet, maar van elders wordt aangevoerd. In dit geval is dus de open stroom meer te beschouwen als een deel van een uitgestrekter open stroom of van een gesloten stroom.

In het eerste geval noemen wij de open stroom *volledig*, in het tweede geval *onvolledig*.

Deze onderscheiding zou, wat de ponderomotorische werking betreft, onnoodig zijn indien het niet als zeer mogelijk moest erkend worden dat plotseling tot rust komende electriciteit als zoodanig ponderomotorische werkingen uitoefent. Dit wordt niet alleen aangenomen in de potentiaaltheorie van HELMHOLTZ; maar evenzeer in de algemeene electrodynamische theoriën van WEBER en CLAUSIUS.

7. Dezelfde onderscheiding passen wij toe op *stroomelementen*. De ponderomotorische werkingen van een *volledig* stroomelement zijn dus gelijk aan die van het overeenkomstige *onvolledige* stroomelement plus de werking der beide stroomeinden. Sluit men onvolledige stroomelementen van gelijke intensiteit aan elkaar dan verkrijgt men een onvolledige open stroom. Sluit men daarentegen volledige elementen van gelijke intensiteit aaneen dan verkrijgt men een volledige open stroom. Immers overal waar twee volledige elementen van *gelijke* stroomintensiteit aan elkaar sluiten verliest het aansluitingspunt zijn karakter van stroomeind. Er zet zich daar als beginpunt van 't eene element juist evenveel electriciteit van een bepaalde soort in beweging als er als eindpunt van het andere element tot rust komt, m. a. w. de electriciteit stroomt eenvoudig door. Daarom kan een gesloten stroom geheel naar willekeur beschouwd worden als een som van volledige of van onvolledige elementen De tweede beschouwingswijze is die van AMPÈRE, GRASZMANN en STEFAN, de eerste is eigen aan HELMHOLTZ. Een beweegbaar *gedeelte* van een gesloten stroom kan daarentegen alléén opgevat worden als een som van *on*volledige elementen.

Een volledige theorie der ponderomotorische krachten zoude rekenschap geven 1°. van de werking van twee volledige elementen onderling, 2°. van een volledig op een onvolledig, 3°. van een onvolledig op een volledig, 4°. van onvolledige elementen op elkaar. In elk dezer vier gevallen zullen verschillende functiën van den afstand kunnen voorkomen. Zoover echter de experimenteele data het opstellen der theorie toelaten vallen deze vier gevallen grootendeels samen, en zullen wij ze derhalve ook gelijktijdig behandelen.

8. Reeds uit de eerste hypothese van § 2 blijkt dat wij de ponderomotorische krachten met de stroomsterkte der beide stroomen evenredig stellen. Bestaan er dus ponderomotorische krachten die een andere wet volgen, dan zouden deze nog naast de hier behandelde moeten worden in rekening gebracht. Zooals wij zien zullen onderstelt de algemeene wet van CLAUSIUS zulke krachten, die echter expe-

rimenteel nog niet zijn aangetoond, en dan gemakkelijk van de hier behandelde te onderscheiden en te scheiden zouden zijn.

Evenzeer laten wij in deze verhandeling de electromotorische krachten geheel buiten bespreking, hoewel het natuurlijk mogelijk is deze met behulp van de wet van het behoud van arbeidsvermogen, met de ponderomotorische in verband te brengen, wat echter beter voor eene afzonderlijke behandeling geschikt is.

KRACHTEN EN KOPPELS DIE WERKZAAM KUNNEN ZIJN TUSSCHEN TWEE STROOMELEMENTEN.

De vier fundamentaalgevallen.

9. Zooals reeds door AMPÈRE is aangetoond, kan men met behulp der drie eerste hypothesen van § 2 de krachtwerkingen (krachten en koppels) tusschen twee stroomelementen afleiden uit die welke in vier eenvoudige gevallen voorkomen:

Eerste geval. De beide elementen zijn longitudinaal geplaatst ten opzichte van hunne verbindingslijn.

Tweede geval. De beide elementen zijn transversaal ten opzichte van de verbindingslijn en loopen onderling evenwijdig.

Derde geval. Beide elementen zijn transversaal ten opzichte van de verbindingslijn en kruissen elkaar rechthoekig.

Vierde geval. Het eene element is longitudinaal het andere transversaal ten opzichte van de verbindingslijn.

Wij beginnen nu met op elk dezer vier gevallen de wet der symmetrie die uitgesproken is in de tweede hypothese van § 2, toe te passen.

Eerste geval.

10. Krachten buiten de verbindingslijn zijn *onmogelijk*, immers brengt men een spiegelvlak door de verbindingslijn en bepaalt men de spiegelbeelden, dan zoude de kracht van richting veranderen, terwijl de stroomelementen geheel dezelfde bleven.

Op gelijke wijze wordt de onmogelijkheid van het bestaan van koppels aangetoond, ook van koppels wier vlak loodrecht zoude staan op de verbindingslijn, immers zulke koppels zouden bij de spiegeling van zin veranderen, terwijl toch de elementen geheel onveranderd blijven.

Blijkens de eerste en tweede hypothese kan dus alleen eene kracht

$$B\, \iota_1 \iota_2\, ds_1\, ds_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

in de verbindingslijn werkzaam zijn, waarbij ι_1 en ι_2 de stroomsterkte, ds_1 en ds_2 de lengte der elementen, B eene onbekende functie van den afstand r voorstelt.

Ten einde de denkbeelden te bepalen nemen wij aan dat (1) de kracht voorstelt die werkzaam is om de elementen tot elkaar te doen naderen als de beide stroomen naar elkander toe zijn gericht. Loopen beide stroomen in dezelfde richting dan wordt dus de kracht die beiden tracht te doen naderen, aangewezen door:

$$-B\, \iota_1 \iota_2\, ds_1\, ds_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

of wat hetzelfde is, (1) wijst de kracht aan die beide van elkaar tracht te verwijderen.

Men weet dat in de theorie van AMPÈRE

$$B = \frac{A^2}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

waarin A eene constante voorstelt.

Tweede geval.

11. Krachten buiten de verbindingslijn zijn onmogelijk, waarvan men zich gemakkelijk overtuigt door het spiegelvlak beurtelings te doen samenvallen met het vlak waarin de beide elementen gelegen zijn en met het vlak gaande door de middens der beide elementen normaal op die elementen. In beide gevallen toch moeten de krachten onveranderd blijven, in het tweede geval namelijk keeren *beide* stroomen om (zie § 2, eerste hypothese). Evenmin kunnen koppels bestaan daar deze of door het ééne of door het andere spiegelvlak van zin of van ligging zouden veranderen.

Er blijft dus weder niets over dan eene kracht:

$$C\, \iota_1 \iota_2\, ds_1\, ds_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

werkzaam in de verbindingslijn en die wij onderstellen zullen te trachten de elementen tot elkaar te doen naderen indien de beide stroomen gelijkgericht zijn.

Volgens de theorie van AMPÈRE is:

$$C = \frac{2\,A^2}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Derde geval.

12. Krachten zijn hier geheel onmogelijk. Laat men het spiegelvlak steeds door de verbindingslijn gaan en beurtelings door het een en het ander element dan keert telkens de stroomrichting in een der beide elementen om. De kracht zoude dus beide malen juist tegengesteld moeten worden. Geen kracht, hoe ook gericht, kan aan die voorwaarde voldoen.

Met het beginsel der symmetrie is slechts vereenigbaar een koppel welks as samenvalt met de verbindingslijn. Wij nemen aan dat een koppel:

$$(D)\, \iota_1\, \iota_2\, ds_1\, ds_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

den rechten hoek tusschen beide stroomrichtingen tracht te verkleinen, d. w. z. de stroomhoofden tot elkander tracht te doen naderen.

Vierde geval.

13. Met de wet van symmetrie zijn hier uitsluitend vereenigbaar:

1°. krachten loodrecht op de verbindingslijn en gelegen in het vlak gaande door beide elementen;

2°. koppels gelegen in ditzelfde vlak.

In de onderstelling dat de stroomrichting in het longitudinale element gericht is naar het transversale element toe, nemen wij aan:

op het transversale element

een *kracht:*

$$E.\iota_1.\iota_2.ds_1\, ds_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

gelijkgericht met den stroom in dit element;

een *koppel:*

$$(F).\iota_1.\iota_2.ds_1\, ds_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

dat het stroomhoofd tracht te verwijderen van het longitudinale element en dus langs den kortsten weg het transversale element in de richting van het longitudinale tracht te stellen.

op het longitudinale element

een *kracht:*

$$G.\iota_1.\iota_2.ds_1\,ds_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

tegengesteld aan de stroomrichting van het transversale element;

een *koppel:*

$$(H).\iota_1.\iota_2.ds_1.ds_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

van gelijken zin met het koppel werkzaam op het transversale element, dus tegengesteld aan den zin waarin het longitudinale element om zijn midden zou worden gedraaid door een kracht in richting en plaatsing overeenstemmende met den transversalen stroom.

Is nu de stroom in het longitudinale element afgericht van het transversale element dan keeren natuurlijk al die krachtwerkingen om.

Beginsel van gelijke actie en reactie.

14. Met dit beginsel wordt in de theorie van GRASZMANN gebroken, in de theoriën van AMPÈRE en HELMHOLTZ wordt het behouden. Daar wij in de algemeene theorie de aansluiting met de theorie van GRASZMANN willen bewaren, laten ook wij het beginsel buiten rekening. Wij willen echter dadelijk de betrekkingen neerschrijven waartoe het aanleiding geeft. In het vierde geval eischt het de betrekkingen:

$$E = G, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

$$(F) + (H) = Er = Gr. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

In de drie eerste gevallen blijft het beginsel van zelve behouden door de omstandigheid dat bij gelijke stroomintensiteiten ieder verschil tusschen het eene en het andere element verdwijnt.

Krachtwerkingen tusschen twee elementen wier middens op dezelfde coördinaten-as gelegen zijn.

15. De lengte der verbindingslijn tusschen twee elementen zal steeds voorgesteld worden door r, de hoek die ieder der elementen met de verbindingslijn vormt door θ_1 en θ_2. Voor de richting van een element wordt daarbij gekozen de stroomrichting; de richting van de verbindingslijn wordt voor ieder element gerekend van dat element uit naar het andere toe, terwijl met θ_1 en θ_2 steeds hoeken kleiner dan 180° bedoeld worden.

Evenzoo stelt $\varepsilon < 180^0$ den hoek tusschen beide stroomelementen voor.

Verder wordt met η steeds bedoeld de hoek tusschen de normalen opgericht op de beide vlakken gaande door de verbindingslijn en ieder der elementen. Die normalen richten wij zoodanig op dat de draaijingen θ_1 en θ_2 gerekend van verbindingslijn tot element van uit een punt op zulk een normaal positief (met het uurwerk mede) gezien worden. Om nu ook den zin waarin de hoek η genomen moet worden te bepalen, verplaatse men beide normalen naar een der elementen en bezie ze van uit het andere element. De normaal behoorende bij het element waarnaar men ziet worde nu positief gedraaid tot ze samenvalt met de normaal op het element waaruit men ziet, dan is η de hoek die daarbij deze beschreven wordt. Deze hoek kan dus $\not> 180^0$ worden.

Hiermede zijn nu θ_1, θ_2, ε en η volmaakt ondubbelzinnig bepaald en tusschen hoeken zal steeds de betrekking bestaan:

$$\cos \varepsilon = - \cos \theta_1 . \cos \theta_2 - \sin \theta_1 . \sin \theta_2 . \cos \eta. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

16. Wij nemen nu drie onderling loodrechte assen aan. Den oorsprong plaatsen wij in het eerste element, de X-as doen wij samenvallen met de verbindingslijn. De Z-as plaatsen wij loodrecht op de verbindingslijn en op het eerste element, dat dus in het XY-vlak valt. Verder dragen wij zorg dat van uit een punt gelegen op het positieve gedeelte van de Z-as, de draaijing θ_1 gerekend van het element naar de verbindingslijn positief gezien worde. Eindelijk plaatsen wij de Y-as zoodanig dat van uit een punt op het positieve gedeelte de draaijing van 90^0 van de Z-as naar de X-as positief gezien worde. Men verkrijgt dan door ontbinding in de fundamentaal gevallen op het eerste element de volgende krachten en koppels, waarbij telkens de factor:

$$\iota_1 \iota_2 \, d s_1 \, d s_2 \quad \ldots \ldots , \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

weggelaten is, zooals ook in het vervolg herhaaldelijk geschieden en wel nimmer tot misverstand voeren zal.

Krachten:

$$X = B \cos \theta_1 \cos \theta_2 - C \sin \theta_1 . \sin \theta_2 . \cos \eta, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

$$Y = - E \sin \theta_1 \cos \theta_2 - G \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \eta, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

$$Z = - G \cos \theta_1 . \sin \theta_2 . \sin \eta, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

Koppels:

$$(X) = -(D) \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\eta, \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

$$(Y) = (H) \cos\theta_1 \sin\theta_2 \sin\eta, \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

$$(Z) = -(F) \sin\theta_1 \cos\theta_2 - (H) . \cos\theta_1 . \sin\theta_2 . \cos\eta. \quad \ldots \ldots \quad (20)$$

Ontleding der krachten en koppels *.

17. De ontbondenen Y en Z van de vorige § kunnen gedacht worden hun ontstaan te danken te hebben aan de volgende twee krachten:

1°. Een kracht:

$$S_1 = E \cos\theta_2 \quad \ldots \ldots \quad (21)$$

gericht volgens het eerste element,

2°. Een kracht:

$$S_2 = -G \cos\theta_1, \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

gericht volgens het tweede element.

Heffen wij vervolgens de ontbondenen van S_1 en S_2 langs de verbindingslijn door tegengestelde krachten op, dan zal het blijken dat men het krachtenstelsel X, Y, Z mag vervangen door de krachten S_1 en S_2 en een derde kracht:

$$R = (B-G-E) \cos\theta_1 \cos\theta_2 - C \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\eta \quad \ldots \ldots \quad (23)$$

gericht volgens de verbindingslijn.

Roept men te hulp de betrekking (13) dan is ook:

$$R = (B-G-E+C) \cos\theta_1 \cos\theta_2 + C \cos\varepsilon. \quad \ldots \ldots \quad (24)$$

18. Op gelijke wijze kunnen de koppels (X), (Y) en (Z) ontleed worden in de volgende drie:

---

* Het denkbeeld de krachten zoo te ontbinden als hier geschieden zal, is ontleend aan MAXWELL. *Treatise on electricity and magnetism, Macmillan,* London 1873, Vol. II, aldaar, pag. 154. MAXWELL maakt echter dadelijk in den aanvang een fout. Zijne formule (10):

$$R = A \cos\theta \cos\theta' + B \sin\theta \sin\theta' \cos\eta,$$

moet verbeterd worden in:

$$R = A \cos\theta \cos\theta' + B \sin\theta . \sin\theta' . \cos\eta + 2\, C \cos\theta \cos\theta',$$

ten onrechte meent MAXWELL dat de ontbondenen langs de verbindingslijn van S en S' elkaar opheffen.

Één

$$(M_1) = (F) \,.\, \sin\theta_1 \,.\, \cos\theta_2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

welks as normaal staat op de verbindingslijn en het eerste element en zoo gekozen wordt dat uit een punt van die as de draaijing θ_1 van de verbindingslijn naar het element positief gezien wordt.

Één

$$(M_2) = (H) \,.\, \cos\theta_1 \,.\, \sin\theta_2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

welks as normaal staat op de verbindingslijn en het tweede element en zoo gekozen wordt dat uit een punt van die as de draaijing θ_2 van de verbindingslijn naar het tweede element positief gezien wordt.

Één

$$(L) = -(D) \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\eta, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

welks as langs de verbindingslijn valt in de richting van het eerste element naar het tweede.

De assen der beide eerste koppels vallen dus samen met de normalen die in § 15 gediend hebben om den hoek η te bepalen.

Krachtwerking van een willekeurig element op een element samenvallende mit de X-as en geplaatst in den oorsprong.

Krachten.

19. Wij beschouwen het tweede element, welks plaatsing wij door de coördinaten x_2, y_2 en z_2 bepalen, als een gedeelte van een rechte of kromme lijn. Men heeft dan *

$$\cos\theta_1 = \frac{x_2}{r}, \qquad \cos\theta_2 = -\frac{\delta r}{\delta s_2}, \qquad \cos\varepsilon = \frac{d x_2}{d s_2}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

Men heeft dus te doen met de drie krachten:

$$R = -(B - G - E + C) \,.\, \frac{x_2}{r} \,.\, \frac{\delta r}{\delta s_2} + C \frac{d x_2}{d s_2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

$$S_1 = -E \,.\, \frac{\delta r}{\delta s_2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

$$S_2 = -G \,.\, \frac{x_2}{r}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

* Zie bijv. MAXWELL's *Treatise*, T. II. § 512.

die op het thans ingevoerde assen-stelsel aanleiding geven tot de ontbondenen:

$$X = R \cdot \frac{x_2}{r} + S_1 + S_2 \cdot \frac{d x_2}{d s_2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

$$Y = S_2 \frac{d y_2}{d s_2} + R \cdot \frac{y_2}{r}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

$$Z = S_2 \frac{d z_2}{d s_2} + R \cdot \frac{z_2}{r}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

waarbij wij ons nog overal den factor (14) gesupprimeerd denken, zoodat inderdaad op het eerste element werkzaam zijn de krachten:

$$X\, \iota_1\, \iota_2\, d s_1\, d s_2, \qquad Y\, \iota_1\, \iota_2\, d s_1\, d s_2, \qquad Z\, \iota_1\, \iota_2\, d s_1\, d s_2. \quad \ldots\ldots \quad (35)$$

20. Door substitutie van (29), (30) en (31) in de vergelijkingen (32), (33) en (34) vindt men:

$$X = -(B - G - E + C) \cdot \frac{x_2^2}{r^2} \cdot \frac{\delta r}{\delta s_2} + C \cdot \frac{x_2}{r} \cdot \frac{d x_2}{d s_2} - E \frac{\delta r}{\delta s_2} - G \cdot \frac{x_2}{r} \cdot \frac{d x_2}{d s_2}, \quad \ldots \quad (36)$$

$$Y = -(B - G - E + C) \frac{x_2 y_2}{r^2} \cdot \frac{\delta r}{\delta s_2} + C \cdot \frac{y_2}{r} \cdot \frac{d x_2}{d s_2} - G \cdot \frac{x_2}{r} \cdot \frac{d y_2}{d s_2}, \quad \ldots\ldots \quad (37)$$

$$Z = -(B - G - E + C) \frac{x_2 z_2}{r^2} \cdot \frac{\delta r}{\delta s_2} + C \cdot \frac{z_2}{r} \cdot \frac{d x_2}{d s_2} - G \cdot \frac{x_2}{r} \cdot \frac{d z_2}{d s_2}. \quad \ldots\ldots \quad (38)$$

Ter bekorting van deze formules voeren wij in de functie:

$$P = \int_r^\infty \frac{B - G - E + C}{r^2}\, d r, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

zoodat:

$$d P = -\frac{B - G - E + C}{r^2} \cdot d r. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

Men mag dan schrijven:

$$X = x_2^2 \frac{\delta P}{\delta s_2} + \frac{C-G}{r} \cdot x_2 \cdot \frac{d x_2}{d s_2} - E \frac{\delta r}{\delta s_2}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

$$Y = x_2 y_2 \cdot \frac{\delta P}{\delta s_2} + \frac{C}{r} \cdot y_2 \cdot \frac{d x_2}{d s_2} - \frac{G}{r} \cdot x_2 \cdot \frac{d y_2}{d s_2}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

$$Z = x_2 z_2 \cdot \frac{\delta P}{\delta s_2} + \frac{C}{r} \cdot z_2 \cdot \frac{d x_2}{d s_2} - \frac{G}{r} \cdot x_2 \cdot \frac{d z_2}{d s_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

Koppels:

21. Alvorens over te kunnen gaan tot de berekening der koppels (X), (Y) en (Z) behoort men de hoeken te kennen die de assen der koppels (M_1) en (M_2) met de coördinaten-assen maken. Dit geeft aanleiding tot het volgende vraagstuk:

Gegeven de hoeken α_1, β_1, γ_1 en α_2, β_2, γ_2 die twee lijnen met de coördinaten assen maken (hier: verbindingslijn en eerste of tweede element) zoo wordt gevraagd naar de hoeken φ, ψ en χ van hun gemeenschappelijke normaal met de assen. Die normaal worde zoo genomen dat van een zijner punten de draaijing $\delta < 180^0$ van de eerste lijn naar de tweede positief gezien wordt.

Wij plaatsen de lijnen in den oorsprong en zetten op die lijnen twee stukken $O A_1$ en $O A_2$ gelijk aan de eenheid uit. Projecteeren zich nu op het $Y O Z$ vlak de punten A_1 en A_2 in de punten a_1 en a_2, dan is:

$$\cos \varphi = \frac{\Delta\, O\, a_1\, a_2}{\Delta\, O\, A_1\, A_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

daarbij moet de inhoud van $\Delta\, O\, a_1\, a_2$ positief genomen worden zoolang de volgorde O, a_1, a_2, O enz. van de X-as uitgezien positief is, terwijl steeds:

$$\Delta\, O\, A_1\, A_2 = \tfrac{1}{2} \sin \delta.$$

Nu zijn echter de coördinaten van a_1 en a_2 in het $Y O Z$-vlak bekend, namelijk:

van a_1: $\cos \beta_1$, $\cos \gamma_1$; van a_2: $\cos \beta_2$, $\cos \gamma_2$

en daaruit blijkt dat, met inachtneming van het teeken:

$$\Delta\, O\, a_1\, a_2 = \tfrac{1}{2} \left\{ \cos \beta_1 \cdot \cos \gamma_2 - \cos \beta_2 \cdot \cos \gamma_1 \right\},$$

derhalve volgt uit (44):

$$\cos\varphi = \frac{\cos\beta_1 \cos\gamma_2 - \cos\beta_2 \cos\gamma_1}{\sin\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

en verder door letterverwisseling:

$$\cos\psi = \frac{\cos\gamma_1 . \cos\alpha_2 - \cos\gamma_2 . \cos\alpha_1}{\sin\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

$$\cos\chi = \frac{\cos\alpha_1 \cos\beta_2 - \cos\alpha_2 . \cos\beta_1}{\sin\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

22. Ten einde nu te verkrijgen de hoeken van de koppelas van (M_1) met de coördinaten assen, moet men substitueeren:

$$\left.\begin{array}{lll} \cos\alpha_1 = \frac{x_2}{r} & & \cos\alpha_2 = 1 \\ \cos\beta_1 = \frac{y_2}{r} & \delta = \theta_1 & \cos\beta_2 = 0 \\ \cos\gamma_1 = \frac{z_2}{r} & & \cos\gamma_2 = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

en de cosinussen dier hoeken zijn dus:

$$0; \quad \frac{z_2}{r \sin\theta_1}; \quad -\frac{y_2}{r \sin\theta_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (49)$$

De ontbondenen van het koppel worden derhalve (zie (25)):

$$0; \quad \frac{(F)}{r} z_2 \cos\theta_2; \quad -\frac{(F)}{r} y_2 \cos\theta_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

of bij toepassing van (28):

$$0; \quad -\frac{(F)}{r} . z_2 . \frac{\delta r}{\delta s_2}; \quad \frac{(F)}{r} . y_2 . \frac{\delta r}{\delta s_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (51)$$

23. Om evenzoo de hoeken van de koppelas van (M_2) te verkrijgen, substitueere men:

$$\left.\begin{array}{lll} \cos\alpha_1 = -\dfrac{x_2}{r} & & \cos\alpha_2 = \dfrac{dx_2}{ds_2} \\ \cos\beta_1 = -\dfrac{y_2}{r} & \delta = \theta_2 & \cos\beta_2 = \dfrac{dy_2}{ds_2} \\ \cos\gamma_1 = -\dfrac{z_2}{r} & & \cos\gamma_2 = \dfrac{dz_2}{ds_2} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (52)$$

Men vindt dan voor de cosinussen dier hoeken:

$$\frac{-\dfrac{y_2}{r}\cdot\dfrac{dz_2}{ds_2}+\dfrac{z_2}{r}\dfrac{dy_2}{ds_2}}{\sin\theta_2}; \quad \frac{-\dfrac{z_2}{r}\cdot\dfrac{dx_2}{ds_2}+\dfrac{x_2}{r}\cdot\dfrac{dz_2}{ds_2}}{\sin\theta_2}; \quad \frac{-\dfrac{x_2}{r}\cdot\dfrac{dy_2}{ds_2}+\dfrac{y_2}{r}\cdot\dfrac{dx_2}{ds_2}}{\sin\theta_2} \quad \ldots (53)$$

en derhalve tevens lettende op (28), voor de ontbondenen van het koppel (M_2):

$$\frac{(H)}{r^2}x_2\left(z_2\frac{dy_2}{ds_2}-y_2\frac{dz_2}{ds_2}\right); \quad \frac{(H)}{r^2}x_2\left(x_2\frac{dz_2}{ds_2}-z_2\frac{dx_2}{ds_2}\right); \quad \frac{(H)}{r^2}x_2\left(y_2\frac{dx_2}{ds_2}-x_2\frac{dy_2}{ds_2}\right) \ldots (54)$$

24. Neemt men thans nog in aanmerking het koppel (L) § 18, dan is ten slotte:

$$(X) = \frac{(H)}{r^2}\cdot x_2\left(z_2\frac{dy_2}{ds_2}-y_2\frac{dz_2}{ds_2}\right)-\frac{(D)}{r}x_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\eta, \ldots (55)$$

$$(Y) = -\frac{(F)}{r}\cdot z_2\cdot\frac{\delta r}{\delta s_2}+\frac{(H)}{r^2}\cdot x_2\left(x_2\frac{dz_2}{ds_2}-z_2\frac{dx_2}{ds_2}\right)-\frac{(D)}{r}y_2\cdot\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\eta, \ldots (56)$$

$$(Z) = \frac{(F)}{r}\cdot y_2\cdot\frac{\delta r}{\delta s_2}+\frac{(H)}{r^2}\cdot x_2\left(y_2\frac{dx_2}{ds_2}-x_2\frac{dy_2}{ds_2}\right)-\frac{(D)}{r}z_2\sin\theta_1\sin\theta_2\cdot\sin\eta, \ldots (57)$$

waarbij men weer in het oog moet houden dat de factor:

$$\iota_1\,\iota_2\,ds_1\,ds_2$$

overal is gesupprimeerd.

25. In de verkregen vergelijkingen behoort nog de vorm:

$$\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\eta$$

in de coördinaten van het tweede element te worden uitgedrukt.

Ten einde daartoe te geraken trekken wij in den oorsprong drie lijnen, OA, OB en OC, respectievelijk evenwijdig aan de verbindingslijn gerekend van het eerste element naar het tweede, aan het eerste element, dus samenvallende met de X-as, en aan het tweede element. Ieder van deze lijnen maken wij gelijk aan de eenheid. Trekken wij nu nog de zijden van driehoek ABC dan ontstaat een tetraëder:

$$O,\ ABC$$

Het volume van dit tetraëder nu is gelijk aan:

$$\frac{1}{6} \sin\theta_1 \sin\theta_2 \,.\, \sin\eta$$

mits men namelijk dit volume als positief of negatief beschouwe naar gelang van O uit de zin van de draaijing $ABCA\ldots$ positief of negatief gezien worde. Immers de inhoud van driehoek AOB is in absolute waarde steeds gelijk aan $\frac{1}{2} \sin\theta_1$ en beschouwt men als positief die zijde van de normaal op het vlak AOB, die tot positieve tetraëders aanleiding geeft, dan wordt de loodlijn uit C op AOB neergelaten en in grootte en in teeken voorgesteld door:

$$\sin\theta_2 \,.\, \sin\eta.$$

Men heeft dus:

$$\text{Tetr. } O,\ ABC = \frac{1}{6} \sin\theta_1 \,.\, \sin\theta_2 \,.\, \sin\eta. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (58)$$

26. Het volume van zulk een tetraëder kan echter ook in de coördinaten zijner hoekpunten worden uitgedrukt. Laten x'_1, y'_1, z'_1; x'_2, y'_2, z'_2; x'_3, y'_3, z'_3 de coördinaten voorstellen van A, B en C, terwijl O geplaatst zij in den oorsprong, dan wordt, indien aan het negatieve of positieve teeken van het volume de zoo even uiteengezette beteekenis wordt gehecht, het volume steeds voorgesteld door:

$$\text{Tetr. } O, ABC = \frac{1}{6}\left[x'_1(z'_2y'_3 - z'_3y'_2) + y'_1(x'_2z'_3 - x'_3z'_2) + z'_1(y'_2x'_3 - y'_3x'_2)\right] \ldots \quad (59)$$

derhalve is:

$$\sin\theta_1 \,.\, \sin\theta_2 \,.\, \sin\eta = x'_1(z'_2y'_3 - z'_3y'_2) + y'_1(x'_2z'_3 - x'_3z'_2) + z'_1(y'_2x'_3 - y'_3x'_2)$$

waarin nu gesubstitueerd moet worden:

$$\left.\begin{array}{lll} x'_1 = \frac{x_2}{r} & x'_2 = 1 & x'_3 = \frac{dx_2}{ds_2} \\ y'_1 = \frac{y_2}{r} & y'_2 = 0 & y'_3 = \frac{dy_2}{ds_2} \\ z'_1 = \frac{z_2}{r} & z'_2 = 0 & z'_3 = \frac{dz_2}{ds_2} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (60)$$

zoodat derhalve:

$$\sin\theta_1 . \sin\theta_2 . \sin\eta = \frac{y_2}{r} . \frac{dz_2}{ds_2} - \frac{z_2}{r} . \frac{dy_2}{ds_2} . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (61)$$

Substitueeren wij dit in (55), (56) en (57), dan is:

$$(X) = \frac{(D) + (H)}{r^2} x_2 \left(z_2 \frac{dy_2}{ds_2} - y_2 \frac{dz_2}{ds_2} \right), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (62)$$

$$(Y) = -\frac{(F)}{r} z_2 \frac{\delta r}{\delta s_2} + \frac{(H)}{r^2} x_2 \left(x_2 \frac{dz_2}{ds_2} - z_2 \frac{dx_2}{ds_2} \right) + \frac{(D)}{r^2} y_2 \left(z_2 \frac{dy_2}{ds_2} - y_2 \frac{dz_2}{ds_2} \right), \ldots (63)$$

$$(Z) = \frac{(F)}{r} y_2 \frac{\delta r}{\delta s_2} + \frac{(H)}{r^2} x_2 \left(y_2 \frac{dx_2}{ds_2} - x_2 \frac{dy_2}{ds_2} \right) + \frac{(D)}{r^2} z_2 \left(z_2 \frac{dy_2}{ds_2} - y_2 \frac{dz_2}{ds_2} \right) \ldots (64)$$

Krachtwerking op een willekeurig geplaatst element.

27. Uit de formules (41), (42), (43), (62), (63) en (64) zoude het thans gemakkelijk zijn de werking van een willekeurig element op een willekeurig element af te leiden.

Wat vooreerst betreft de werking op een willekeurig gericht element ds_1 in den oorsprong kan men dit element vervangen door zijne drie componenten dx_1, dy_1 en dz_1. De aangehaalde formules geven de werking op dx_1 en door letterverschuiving ook die op dy_1 en dz_1. Deze drie krachtwerkingen behoeft men slechts op te tellen. Wenscht men daarna te kennen de werking op een element ds_1 geplaatst in het punt x_1, y_1, z_1 dan vervange men slechts overal:

x_2 door $x_2 - x_1$
y_2 door $y_2 - y_1$
z_2 door $z_2 - z_1$.

Het is voor ons onderzoek niet noodzakelijk deze formules neer te schrijven.

Krachtwerking van open en gesloten stroomen op een element in den oorsprong, samenvallende met de X-as.

28. Voor de krachtwerking van een open of gesloten stroom op een element dat in den oorsprong met de X-as samenvalt, mag men nu schrijven; voor de ontbondenen der kracht, resp.:

$$\iota_1 \iota_2 \, d s_1 \int_a^b X \, d s_2 ; \quad \iota_1 \iota_2 \, d s_1 \int_a^b Y \, d s_2 ; \quad \iota_1 \iota_2 \, d s_1 \int_a^b Z \, d s_2 \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (65)$$

en voor die van het koppel:

$$\iota_1 \iota_2 \, d s_1 \int_a^b (X) \, d s_2 ; \quad \iota_1 \iota_2 \, d s_1 \int_a^b (Y) \, d s_2 ; \quad \iota_1 \iota_2 \, d s_1 \int_a^b (Z) \, d s_2 , \, . \, . \, . \, . \quad (66)$$

waarbij a en b de eindpunten van den stroom voorstellen, terwijl bij de integraties s_2 de eenig onafhankelijk veranderlijke is.

29. Uit (41) volgt:

$$\int_a^b X \, d s_2 = \int_a^b x_2^2 \, d P + \int_a^b \frac{C - G}{r} x_2 \, d x_2 - \int_a^b E \, d r ,$$

of als men de eerste integraal bij gedeelten integreert:

$$\int_a^b X \, d s_2 = {}_a(P x_2^2)^b - \int_a^b E \, d r + \int_a^b \frac{C - G - 2 P r}{r} x_2 \, d x_2 , \, . \, . \, . \, . \, . \quad (67)$$

evenzoo volgt uit (42):

$$\int_a^b Y \, d s_2 = {}_a(P x_2 y_2)^b + \int_a^b \frac{C - P r}{r} y_2 \, d x_2 - \int_a^b \frac{G + P r}{r} x_2 \, d y_2 , \, . \, . \, . \, . \quad (68)$$

en uit (43):

$$\int_a^b Z \, d s_2 = {}_a(P x_2 z_2)^b + \int_a^b \frac{C - P r}{r} z_2 \, d x_2 - \int_a^b \frac{G + P r}{r} x_2 \, d z_2 \, . \, . \, . \, . \, . \quad (69)$$

Eindelijk volgt uit (62), (63) en (64), als wij stellen:

$$F_1 = \int_r^\infty \frac{(F)}{r}\, dr \text{ dus: } d\,F_1 = -\frac{(F)}{r}\, dr \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (70)$$

$$\int_a^b (X)\, ds_2 = \int_a^b \frac{(D)+(H)}{r^2}\, x_2\, z_2\, dy_2 - \int_a^b \frac{(D)+(H)}{r^2}\, x_2\, y_2\, dz_2 \ldots\ldots\ldots\ldots (71)$$

$$\int_a^b (Y)\, ds_2 = \left(z_2 F_1\right)_a^b - \int_a^b \left(F_1 - \frac{(H)}{r^2} x_2^2 + \frac{(D)}{r^2} y_2^2\right) dz_2 - \int_a^b \frac{(H)}{r^2} x_2 z_2 dx_2 + \int_a^b \frac{(D)}{r^2} y_2 z_2 dy_2 \quad . (72)$$

$$\int_a^b (Z)\, ds_2 = -\left(y_2 F_1\right)_a^b + \int_a^b \left(F_1 - \frac{(H)}{r^2} x_2^2 + \frac{(D)}{r^2} z_2^2\right) dy_2 + \int_a^b \frac{(H}{r^2} x_2 y_2 dx_2 - \int_a^b \frac{(D)}{r^2} y_2 z_2 dz_2 \quad . (73)$$

30. Voor een gesloten stroom ondergaan bovenstaande formules vereenvoudiging. Dan is:

$$\int_a^a X\, ds_2 = \int_a^a \frac{C - G - 2\,Pr}{r}\, x_2\, dx_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (74)$$

$$\int_a^a Y\, ds_2 = \int_a^a \frac{C - Pr}{r}\, y_2\, dx_2 - \int_a^a \frac{G + Pr}{r}\, x_2\, dy_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (75)$$

$$\int_a^a Z\, ds_2 = \int_a^a \frac{C - Pr}{r}\, z_2\, dx_2 - \int_a^a \frac{G + Pr}{r}\, x_2\, dz_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (76)$$

$$\int_a^a (X) ds_2 = \int_a^a \frac{(D)+(H)}{r^2}\, x_2\, z_2\, dy_2 - \int_a^a \frac{(D)+(H)}{r^2}\, x_2\, y_2\, dz_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (77)$$

$$\int_a^a (Y) ds_2 = -\int_a^a \left(F_1 - \frac{(H)}{r^2} x_2^2 + \frac{(D)}{r^2} y_2^2\right) dz_2 - \int_a^a \frac{(H)}{r^2} x_2\, z_2\, dx_2 + \int_a^a \frac{(D)}{r^2} y_2\, z_2\, dy_2 \ldots (78)$$

$$\int_a^a (Z) ds_2 = \int_a^a \left(F_1 - \frac{(H)}{r^2} x_2^2 + \frac{(D)}{r^2} z_2^2\right) dy_2 + \int_a^a \frac{(H)}{r^2} x_2\, y_2\, dx_2 - \int_a^a \frac{(D)}{r^2} y_2\, z_2\, dz_2 \ldots (79)$$

31. Hiermede is dus de berekening van de werking van een gesloten stroom

op een stroomelement teruggebracht tot een gesloten lijn-integraal. Reeds AMPÈRE heeft zulke lijn-integralen tot vlakte-integralen teruggevoerd. Men behoeft daartoe slechts door den gesloten stroom een willekeurig oppervlak te brengen waarvan die stroom den rand vormt. Trekt men op dit oppervlak twee stelsels van kromme lijnen, die hetzelve in vakjes verdeelen en voert men om ieder dier vakjes heen een stroom van gelijke sterkte en gelijken zin als de hoofdstroom dan heffen die stroomen elkaar overal op behalve aan den rand, zoodat al die kleine stroompjes te zamen gelijk staan met de ééne hoofdstroom, wier werking derhalve, indien men de werking van een oneindig klein gesloten stroompje ω kent, door vlakte-integralen kan gevonden worden. Wij beschouwen daarom thans de krachtwerkingen van zulk een stroompje ω.

32. Daartoe roepen wij te hulp eene stelling, bewezen door C. NEUMANN *, die wij voor onze notaties en ons coördinatenstelsel hebben geschikt gemaakt.

Laat:

$$\int U\,dx + V\,dy + W\,dz$$

voorstellen een integraal genomen langs den omtrek van een oneindig kleine gesloten lijn die een vlakken inhoud ω omsluit; laten daarbij U, V en W functiën zijn uitsluitend van x, y en z; laten verder ω_x, ω_y en ω_z de projecties van ω voorstellen op de coördinatenvlakken $Z\,O\,Y$, $X\,O\,Z$ en $Y\,O\,X$, dan is:

$$\int U\,dx + V\,dy + W\,dz = \omega_x\left(\frac{\delta W}{\delta y} - \frac{\delta V}{\delta z}\right) + \omega_y\left(\frac{\delta U}{\delta z} - \frac{\delta W}{\delta x}\right) + \omega_z\left(\frac{\delta V}{\delta z} - \frac{\delta U}{\delta y}\right) \quad . \; . \; (80)$$

waarbij het teeken van ω_x, ω_y en ω_z positief of negatief genomen moet worden naar gelang de zin der integratie, die natuurlijk ook in de projecties van ω ondubbelzinnig blijft, uit punten resp. op het positieve gedeelte van de X, Y, Z-as positief (d. i. met de wijzers van het uurwerk mede) of negatief wordt gezien.

33. Ten einde deze formule nog beter voor ons doel geschikt te maken stellen wij dat U, V en W functies zijn van x_2, y_2, z_2 en r, waarin:

$$r^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (81)$$

dus:

$$\frac{\delta r}{\delta x_2} = \frac{x_2}{r}; \quad \frac{\delta r}{\delta y_2} = \frac{y_2}{r}; \quad \frac{\delta r}{\delta z_2} = \frac{z_2}{r} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (82)$$

* *Die elektrischen Kräfte*, Leipzig, TEUBNER, 1873. pag. 88.

Dan is bijv.:

$$\frac{\delta W}{\delta y_2} = \frac{\delta W}{\delta r} \cdot \frac{\delta r}{\delta y_2} + \frac{\delta W}{\delta y_2} = \frac{\delta W}{\delta r} \cdot \frac{y_2}{r} + \frac{\delta W}{\delta y_2}$$

en de formule gaat over in:

$$\int U\,dx_2 + V\,dy_2 + W\,dz_2 = \omega_x \cdot \left(\frac{\delta W}{\delta r} \cdot \frac{y_2}{r} - \frac{\delta V}{\delta r} \cdot \frac{z_2}{r}\right) + \omega_y \left(\frac{\delta U}{\delta r} \cdot \frac{z_2}{r} - \frac{\delta W}{\delta r} \cdot \frac{x_2}{r}\right) +$$
$$+ \omega_z \left(\frac{\delta V}{\delta r} \cdot \frac{x_2}{r} - \frac{\delta U}{\delta r} \cdot \frac{y_2}{r}\right) + \omega_x \left(\frac{\delta W}{\delta y_2} - \frac{\delta V}{\delta z_2}\right) + \omega_y \left(\frac{\delta U}{\delta z_2} - \frac{\delta W}{\delta x_2}\right) + \omega_z \left(\frac{\delta V}{\delta x_2} - \frac{\delta U}{\delta y_2}\right) \ldots \quad (83)$$

34. Passen wij deze formule thans toe op de betrekkingen (74)—(79) dan vinden wij voor de krachtwerking van een elementair (oneindig klein) gesloten stroompje:

$$\int_a^a X\,ds_2 = \frac{1}{r} \cdot \frac{d \cdot \frac{C - G - 2Pr}{r}}{dr}\, x_2 (z_2 \omega_y - y_2 \omega_z), \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (84)$$

$$\int_a^a Y\,ds_2 = \frac{1}{r} \cdot \frac{d \cdot \frac{C - Pr}{r}}{dr}\, y_2 (z_2 \omega_y - y_2 \omega_z) - \frac{1}{r} \cdot \frac{d \cdot \frac{G + Pr}{r}}{dr}\, x_2 (x_2 \omega_z - z_2 \omega_x) - \frac{C + G}{r} \cdot \omega_z, \ldots \quad (85)$$

$$\int_a^a Z\,ds_2 = -\frac{1}{r} \cdot \frac{d \cdot \frac{C - Pr}{r}}{dr}\, z_2 (y_2 \omega_x - z_2 \omega_y) + \frac{1}{r} \cdot \frac{d \cdot \frac{G + Pr}{r}}{dr}\, x_2 (x_2 \omega_y - y_2 \omega_x) + \frac{C + G}{r} \cdot \omega_y, \ldots \quad (86)$$

$$\int_a^a (X)\,ds_2 = \frac{1}{r} \cdot \frac{d \cdot \frac{(D) + (H)}{r^2}}{dr}\, x_2 [z_2 (x_2 \omega_z - z_2 \omega_x) - y_2 (y_2 \omega_x - x_2 \omega_y)] + \frac{(D) + (H)}{r^2} (z_2 \omega_x + y_2 \omega_y - 2 x_2 \omega_x), \ldots \quad (87)$$

$$\int_a^a (Y) ds_2 = -\frac{1}{r} \cdot \frac{d F_1}{dr} (y_2 \omega_x - x_2 \omega_y) + \frac{1}{r} \cdot \frac{d \cdot \frac{(H)}{r^2}}{dr}\, x_2 (x_2 y_2 \omega_x - x_2^2 \omega_y - z_2^2 \omega_y + y_2 z_2 \omega_z) +$$
$$+ \frac{1}{r} \cdot \frac{d \cdot \frac{(D)}{r^2}}{dr}\, y_2 (x_2 y_2 \omega_y - y_2^2 \omega_x - z_2^2 \omega_x + x_2 z_2 \omega_z) - \frac{3(H)}{r^2} x_2 \omega_y - \frac{3(D)}{r^2} y_2 \omega_x, \ldots \quad (88)$$

$$\int_a^a (Z) ds_2 = -\frac{1}{r} \cdot \frac{d F_1}{d r} (z_2 \omega_x - x_2 \omega_z) + \frac{1}{r} \cdot \frac{d \frac{(H)}{r^2}}{d r} x_2 (x_2 z_2 \omega_x - x_2^2 \omega_z - y_2^2 \omega_z + y_2 z_2 \omega_y) +$$

$$+ \frac{1}{r} \cdot \frac{d \cdot \frac{(D)}{r^2}}{d r} z_2 (x_2 z_2 \omega_z - z_2^2 \omega_x - y_2^2 \omega_x + x_2 y_2 \omega_y) - \frac{3 (H)}{r^2} x_2 \omega_z - \frac{3 (D)}{r^2} z_2 \omega_x \ldots \quad (89)$$

Krachtwerking van een elementair gesloten stroompje ω_x geplaatst in den oorsprong op een willekeurig element ds_1.

35. De formules (84)—(89) wijzen aan na vermenigvuldiging met $\iota_1 \iota_2 ds_1$ de krachtwerking van een elementair stroompje ω geplaatst in 't punt x_2, y_2, z_2, op een element gelijkgericht met de X-as en geplaatst in den oorsprong. Verplaatst men nu den oorsprong naar het elementair stroompje dan zullen de nieuwe coördinaten van het element geworden zijn:

$$x_1 = - x_2 ; \quad y_1 = - y_2 ; \quad z_1 = - z_2 \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (90)$$

Wenscht men derhalve te kennen de krachtwerking van een elementair stroompje ω geplaatst in den oorsprong, op een element geplaatst in het punt x_1, y_1, z_1, dan moet men in de formules (84)—(89) substitueeren:

$$x_2 = - x_1 ; \quad y_2 = - y_1 ; \quad z_2 = - z_1 \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (91)$$

en daaruit kan men dan door letterverschuiving de krachtwerkingen van ω op elementen vinden die met de Y- en Z-as evenwijdig loopen.

Dewijl nu een element ds_1 mag vervangen worden door zijn drie componenten dx_1, dy_1 en dz_1 zoo kan men, dewijl nu de krachtwerkingen op de componenten bekend zijn, door sommatie die op ds_1 vinden.

Met weglating thans van den factor $\iota_1 \iota_2$ vindt men:

$$d s_1 \int_a^a X d s_2 = \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d \cdot \frac{C - G - 2 P r}{r}}{d r} x_1 (z_1 \omega_y - y_1 \omega_z) \right] d x_1 + \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d \frac{C - P r}{r}}{d r} x_1 (z_1 \omega_z - x_1 \omega_z) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r} \cdot \frac{d \cdot \frac{G + P r}{r}}{d r} y_1 (y_1 \omega_z - z_1 \omega_y) + \frac{C + G}{r} \omega_z \right] d y_1 + \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d \cdot \frac{C - P r}{r}}{d r} x_1 (y_1 \omega_x - x_1 \omega_y) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{r} \cdot \frac{d \cdot \frac{G + P r}{r}}{d r} z_1 (z_1 \omega_y - y_1 \omega_z) - \frac{C + G}{r} \omega_y \right] d z_1, \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (92)$$

waaruit thans: $ds_1 \int_a^a Y\, ds_2$ en $ds_1 \int_a^a Z\, ds_2$ wederom door letterverschuiving kunnen afgeleid worden.

Op gelijke wijze vindt men:

$$
\begin{aligned}
ds_1 \int_a^a (X)\, ds_2 = \Bigg[& -\frac{1}{r} \cdot \frac{d \cdot \frac{(D)+(H)}{r^2}}{dr} x_1 \{ z_1 (x_1 \omega_z - z_1 \omega_x) - y_1 (y_1 \omega_x - x_1 \omega_y) \} - \\
& - \frac{(D)+(H)}{r^2} (z_1 \omega_z + y_1 \omega_y - 2 x_1 \omega_x) \Bigg] dx_1 + \Bigg[\frac{1}{r} \cdot \frac{d F_1}{dr} (x_1 \omega_y - y_1 \omega_x) - \\
& - \frac{1}{r} \cdot \frac{d \cdot \frac{(H)}{r^2}}{dr} y_1 (y_1 x_1 \omega_y - y_1^2 \omega_x - z_1^2 \omega_x + z_1 x_1 \omega_z) - \frac{1}{r} \cdot \frac{d \cdot \frac{(D)}{r^2}}{dr} x_1 (y_1 x_1 \omega_x - x_1^2 \omega_y - \\
& - z_1^2 \omega_y + y_1 z_1 \omega_z) + \frac{3(H)}{r^2} y_1 \omega_x + \frac{3(D)}{r^2} x_1 \omega_y \Bigg] dy_1 + \Bigg[\frac{1}{r} \cdot \frac{d F_1}{dr} (x_1 \omega_z - z_1 \omega_x) - \\
& - \frac{1}{r} \cdot \frac{d \cdot \frac{(H)}{r^2}}{dr} z_1 (z_1 x_1 \omega_z - z_1^2 \omega_x - y_1^2 \omega_x + y_1 x_1 \omega_y) - \frac{1}{r} \cdot \frac{d \cdot \frac{(D)}{r^2}}{dr} x_1 (z_1 x_1 \omega_x - \\
& - x_1^2 \omega_z - y_1^2 \omega_z + y_1 z_1 \omega_y) + \frac{3(H)}{r^2} z_1 \omega_x + \frac{3(D)}{r^2} x_1 \omega_z \Bigg] dz_1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (93)
\end{aligned}
$$

waaruit eveneens door letterverschuiving af te leiden zijn:

$$ds_1 \int_a^a (Y)\, ds_2 \text{ en } ds_1 \int_a^a (Z)\, ds_2$$

36. Voor ons doel zal het voldoende zijn te kennen de werking van ω_x op een willekeurig geplaatst element, men mag dan in (92) en (93) benevens in de formules die er door letterverschuiving uit worden afgeleid, stellen:

$$\omega_y = 0, \qquad \omega_z = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (94)$$

Dan is:

$$ds_1 \int_a^a X\, ds_2 = \omega_x \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{d \cdot \frac{C - Pr}{r}}{dr} \cdot x_1 (y_1\, dz_1 - z_1\, dy_1) \ldots\ldots \quad (95)$$

$$ds_1 \int_a^a Y\, ds_2 = \omega_x \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d \frac{G + Pr}{r}}{dr} \cdot x_1 z_1\, dx_1 - \frac{1}{r} \cdot \frac{d. \frac{C - G - 2\,Pr}{r}}{dr}\, y_1 z_1\, dy_1 + \right.$$
$$\left. + \left\{ \frac{1}{r} \cdot \frac{d. \frac{C - Pr}{r}}{dr}\, y_1^2 + \frac{1}{r} \cdot \frac{d. \frac{G + Pr}{r}}{dr}\, z_1^2 + \frac{C + G}{r} \right\} dz_1 \right] \ldots\ldots \quad (96)$$

$$ds_1 \int_a^a Z\, ds_2 = \omega_x \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d. \frac{G + Pr}{r}}{dr}\, x_1 y_1\, dx_1 + \frac{1}{r} \cdot \frac{d. \frac{C - G - 2\,Pr}{r}}{dr}\, y_1 z_1\, dz_1 - \right.$$
$$\left. - \left\{ \frac{1}{r} \cdot \frac{d. \frac{C - Pr}{r}}{dr}\, z_1^2 + \frac{1}{r} \cdot \frac{d. \frac{G + Pr}{r}}{dr}\, y_1^2 + \frac{C + G}{r} \right\} dy_1 \right] \ldots\ldots \quad (97)$$

$$ds_1 \int_a^a (X) ds_2 = \omega_x \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d. \frac{(D) + (H)}{r^2}}{dr} \cdot x_1 (y_1^2 + z_1^2)\, dx_1 + \frac{(D) + (H)}{r^2} \cdot 2\, x_1\, dx_1 + \right.$$
$$+ \left\{ -\frac{1}{r} \cdot \frac{d\, F_1}{dr} \cdot y_1 + \frac{1}{r} \cdot \frac{d. \frac{(H)}{r^2}}{dr}\, y_1 (y_1^2 + z_1^2) - \frac{1}{r} \cdot \frac{d \frac{(D)}{r^2}}{dr}\, y_1 x_1^2 + \frac{3\,(H)}{r^2}\, y_1 \right\} dy_1 +$$
$$\left. + \left\{ -\frac{1}{r} \cdot \frac{d\, F_1}{dr}\, z_1 + \frac{1}{r} \cdot \frac{d. \frac{(H)}{r^2}}{dr}\, z_1 (y_1^2 + z_1^2) - \frac{1}{r} \cdot \frac{d. \frac{(D)}{r^2}}{dr}\, z_1 x_1^2 + \frac{3\,(H)}{r^2}\, z_1 \right\} dz_1 \right] . \quad (98)$$

$$ds_1 \int_a^a (Y) ds_2 = \omega_x \left[\left\{ \frac{1}{r} \cdot \frac{d\, F_1}{dr}\, y_1 - \frac{1}{r} \frac{d. \frac{(H)}{r^2}}{dr}\, y_1 x_1^2 + \frac{1}{r} \frac{d. \frac{(D)}{r^2}}{dr}\, y_1 (y_1^2 + z_1^2) + \frac{3\,(D)}{r^2}\, y_1 \right\} dx_1 + \right.$$
$$\left. + \left\{ -\frac{1}{r} \frac{d. \frac{(D) + (H)}{r^2}}{dr}\, y_1^2 x_1 - \frac{(D) + (H)}{r^2}\, x_1 \right\} dy_1 - \frac{1}{r} \frac{d. \frac{(D) + (H)}{r^2}}{dr}\, x_1 y_1 z_1\, dz_1 \right] \ldots \quad (99)$$

$$ds_1 \int_a^a (Z)\, ds_2 = \omega_x \left[\left\{ \frac{1}{r} \cdot \frac{d F_1}{d r} z_1 - \frac{1}{r} \frac{d \frac{(H)}{r^2}}{d r} z_1 x_1^2 + \frac{1}{r} \frac{d \frac{(D)}{r^2}}{d r} z_1 (y_1^2 + z_1^2) + \frac{3\,(D)}{r^2} z_1 \right\} dx_1 + \right.$$

$$\left. + \left\{ -\frac{1}{r} \cdot \frac{d \frac{(D) + (H)}{r^2}}{d r} z_1^2 x_1 - \frac{(D) + (H)}{r^2} x_1 \right\} dz_1 - \frac{1}{r} \frac{d \frac{(D) + (H)}{r^2}}{d r} x_1 y_1 z_1 dy_1 \right] \quad \ldots (100)$$

Krachtwerking van een elementair gesloten stroompje ω_x geplaatst in den oorsprong op een willekeurige, gesloten stroom.

37. Het is duidelijk dat de krachtwerkingen van een elementair gesloten stroompje ω_x, geplaatst in den oorsprong, op een gegeven gesloten stroom door integratie uit (95)—(100) zullen kunnen worden afgeleid.

Voor de krachten zal men vinden langs de X-as:

$$\iota_1 \iota_2 \int_{a'}^{a'} d s_1 \int_a^a X\, d s_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (101)$$

langs de Y-as:

$$\iota_1 \iota_2 \int_{a'}^{a'} d s_1 \int_a^a Y\, d s_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (102)$$

langs de Z-as:

$$\iota_1 \iota_2 \int_{a'}^{a'} d s_1 \int_a^a Z\, d s_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (103)$$

Ter berekening van de koppels zal men — behalve op de koppels (98)—(100) — nog moeten letten op die welke door de verplaatsing der krachten naar een gemeenschappelijk punt ontstaan. Kiezen wij daartoe den oorsprong dan vindt men voor de koppels:

langs de X-as:

$$\iota_1 \iota_2 \int_{a'}^{a'} d s_1 \int_a^a (X)\, d s_2 - \iota_1 \iota_2 \int_{a'}^{a'} z_1\, d s_1 \int_a^a Y\, d s_2 + \iota_1 \iota_2 \int_{a'}^{a'} y_1\, d s_1 \int_a^a Z\, d s_2 \ldots (104)$$

langs de Y-as:

$$\iota_1 \iota_2 \int_{a'}^{a'} d s_1 \int_a^a (Y)\, d s_2 - \iota_1 \iota_2 \int_{a'}^{a'} x_1\, d s_1 \int_a^a Z\, d s_2 + \iota_1 \iota_2 \int_{a'}^{a'} z_1\, d s_1 \int_a^a X\, d s_2 \ldots (105)$$

langs de Z-as:

$$\iota_1 \iota_2 \int_{a'}^{a'} d s_1 \int_{a}^{a} (Z)\, d s_2 - \iota_1 \iota_2 \int_{a'}^{a'} y_1\, d s_1 \int_{a}^{a} X d s_2 + \iota_1 \iota_2 \int_{a'}^{a'} x_1\, d s_1 \int_{a}^{a} Y d s_2 \,.\,. \quad (106)$$

Voorwaarden van overeenstemming met de theorie van AMPÈRE *voor gesloten stroomen.*

38. In de inleiding hebben wij er op gewezen dat van gesloten stroomen de krachtwerking bekend mag beschouwd worden en volkomen overeenstemt met de theorie van AMPÈRE. De algemeene theorie die wij hier ontwikkeld hebben, zal dus voor gesloten stroomen dezelfde krachtwerkingen moeten opleveren als de theorie van AMPÈRE die aan de onbepaalde functiën:

$$B,\ C,\ (D),\ E,\ (F),\ G,\ (H)$$

de bepaalde waarden geeft: (zie de behandeling der fundamentaalgevallen):

$$B = \frac{A^2}{r^2},\ C = \frac{2 A^2}{r^2},\ (D) = 0,\ E = 0,\ (F) = 0,\ G = 0,\ (H) = 0. \ . \ . \ . \quad (107)$$

De werking van gesloten stroomen kan echter (zie § 31) teruggebracht worden tot de som van krachtwerkingen tusschen elementaire gesloten stroompjes. Wij behoeven dus slechts zorg te dragen dat de krachtwerking tusschen twee zulke stroompjes ω en ω' willekeurig ten opzichte van elkander geplaatst, overeenstemme met de theorie van AMPÈRE. Dat men *één* dezer stroompjes in het vlak der $X\,O\,Z$ in den oorsprong plaatste is geene beperking der algemeenheid. De voorwaarde dat de algemeene theorie voor gesloten stroomen uitkomsten geven moet overeenkomende met die van AMPÈRE, komt dan daarop neder dat van de krachtwerking van ω_x op ω' de krachten (101), (102) en (103) en de koppels (104), (105) en (106) overeenkomstig zijn met de krachten en koppels die door de substitutie (107) ontstaan.

Eerste voorwaarde.

39. Ten einde zoo spoedig mogelijk tot eene eerste voorwaarde van overeenstemming te geraken, berekenen wij de krachtwerking (10) tusschen ω_x en ω_x, waarbij wij dus ω'_y en ω'_z buiten rekening laten. Men heeft:

$$\int_{a'}^{a'} d s_1 \int_{a}^{a} X d s_2 = \omega_x \left[\int_{a'}^{a'} \frac{1}{r} \cdot \frac{d \cdot \frac{C - P r}{r}}{d r}\, x_1 (y_1\, d z_1 - z_1\, d y_1) \right] \,.\,.\,.\,.\,. \quad (108)$$

derhalve, onder toepassing van (83):

$$\int_{a'}^{a'} ds_1 \int_a^a X\, ds_2 = \omega_x \cdot \omega'_x \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{d \frac{C-Pr}{r}}{dr}}{dr} x_1 (y_1^2 + z_1^2) + \frac{2}{r} \cdot \frac{d \cdot \frac{C-Pr}{r}}{dr} x_1 \right] \ldots (109)$$

Deze uitdrukking moet voor iedere waarde van x_1, y_1 en z_1 in overeenstemming zijn met de theorie van AMPÈRE. Derhalve is noodig en voldoende dat:

$$\frac{d \cdot \frac{C-Pr}{r}}{dr}$$

met die theorie overeenstemme, derhalve blijkens (107):

$$\frac{d \cdot \frac{C-Pr}{r}}{dr} = \frac{d \cdot \frac{A^2}{r^3}}{dr} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (110)$$

immers blijkens (39) en (107) is in de theorie van AMPÈRE:

$$P = \int_r^\infty \frac{3 A^2}{r^4} dr = \frac{A^2}{r^3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (111)$$

Voeren wij nog in de uiterst waarschijnlijke hypothese (zie § 52) dat op oneindigen afstand alle krachtwerkingen verdwijnen, dan volgt uit (110):

$$C - Pr = \frac{A^2}{r^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

waarmede eene eerste betrekking tusschen de onbepaalde functiën gevonden is.

40. Deze eerste betrekking blijkt voldoende te zijn om de krachten (101), (102) en (103) in overeenstemming te brengen met de theorie van AMPÈRE. Om dit te bewijzen beginnen wij in de uitdrukkingen (95), (96) en (97) met behulp van (I) de functie C te elimineeren. Men vindt dan:

$$ds_1 \int_a^a X\, ds_2 = -\omega_x \cdot \frac{3 A^2}{r^5} x_1 (y_1\, dz_1 - z_1\, dy_1) \ldots\ldots\ldots (112)$$

Verder is:

$$ds_1\int_a^a Y ds_2=\omega_x\left[\frac{3A^2}{r^5}y_1(z_1dy_1-y_1dz_1)+\frac{A^2}{r^3}dz_1+\frac{1}{r}\cdot\frac{d.\frac{G+Pr}{r}}{dr}z_1(x_1dx_1+y_1dy_1+z_1dz_1)+\frac{G+Pr}{r}dz_1\right]..(113)$$

Substitueert men in deze formule:

$$x_1\,dx_1+y_1\,dy_1+z_1\,dz_1=r\,dr,\ldots\ldots\ldots\ldots(114)$$

dan is eindelijk:

$$ds_1\int_a^a Y\,ds_2=\omega_x\left[\frac{3A^2}{r^5}y_1(z_1\,dy_1-y_1\,dz_1)+\frac{A^2}{r^3}dz_1+d.\frac{G+Pr}{r}.z_1\right]..(115)$$

Evenzoo vindt men:

$$ds_1\int_a^a Z\,ds_2=\omega_x\left[-\frac{3A^2}{r^5}z_1(y_1\,dz_1-z_1\,dy_1)-\frac{A^2}{r^3}dy_1-d.\frac{G+Pr}{r}.y_1\right].(116)$$

Wordt nu ten tweede male gesloten geintegreerd, dan valt $G+Pr$ overal weg, daar het alleen in totale differentialen voorkomt, en de uitdrukkingen voor de krachten (101), (102) en (103) veranderen door de substitutie (107) niet meer, m. a. w. ze zijn reeds in overeenstemming met de theorie van AMPÈRE.

Tweede voorwaarde.

41. Alvorens tot de berekening van (104) over te gaan, vereenvoudigen wij de waarde der beide laatste integralen. Bij toepassing van (115) en (116) vindt men:

$$\int_{a'}^{a'}y_1ds_1\int_a^a Z\,ds_2-\int_{a'}^{a'}z_1ds_1\int_a^a Y\,ds_2=-\int_{a'}^{a'}\frac{A^2}{r^3}(y_1dy_1+z_1dz_1)+y_1d.\frac{G+Pr}{r}.y_1+z_1d.\frac{G+Pr}{r}z_1..(117)$$

Voert men de beide laatste differentiaties uit en verdrijft men y_1 en z_1 met behulp der betrekkingen:

$$y_1\,dy_1+z_1\,dz_1=r\,dr-x_1\,dx_1,$$
$$y_1^2+z_1^2=r^2-x_1^2,$$

dan houdt men, als men de totale differentialen laat verdwijnen, nog over:

$$\int_{a'}^{a'} y_1\, d s_1 \int_a^a Z\, d s_2 - \int_{a'}^{a'} z_1\, d s_1 \int_a^a Y\, d s_2 = \int_{a'}^{a'} \left(\frac{A^2}{r^3} + \frac{G+Pr}{r}\right) x_1\, d x_1 + \int_{a'}^{a'} x_1^2 . d . \frac{G+Pr}{r} \quad .. (118)$$

of eindelijk door integratie bij gedeelten van de laatste integraal:

$$\int_{a'}^{a'} y_1\, d s_1 \int_a^a Z\, d s_2 - \int_{a'}^{a'} z_1\, d s_1 \int_a^a Y\, d s_2 = \int_{a'}^{a'} \left(\frac{A^2}{r^3} - \frac{G+Pr}{r}\right) x_1\, d x_1 \quad .... (119)$$

42. Substitueert men in (98) de formule (70) dus:

$$\frac{d F_1}{d r} = -\frac{(F)}{r} \quad ..... (70)$$

en vervangt men tevens overal $y_1^2 + z_1^2$ door $r_1^2 - x_1^2$, dan is:

$$\int_{a'}^{a'} d s_1 \int_a^a (X) d s_2 = \omega_x \Bigg[\int_{a'}^{a'} r . \frac{d \frac{(D)+(D)}{r^2}}{d r} x_1 d x_1 - \int_{a'}^{a'} \frac{1}{r} . \frac{d . \frac{(D)+(H)}{r^2}}{d r} x_1^3 d x_1 + \int_{a'}^{a'} 2 \frac{(D)+(H)}{r^2} x_1 d x_1 +$$
$$+ \int_{a'}^{a'} \left(\frac{(F)}{r^2} + r \frac{d . \frac{(H)}{r^2}}{d r} + \frac{3 (H)}{r^2} \right) (y_1 d y_1 + z_1 d z_1) - \int_{a'}^{a'} \frac{1}{r} . \frac{d . \frac{(D)+(H)}{r^2}}{d r} x_1^3 (y_1 d y_1 + z_1 d z_1) \Bigg] . \quad (120)$$

Vervangt men hier weder:

$$y_1\, d y_1 + z_1\, d z_1 \quad \text{door} \quad r\, d r - x_1\, d x_1$$

en laat men de totale differentialen weg, dan is:

$$\int_{a'}^{a'} d s_1 \int_a^a (X)\, d s_2 = \omega_x \Bigg[\int_{a'}^{a'} r . \frac{d . \frac{(D)+(H)}{r^2}}{d r} . x_1 d x_1 - \int_{a'}^{a'} x_1^2 . d . \frac{(D)+(H)}{r^2} + \int_{a'}^{a'} 2 \frac{(D)+(H)}{r^2} x_1 d x_1 +$$
$$- \int_{a'}^{a'} \left(\frac{(F)}{r^2} + r . \frac{d . \frac{(H)}{r^2}}{d r} + \frac{3 (H)}{r^2} \right) x_1\, d x_1 \Bigg] \quad ..... (121)$$

Past men eindelijk integratie bij gedeelten toe op de tweede integraal, dan is na herleiding:

$$\int_{a'}^{a'} ds_1 \int_{a}^{a} (X)\, ds_2 = \omega_x \int_{a'}^{a'} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{d(D)}{dr} + \frac{2(D)}{r^2} + \frac{(H)}{r^2} - \frac{(F)}{r^2}\right) x_1\, dx_1 \ldots \quad (122)$$

Substitueert men thans (122) en (119) in (104), dan blijkt dat het koppel loodrecht op de X-as voor de beide elementaire stroomen ω en ω' wordt aangewezen door:

$$\iota_1 \iota_2 \int_{a'}^{a'} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{d(D)}{dr} + \frac{2(D)}{r^2} + \frac{(H)}{r^2} - \frac{(F)}{r^2} + \frac{A^2}{r^3} - \frac{G + Pr}{r}\right) x_1\, dx_1 \ldots \quad (123)$$

Deze uitdrukking moet nu, daar ze op gesloten stroomen betrekking heeft, in overeenstemming zijn met de theorie van AMPÈRE, d. w. z. ze moet door de substitutie (107) onveranderd blijven. Het is duidelijk dat men door toepassing van (83) en uitgaande van de hypothese, dat alle krachtwerkingen op oneindigen afstand verdwijnen, zonder moeite als voorwaarde van overeenstemming vinden zal:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d(D)}{dr} + \frac{2(D)}{r^2} + \frac{(H)}{r^2} - \frac{(F)}{r^2} + \frac{A^2}{r^3} - \frac{G + Pr}{r} = 0 \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{II})$$

43. Wij zullen thans aantoonen dat deze voorwaarden van zelve ook de beide andere ontbondenen van het koppel (105) en (106) in overeenstemming brengt met de theorie van AMPÈRE. Daartoe beginnen wij weder met de koppels die door verplaatsing der krachten ontstaan. Uit (112) en (116) volgt onmiddellijk:

$$\int_{a'}^{a'} z_1\, ds_1 \int_{a}^{a} X\, ds_2 - \int_{a'}^{a'} x_1\, ds_1 \int_{a}^{a} Z\, ds_2 = \omega_x \left[\int_{a'}^{a'} \frac{A^2}{r^3} x_1\, dy_1 + \int_{a'}^{a'} x_1\, d \cdot \frac{G + Pr}{r} y_1\right] \ldots \quad (124)$$

of door integratie bij gedeelten:

$$\int_{a'}^{a'} z_1\, ds_1 \int_{a}^{a} X\, ds_2 - \int_{a'}^{a'} x_1\, ds_1 \int_{a}^{a} Z\, ds = \omega_x \left[\int_{a'}^{a'} \frac{A^2}{r^3} x_1\, dy_1 - \int_{a'}^{a'} \frac{G + Pr}{r} y_1\, dx_1\right] \ldots \quad (125)$$

44. Uit (99) volgt onmiddellijk:

$$\int_{a'}^{a'} ds_1 \int_{a}^{a} (Y)\, ds_2 = \omega_x \left[\int_{a'}^{a'} \left[-\frac{(F)}{r^2} + r \frac{d.\frac{(D)}{r^2}}{dr} + \frac{3(D)}{r^2} \right] y_1\, dx_1 - \int_{a'}^{a'} \frac{1}{r} \cdot \frac{d.\frac{(D)+(H)}{r^2}}{dr} x_1^2 y_1\, dx_1 - \right.$$

$$\left. - \int_{a'}^{a'} \frac{1}{r} \cdot \frac{d.\frac{(D)+(H)}{r^2}}{dr} y_1^2 x_1\, dy_1 - \int_{a'}^{a'} \frac{(D)+(H)}{r^2} x_1\, dy_1 - \int_{a'}^{a'} \frac{1}{r} \cdot \frac{d.\frac{(D)+(H)}{r^2}}{dr} x_1 y_1 z_1\, dz_1 \right] \ldots (126)$$

of, als wij te zamen nemen de derde, vierde en de laatste integraal en de eerste herleiden:

$$\int_{a'}^{a'} ds_1 \int_{a}^{a} (Y)\, ds_2 = \omega_x \left[\int_{a'}^{a'} \left[-\frac{(F)}{r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d(D)}{dr} + \frac{(D)}{r^2} \right] y_1\, dx_1 - \int_{a'}^{a'} x_1 y_1\, d.\frac{(D)+(H)}{r^2} - \right.$$

$$\left. - \int_{a'}^{a'} \frac{(D)+(H)}{r^2} x_1\, dy_1 \right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (127)$$

of eindelijk als wij de tweede integraal bij gedeelten integreeren:

$$\int_{a}^{a'} ds_1 \int_{a}^{a} (Y)\, ds_2 = \omega_x \int_{a'}^{a'} \left[-\frac{(F)}{r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d(D)}{dr} + \frac{2(D)}{r^2} + \frac{(H)}{r^2} \right] y_1\, dx_1 \ldots (128)$$

Met behulp van (128) en (125) vinden wij dus voor het koppel (105):

$$\iota_1 \iota_2 \omega_x \left[\int_{a'}^{a'} \left[-\frac{(F)}{r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d.(D)}{dr} + \frac{2(D)}{r^2} + \frac{(H)}{r^2} - \frac{G+Pr}{r} \right] y_1\, dx_1 + \int_{a'}^{a'} \frac{A^2}{r^3} x_1\, dy_1 \right] \ldots (129)$$

of, lettende op de voorwaarde (II):

$$\iota_1 \iota_2 \cdot \omega_x \int_{a'}^{a'} \frac{A^2}{r^3} (x_1\, dy_1 - y_1\, dx_1) \ldots\ldots\ldots\ldots (130)$$

45. Op gelijke wijze zoude men vinden voor het koppel (106):

$$\iota_1 \iota_2 \cdot \omega_x \int_{a'}^{a'} \frac{A^2}{r^3} (x_1\, dz_1 - z_1\, dx_1) \ldots\ldots\ldots\ldots (131)$$

Deze koppels veranderen niet door de substitutie (107) en zijn dus van zelve in overeenstemming met de theorie van AMPÈRE. De beide voorwaarden (I) en (II) zijn dus noodig, maar ook voldoende, om de algemeene theorie der ponderomotorische werkingen voor gesloten stroomen in overeenstemming te brengen met de theorie van AMPÈRE.

Werking van een gesloten stroom op een onvolledig stroomelement.

46. Door de proeven van v. ETTINGHAUSEN, in de inleiding aangehaald, weet men met zekerheid dat de resultante der krachten uitgeoefend door een gesloten stroom op een onvolledig stroomelement loodrecht staat op dat element; tevens volgt uit dezelfde proeven de afwezigheid van koppels wier as loodrecht zoude staan op het element; immers ook zulke koppels zouden zich door eene verplaatsing van het bewegelijk gedeelte van den stroom hebben geopenbaard.

Wij weten dus dat voor een onvolledig stroomelement de uitdrukkingen (84), (88) en (89) identisch nul moeten zijn voor alle waarden van x_2, y_2, z_2, ω_x, ω_y en ω_z, Wat betreft (84) wordt daartoe vereischt:

$$\frac{d \cdot \frac{C - G - 2Pr}{r}}{dr} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (132)$$

of, dewijl alle krachtwerkingen op oneindigen afstand ondersteld worden te verdwijnen:

$$C - G - 2Pr = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{III})$$

welke voorwaarde dan vervuld moet zijn voor de werking van onvolledige elementen op elkander en voor de werking van een volledig element op een onvolledig element.

47. Uit de voorwaarde (III) volgt in verband met (I):

$$G + Pr = \frac{A^2}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (133)$$

en ook:

$$C + G = \frac{2A^2}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (134)$$

Substitueert men deze waarden in (85) en (86), dan zullen deze uitdrukkingen door de substitutie (107) niet meer gewijzigd worden. Deze krachten zijn dus

dan van zelve in overeenstemming met de theorie van AMPÈRE, en het meten hunner juiste waarde zal dus geene nieuwe betrekkingen tusschen de onbepaalde functiën aan het licht kunnen brengen.

48. Het koppel (88) geeft, daar het identisch nul moet zijn, aanleiding tot de betrekking:

$$0 = \omega_x \left[-\frac{1}{r} \cdot \frac{dF_1}{dr} y_2 + \frac{1}{r} \cdot \frac{d \cdot \frac{(H)}{r^2}}{dr} x_2^2 y_2 - \frac{1}{r} \frac{d \cdot \frac{(D)}{r^2}}{dr} (y_2^3 + y_2 z_2^2) - \frac{3(D)}{r^2} y_2 \right] +$$
$$+ \omega_y \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{dF_1}{dr} x_2 - \frac{1}{r} \cdot \frac{d \frac{(H)}{r^2}}{dr} (x_2^3 + x_2 z_2^2) + \frac{1}{r} \cdot \frac{d \cdot \frac{(D)}{r^2}}{dr} x_2 y_2^2 - \frac{3(H)}{r^2} x_2 \right] +$$
$$+ \omega_z \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d \cdot \frac{(H)}{r^2}}{dr} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d \cdot \frac{(D)}{r^2}}{dr} \right] x_2 y_2 z_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (135)$$

Dewijl deze betrekkingen voor iedere waarde van ω_x, ω_y en ω_z vervuld moeten zijn, zoo is vooreerst:

$$\frac{d \cdot \frac{(D) + (H)}{r^2}}{dr} = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (136)$$

waaruit dus weder volgt:

$$(D) + (H) = 0 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (\mathrm{IV})$$

49. In de tweede plaats is:

$$-\frac{1}{r} \cdot \frac{dF_1}{dr} y_2 + \frac{1}{r} \cdot \frac{d \cdot \frac{(H)}{r^2}}{dr} x_2^2 y_2 - \frac{1}{r} \frac{d \cdot \frac{(D)}{r^2}}{dr} (y_2^3 + y_2 z_2^2) - \frac{3(D)}{r^2} y_2 = 0 \ldots \quad (137)$$

gebruikt men echter de betrekking (IV) om de functie (H) te verdrijven en let men op (70), dan voert dit tot de voorwaarde:

$$-(F) + (D) + r \frac{d(D)}{dr} = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (138)$$

welke voorwaarde echter geene nieuwe betrekking tusschen de onbekende functiën

invoert, immers substitueert men (133) in (II) en elimineert men (H) met behulp van (IV), dan wordt uit die reeds bekende betrekkingen de betrekking (138) afgeleid.

De beschouwing van den coëfficiënt van ω_y in (135) voert tot dezelfde betrekking (138) en levert dus evenmin iets nieuws.

Eindelijk zal het koppel (89) — zoo als gemakkelijk is in te zien — ten gevolge van de betrekkingen (IV) en (138) van zelve verdwijnen.

50. Ten gevolge van de voorwaarde (IV) wordt het koppel (87) identisch nul. Deze voorwaarde heeft dus de eenvoudige beteekenis dat geen gesloten stroom, en blijkens (71) en (62) zelfs geen open stroom of stroomelement, ooit op een lineair stroomelement een koppel zal uitoefenen welks as met het lineaire element te zamen valt.

Deze uitkomst schijnt reeds *à priori* zoo waarschijnlijk — hoewel ze toch uit de wet van symmetrie *niet* af te leiden is en evenmin uit het gedrag van gesloten stroomen — dat men er wellicht geen bezwaar in behoeft te zien ze ook voor volledige stroomelementen, waarvoor ze experimenteel niet bewezen is, in te voeren als hypothese.

51. Uit het hier behandelde blijkt voorts dat van proeven aangaande de werking van gesloten stroomen op onvolledige elementen voor de algemeene ponderomotorische theorie niets meer te wachten is. Zulk een element, dus ook in het algemeen ieder gedeelte van een gesloten stroom, zal zich indien er gesloten stroomen op werken, juist zoo gedragen als de theorie van AMPÈRE dit verlangt, maar daaruit volgt slechts de juistheid der betrekkingen (III) en (IV). Andere gevolgtrekkingen zijn daaruit niet te maken.

Samenvatting van het behandelde.

52. Alvorens over te gaan tot de bijzondere hypothesen, die den grondslag uitmaken der verschillende electrodynamische theoriën, schijnt het ons wenschelijk de verkregen resultaten in 't kort samen te vatten.

a. De algemeene theorie der ponderomotorische krachtwerkingen gaat uit van de volgende onderstellingen:

Eerste hypothese. De ponderomotorische krachten die twee stroomelementen op elkaar uitoefenen, zijn evenredig met hunne lengtens en met de stroomsterkten der elektrische stroomen. Zij worden dus tegengesteld zoodra in *één* der beide elementen de stroomrichting omkeert.

Tweede hypothese. Behalve van lengte en stroomsterkte zijn deze krachten uitsluitend afhankelijk van de ligging der beide elementen ten opzichte van

elkaar zoodat derhalve tusschen de spiegelbeelden der elementen ook de spiegelbeelden der krachtwerkingen zullen bestaan.

Derde hypothese. Men mag de krachtwerkingen van twee elementen vervangen door die tusschen hunne zoogenaamde componenten.

Vierde hypothese. Alle krachtwerkingen tusschen stroomelementen worden in 't oneindige nul *.

Vijfde hypothese. De krachtwerkingen tusschen *gesloten* stroomen zijn zooals de theorie van AMPÈRE ze doet verwachten. De potentiaalwet van F. NEUMANN voor gesloten stroomen is dus juist.

Zesde hypothese. De resultante der krachten uitgeoefend door gesloten stroomen op een onvolkomen element staat loodrecht op dat element. Koppels, wier assen loodrecht op het element staan, zijn er niet. (Proeven van v. ETTINGHAUSEN).

b. De algemeene theorie bewijst dan dat de krachtwerkingen van stroomelementen (volledig of onvolledig) afhankelijk zijn van zeven functiën van den afstand:

$$B,\ C,\ (D),\ E,\ (F),\ G,\ (H)$$

Zij voert in de hulpfunctie:

$$P = \int_r^\infty \frac{B - G - E + C}{r^2}\, dr \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{I}^b)$$

c. Uit de krachtwerkingen van gesloten stroomen op elkander volgen nu de beide voorwaarden:

$$C - Pr = \frac{A^2}{r^2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{I}^c)$$

$$r\frac{d(D)}{dr} - (F) - (H) - Gr - Pr^2 + \frac{A^2}{r} = 0. \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{II}^c)$$

Geene andere betrekkingen kunnen met mogelijkheid uit de krachtwerkingen van gesloten stroomen op elkaar worden afgeleid.

---

* Deze hypothese is slechts schijnbaar in strijd met de hypothese van HELMHOLTZ dat tusschen stroomeinden krachten onafhankelijk van den afstand zouden werkzaam zijn. Ieder stroomelement heeft *twee* stroomeinden en de *resulteerende* krachten en koppels dezer beide stroomeinden naderen in 't oneindige tot nul. Hierop is door HELMHOLTZ zelve gewezen. CRELLE, Bd. 78. 1874. pag. 278.

d. Uit de werking van gesloten stroomen op een onvolledig stroomelement volgen de beide nieuwe betrekkingen:

$$C - G - 2\,Pr = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{I}^d)$$

$$(D) + (H) = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{II}^d)$$

Andere betrekkingen zullen uit de werking van gesloten stroomen op beweegbare (onvolledige) gedeelten van stroomen niet kunnen worden afgeleid.

De betrekkingen (I^d) en (II^d) geven, gecombineerd met (I^c) en (II^c), nog aanleiding tot de volgende eenvoudige betrekkingen die dus moeten gelden voor de werking van volledige en onvolledige elementen *op* onvolledige:

$$G + Pr = \frac{A^2}{r^2}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{III}^d)$$

$$r\frac{d(D)}{dr} - (F) + (D) = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{IV}^d)$$

e. Er is eenige reden de betrekking (II^d) ook voor volledige stroomelementen aan te nemen.

f. De hypothese der gelijkheid van actie en reactie levert de beide voorwaarden:

$$E = G, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{I}^f)$$

$$(H) + (F) = Er = Gr. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{II}^f)$$

53. Thans willen wij trachten in het licht der algemeene theorie de verschillende bijzondere theoriën te beschouwen die ontstaan door het toevoegen van nieuwe hypothesen aan die op welke de algemeene theorie steunt.

Wij beginnen met die welke betrekking hebben op de werking van onvolledige elementen op elkander. Voor onvolledige elementen zijn tusschen de zeven functiën *vier* betrekkingen bekend, namelijk: (I^c), (II^c), (I^d), en (II^d) of zoo men liever wil (I^d), (II^d), (III^d) en (IV^d), zoodat nog drie onbepaalde functiën overblijven. Wil men ook nog de wet der gelijkheid van actie en reactie aannemen dan zou nog slechts ééne onbepaalde functie overblijven, die eindelijk geheel verdwijnt als men nog aanneemt dat op onvolledige elementen geene koppels werkzaam zijn.

Hypothese van AMPÈRE.

54. De bijzondere hypothese door AMPÈRE toegevoegd aan de hypothesen der

algemeene theorie is deze dat uitsluitend krachten in de verbindingslijn mogelijk zijn. Zij onderstelt dus *à priori*:

$$(D) = 0, \; E = 0, \; (F) = 0, \; G = 0, \; (H) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (139)$$

derhalve (I^b):

$$P = \int_r^\infty \frac{B + C}{r^2} dr. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (140)$$

Uit (II^c) volgt:

$$P = \frac{A^2}{r^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (141)$$

en daarna uit (I^c):

$$C = \frac{2\,A^2}{r^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (142)$$

maar uit (140) blijkt:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{B + C}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (143)$$

en daaruit volgt:

$$B = \frac{A^2}{r^2}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (144)$$

Wat volkomen in overeenstemming is met de krachtwerkingen door AMPÈRE tusschen twee stroomelementen aangegeven.

55. Dewijl bij de berekening uit de hypothese van AMPÈRE van de beide functiën B en C alleen van de voorwaarden (I^c) en (II^c), afgeleid uit de krachtwerking van gesloten stroomen op elkander, is gebruik gemaakt, zoo blijkt hier op nieuw de juistheid der opmerking van C. NEUMANN dat — eenmaal de hypothese van AMPÈRE aangenomen — zijne gansche theorie bewezen kan worden uitsluitend uit de krachtwerkingen van gesloten stroomen op elkander.

Hypothese van GRASZMANN.

56. De bijzondere hypothese door GRASZMANN gekozen, bestaat daarin dat alle ponderomotorische krachten loodrecht staan op het element waarop ze werken. Koppels worden niet aangenomen.

Gaat men de verschillende fundamentaalgevallen na dan volgt uit deze hypothese onmiddellijk:

$$B = 0,\ (D) = 0,\ E = 0,\ (F) = 0,\ (H) = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (145)$$

Voorts moet in § 20, formule (36), de kracht X identisch nul zijn. Dit vereischt — nevens (145) — de voorwaarde:

$$C = G, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (146)$$

maar dan is (zie (I^b)):

$$P = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (147)$$

en dan geeft eindelijk de voorwaarde (I^c):

$$C = G = \frac{A^2}{r^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (148)$$

waarmede dan echter ook tevens aan alle betrekkingen geldig voor onvolledige elementen is voldaan; zoodat de hypothese van GRASZMANN nu in overeenstemming blijkt te zijn met alle waargenomen krachtwerkingen voor gesloten stroomen op elkander of op beweegbare gedeelten van gesloten stroomen.

Daarenboven blijkt de hypothese in strijd met (I^f) dus met de wet van gelijkheid van actie en reactie, zooals te verwachten was.

Hypothese van STEFAN.

57. Reeds in de inleiding hebben wij opgemerkt dat door STEFAN bij zijne poging om de theoriën van AMPÈRE en GRASZMANN in eene algemeene theorie op te nemen, de hypothese is ingevoerd dat alle ponderomotorische krachten omgekeerd evenredig zijn met het vierkant van den afstand.

Door vergelijking zijner fundamentaalgevallen met de onze, blijkt dat STEFAN onderstelt:

$$B = \frac{a}{r^2},\ C = -\frac{b}{r^2},\ E = \frac{d}{r^2},\ G = \frac{c}{r^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (149)$$

terwijl door hem op de koppels geen acht is geslagen en deze zelfs indirekt als niet bestaande worden beschouwd. Ten einde dus volledige overeenstemming met de uitkomsten van STEFAN te verkrijgen moet men nog stellen:

$$(D) = 0,\ (F) = 0,\ (H) = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (150)$$

Men vindt nu uit (I^b):

$$P = \int_r^\infty \frac{a-b-c-d}{r^4}\, dr = \frac{a-b-c-d}{3\, r^3} \quad \ldots\ldots \quad (151)$$

Daarom volgt nu uit (I^c):

$$a + 2\,b - c - d = -3\,A^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (152)$$

't welk overeenstemt met de formule van STEFAN op pag. 698 van zijne in de inleiding geciteerde verhandeling, indien men bedenkt dat bij STEFAN:

$$A^2 = \tfrac{1}{2}$$

genomen wordt.

Op gelijke wijze volgt uit (II^c):

$$a - b + 2\,c - d = 3\,A^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (153)$$

of, optellende bij (152):

$$2\,a + b + c - 2\,d = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (154)$$

wat overeenstemt met STEFAN's formule op pag. 697 zijner verhandeling, welke formule daar (zie pag. 718—722) inderdaad is afgeleid uit de koppels die gesloten stroomen op elkander uitoefenen. Daar ter plaatse is die formule echter afhankelijk van de hypothese dat tusschen stroomelementen geene richtende koppels werkzaam zijn. Zonder de invoering dier hypothese volgt dus eigenlijk uit (II^c):

$$r \cdot \frac{d(D)}{dr} - (F) - (H) = \frac{a - b + 2\,c - d - 3\,A^2}{r} = \frac{2\,a + b + c - 2\,d}{r} \quad \ldots \quad (155)$$

58. Daarentegen volgt de betrekking (154) onmiddellijk uit (I^d), d. w. z. uit het gedrag van een stroomelement onder den invloed van gesloten stroomen. Uit (155) zou men dus mogen afleiden:

$$r \cdot \frac{d(D)}{dr} - (F) - (H) = 0\,; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (156)$$

wat echter reeds overeenstemt met (IV^d), lettende op (II^d).

Voor verdere beschouwingen omtrent de eenvoudige ponderomotorische wetten, die men naast die van AMPÈRE en GRASZMANN aannemen kon, verwijzen wij naar STEFAN's verhandeling, pag. 765.

59. Wellicht ware het meer rationeel naast de hypothese van STEFAN, in plaats van de voorwaarden (150), de onderstelling in te voeren dat de koppelwerkingen alle omgekeerd evenredig waren met de *eerste* macht van den afstand, derhalve:

$$(D) = \frac{e'}{r}, \qquad (F) = \frac{f'}{r}, \qquad (H) = \frac{g'}{r}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (157)$$

In dat geval zoude men uit (I^d), (II^d), (III^d) en (IV^d) geraken tot de betrekkingen:

$$a + 2b - c - d = -3A^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (158)$$

$$2a + b + c - 2d = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (159)$$

$$f' = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (160)$$

$$e' + g' = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (161)$$

De voorwaarden (I^f) en (II^f) — actie gelijk reactie — gaan dan over in:

$$d = c, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (162)$$

$$f' + g' = d = c. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (163)$$

Wilde men nu bijv. ook die wet toelaten dan zouden tusschen de zeven constanten:

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e',\ f',\ g'$$

zes betrekkingen bekend zijn. Men zou ze dus allen in ééne, bijv. c, kunnen uitdrukken. Dan ware:

$$\left.\begin{array}{ll} B = \dfrac{A^2}{r^2} & (F) = 0, \\ C = \dfrac{2A^2 - c}{r^2}, & G = \dfrac{c}{r^2}, \\ (D) = -\dfrac{c}{r}, & (H) = \dfrac{c}{r}, \\ E = \dfrac{c}{r^2} & \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (164)$$

wat, zooals wij zien zullen, overeenstemt met de theorie van WAND, echter voor

volledige elementen (zie § 72). De krachten werkzaam tusschen een transversaal en een longitudinaal element zouden dan — dewijl $f' = 0$ en $g' = d = c$ — vallen langs de lijn van het transversale element. De voorwaarde van 't ontbreken van zulke krachten, nam.:

$$c = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (165)$$

zoude terugvoeren tot de wet van AMPÈRE.

Algemeene potentiaaltheorie.

60. Thans willen wij de hypothese van HELMHOLTZ invoeren dat de krachtwerkingen tusschen stroomelementen, evenals die tusschen gesloten stroomen, eene potentiaal bezitten.

Uit de derde hypothese § 52 volgt dan onmiddellijk dat de potentiaal van twee elementen gevonden kan worden door de potentialen der componenten ten opzichte van elkander te sommeeren. Wij keeren dus terug tot de fundamentaalgevallen. Onder de potentiaal van twee elementen verstaan wij in overeenstemming met HELMHOLTZ * de arbeid die vrijkomt indien beide elementen op oneindigen afstand van elkander verwijderd worden. Laten wij die verwijdering langs de verbindingslijn plaats hebben dan wordt de potentiaal voor elk der fundamentaalgevallen zonder moeite bepaald. Met weglating weder van den factor:

$$\iota_1 \, \iota_2 \, d s_1 \, d s_2$$

vindt men: *in het eerste fundamentaalgeval* (§ 10):

$$-\int_r^\infty B \, d r, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (166)$$

in het tweede (§ 11):

$$-\int_r^\infty C \, d r, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (167)$$

in het derde en vierde (§ 12 en § 13):

$$nul. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (168)$$

* CRELLE, Bd. 72, 1870, pag. 69.

Bestaat er derhalve voor stroomelementen eene potentiaal dan moet deze worden voorgesteld door de uitdrukking:

$$-\cos\theta_1\cos\theta_2\int_r^\infty B\,dr+\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\eta\int_r^\infty C\,dr, \quad \ldots\ldots\ldots (169)$$

zooals door ontleding in de fundamentaalgevallen blijkt. Daarbij bezitten θ_1, θ_2 en η de beteekenis die omschreven is in § 15. Met behulp van (13) kan de potentiaal ook geschreven worden:

$$-\cos\varepsilon\int_r^\infty C\,dr-\cos\theta_1\cos\theta_2\int_r^\infty (B+C)\,dr. \quad \ldots\ldots\ldots (170)$$

61. Lettende op het derde en vierde fundamentaalgeval kunnen wij nu gemakkelijk de overige onbepaalde functiën:

$$(D),\ E,\ (F),\ G,\ (H), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (171)$$

in B en C uitdrukken; immers daar thans de potentiaal bekend is, zoo zijn ook alle krachten en koppels bekend.

Bij eene verandering $d\varepsilon$, $d\theta_1$, $d\theta_2$ — waarbij r onveranderd blijve — bedraagt de aangroeijing der potentiaal:

$$\Delta=[\sin\varepsilon\int_r^\infty C\,dr]d\varepsilon+[\sin\theta_1.\cos\theta_2\int_r^\infty (B+C)dr]d\theta_1+[\cos\theta_1\sin\theta_2\int_r^\infty (B+C)dr]d\theta_2 \ldots (172)$$

derhalve moet om deze aangroeijingen te verkrijgen een arbeid Δ worden verricht.

In het derde fundamentaalgeval (§ 12) is:

$$\varepsilon=90^0, \qquad \theta_1=90^0, \qquad \theta_2=90^0 \ldots\ldots\ldots\ldots (173)$$

derhalve:

$$\Delta=d\varepsilon\int_r^\infty C\,dr, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (174)$$

maar bij 't vergrooten van den hoek ε behoeft slechts het koppel (D) overwonnen te worden, derhalve:

$$(D)=\int_r^\infty C\,dr. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (175)$$

6*

In het vierde fundamentaalgeval is, als ds_1 het transversale element voorstelt,

$$\varepsilon = 90^0, \qquad \theta_1 = 90^0, \qquad \theta_2 = 0^0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (176)$$

derhalve is:

$$\Delta = d\varepsilon \int_r^\infty C\,dr + d\theta_1 \int_r^\infty (B + C)\,dr \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (177)$$

Verplaatsen wij nu het transversale element een kleinen afstand δ in eigen richting, dan blijft daarbij ε onveranderd, terwijl:

$$d\theta_1 = \frac{\delta}{r} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (178)$$

Voor die verplaatsing is dus noodig een arbeid:

$$\Delta = + \frac{\delta}{r} \cdot \int_r^\infty (B + C)\,dr, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (179)$$

maar bij die verplaatsing komt uitsluitend de kracht E in werking en men vindt dus:

$$E = -\frac{1}{r} \int_r^\infty (B + C)\,dr \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (180)$$

Draaijen wij het transversale element zoodanig dat ε toeneemt met $d\varepsilon_1$, dan neemt tevens θ_1 af met dezelfde waarde, zoodat:

$$d\theta_1 = -d\varepsilon, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (181)$$

bedenkt men nu dat bij deze draaijing het koppel (F) optreedt, dan vindt men zonder moeite:

$$(F) = -\int_r^\infty B\,dr \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (182)$$

Met behulp van eene oneindig kleine verplaatsing en eene oneindig kleine draaijing van het longitudinale element vindt men eindelijk:

$$G = -\frac{1}{r} \int_r^\infty (B + C)\,dr, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (183)$$

$$(H) = -\int_r^\infty C\,dr, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (184)$$

zoodat daarmede de vijf functiën (171) uitgedrukt zijn in B en C.

62. Kiest men liever de functiën (D) en (F) als de onbepaalde functiën waarin de overigen worden uitgedrukt, dan vindt men:

$$\left.\begin{aligned} B &= \frac{d(F)}{dr} \\ C &= -\frac{d(D)}{dr} \\ E &= \frac{(F)-(D)}{r} \\ G &= \frac{(F)-(D)}{r} \\ H &= -(D) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (185)$$

waarbij de potentiaal (170) wordt voorgesteld door:

$$-(D)\cos\varepsilon - [(D)-(F)]\cos\theta_1\cos\theta_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (186)$$

Wat verder betreft de hulpfunctie P uit (I^b) blijkt dat hier:

$$P = \int_r^\infty \left[\frac{1}{r^2}\cdot\frac{d(F)}{dr} - \frac{2(F)}{r^3} + \frac{2(D)}{r^3} - \frac{1}{r^2}\cdot\frac{d(D)}{dr}\right] dr, \quad \ldots\ldots \quad (187)$$

maar deze integratie is uitvoerbaar en men vindt:

$$P = -\frac{(F)-(D)}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (188)$$

63. De voorwaarden (I^c) en (II^c) voeren door substitutie van (185) en (188) beiden tot dezelfde betrekking:

$$r\cdot\frac{d(D)}{dr} - (F) + (D) + \frac{A^2}{r} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (189)$$

zoodat nog slechts ééne onbepaalde functie overblijft. Is overigens deze voorwaarde vervuld, dan geeft de potentiaaltheorie behoorlijk rekenschap van de werkingen van gesloten stroomen op elkander.

De voorwaarde (II^d) is reeds van zelve vervuld; maar de voorwaarde (I^d) voert tot de betrekking:

$$r \cdot \frac{d(D)}{dr} - (F) + (D) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (190)$$

waaruit in verband met (189) volgen zou:

$$A = 0,$$

maar dan zouden alle krachtwerkingen tusschen gesloten stroomen *nul* zijn. Dit is met de werkelijkheid in strijd en het blijkt dus, *dat de krachtwerkingen tusschen onvolledige elementen geene potentiaal bezitten kunnen* *.

64. Ten einde de overeenkomst van de hier ontwikkelde potentiaaltheorie met de meest algemeene † van HELMHOLTZ aan te toonen maken wij gebruik van de bekende betrekkingen §:

$$\cos\theta_1 = -\frac{\delta r}{\delta s_1}, \qquad \cos\theta_2 = -\frac{\delta r}{\delta s_2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (191)$$

$$\cos\varepsilon = -r\frac{\delta^2 r}{\delta s_1\,\delta s_2} - \frac{\delta r}{\delta s_1}\cdot\frac{\delta r}{\delta s_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (192)$$

Voor de potentiaal (186) mogen wij dan schrijven:

$$(D)\cdot r\cdot\frac{\delta^2 r}{\delta s_1\,\delta s_2} + (F)\cdot\frac{\delta r}{\delta s_1}\cdot\frac{\delta r}{\delta s_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (193)$$

---

* Daar bewegelijke gedeelten van een gesloten geleider moeten geacht worden te bestaan uit onvolledige elementen zal eene potentiaaltheorie nimmer onmiddellijk rekenschap kunnen geven van de krachtwerkingen op zulke gedeelten van stroomen, dus *noch* van de proef van VON ETTINGHAUSEN § 46, *noch* van de bekende rotatieproeven. HELMHOLTZ wijst dan ook (CRELLE, 78, 1874, pag. 306) zelve aan de correctiekrachten die in zulke gevallen moeten worden aangebracht. Aldaar reg. 8—9 en op pag. 304, reg. 16—19 geeft HELMHOLTZ vrij duidelijk te verstaan hoe men door behoorlijke onderscheiding tusschen volledige elementen (met stroomeinden) en onvolledige (zonder stroomeinden) de theorie der „Gleitstellen" vermijden kan. Deze weg is door ons bij 't uiteenzetten der potentiaaltheorie gevolgd. Dat overigens in de „Gleitstellen" niets bijzonders gebeurd bewijzen de proeven van ZÖLLNER. Het bleek mij echter ook niet dat HELMHOLTZ aan de correctiekrachten op pag. 306, reg. 8—11 in de „Gleitstellen" aan te brengen, werkelijk bestaan toekent. Integendeel de aangehaalde plaatsen getuigen daartegen.

† CRELLE, Bd. 72, 1870, pag. 69.

§ Zie bijv. MAXWELL, *a Treatise on Electricity and Magnetism*, Vol. II, pag. 152.

of indien wij uit (189) (F) oplossen:

$$(D) \cdot r \cdot \frac{\delta^2 r}{\delta s_1 \, \delta s_2} + \left(r \cdot \frac{d(D)}{dr} + (D) + \frac{A^2}{r} \right) \frac{\delta r}{\delta s_1} \frac{\delta r}{\delta s_2}, \quad \ldots\ldots \quad (194)$$

of, gebruik makende van (192):

$$-\frac{A^2}{r} \cos \varepsilon + \left[\{(D) \cdot r - A^2\} \frac{\delta^2 r}{\delta s_1 \, \delta s_2} + \left\{ r \cdot \frac{d(D)}{dr} + (D) \right\} \frac{\delta r}{\delta s_1} \cdot \frac{\delta r}{\delta s_2} \right], \quad \ldots \quad (195)$$

waarvoor men weder schrijven kan:

$$-\frac{A^2}{r} \cos \varepsilon + \frac{\delta \left[\{(D) \cdot r - A^2\} \frac{\delta r}{\delta s_1} \right]}{\delta s_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (196)$$

Stelt men nu:

$$\int \{(D) \cdot r - A^2\} \, dr = \varphi, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (197)$$

waarin φ eene zekere functie van r voorstelt, dan gaat de potentiaal over in:

$$-\frac{A^2}{r} \cos \varepsilon + \frac{\delta^2 \varphi}{\delta s_1 \, \delta s_2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (198)$$

of eigenlijk, dēn weggelaten factor neerschrijvende, in:

$$\left[-\frac{A^2}{r} \cos \varepsilon + \frac{\delta^2 \varphi}{\delta s_1 \, \delta s_2} \right] \iota_1 \, \iota_2 \, ds_1 \, ds_2. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (199)$$

Men ziet onmiddellijk dat deze uitdrukking voor gesloten stroomen de potentiaaluitdrukking van F. NEUMANN oplevert, verder dat zij volmaakt overeenstemt met de door HELMHOLTZ t. a. p. pag. 72 en 74 opgegeven uitdrukking van de meest algemeene potentiaal tusschen stroomelementen.

65. Uit (197) wordt gevonden:

$$(D) = \frac{A^2 + \varphi'}{r}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (200)$$

daarna volgt uit (189):

$$(F) = (D) + r \frac{d.(D)}{dr} + \frac{A^2}{r} = \frac{A^2 + r \varphi''}{r}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (201)$$

daarna kan men met behulp van (185) de overige functiën der algemeene potentiaaltheorie in φ uitgedrukt berekenen. Het blijkt dan dat eenige uitkomst door de algemeene theorie verkregen door de volgende substitutiën overgaat in de algemeene potentiaaltheorie door HELMHOLTZ aangeduid:

$$\left.\begin{array}{lll} B = \dfrac{r^2 . \varphi'' - A^2}{r^2}, & C = \dfrac{A^2 + \varphi' - \varphi'' r}{r^2}, & (D) = \dfrac{A^2 + \varphi'}{r}, \\ E = \dfrac{r\varphi'' - \varphi'}{r^2}, & (F) = \dfrac{A^2 + r\varphi''}{r}, & G = \dfrac{r\varphi'' - \varphi'}{r^2}, \\ & (H) = -\dfrac{A^2 + \varphi'}{r}, & P = \dfrac{\varphi' - r\varphi''}{r^3}. \end{array}\right\} \quad . . (202)$$

66. De meer bijzondere potentiaaltheorie die door HELMHOLTZ uitvoeriger is uitgewerkt en die afhankelijk is van de tweede hypothese t. a. p. op pag. 74 ingevoerd, wordt uit de algemeene potentiaaltheorie verkregen door de substitutie:

$$\varphi = -\frac{1-k}{2} . A^2 . r \quad . . . . . (203)$$

en derhalve onmiddellijk uit de algemeene theorie door de substitutiën:

$$\left.\begin{array}{lll} B = -\dfrac{A^2}{r^2}, & C = \dfrac{1+k}{2} . \dfrac{A^2}{r^2}, & (D) = \dfrac{1+k}{2} . \dfrac{A^2}{r}, \\ E = \dfrac{1-k}{2} . \dfrac{A^2}{r^2}, & (F) = \dfrac{A^2}{r}, & G = \dfrac{1-k}{2} . \dfrac{A^2}{r^2}, \\ & (H) = -\dfrac{1+k}{2} . \dfrac{A^2}{r}, & P = -\dfrac{1-k}{2} . \dfrac{A^2}{r^3}. \end{array}\right\} \quad . . . . (204)$$

Krachtwerkingen van en op onvolledige elementen volgens de potentiaaltheorie van HELMHOLTZ.

67. HELMHOLTZ heeft in zijne potentiaaltheorie niet alleen rekenschap gegeven van de werkingen tusschen volledige elementen onderling maar ook van de werkingen van volledige op onvolledige, van onvolledige op volledige en van onvolledige elementen op elkander. Wij zullen zien hoe hij daarin slechts door het invoeren, bewust of onbewust, eener nieuwe hypothese is kunnen slagen. Vooraf willen wij eene nieuwe notatie invoeren.

Men heeft te onderscheiden vier gevallen:
1e. de werking van volledige elementen op volledige,
2e. de werking van volledige op onvolledige,
3e. de werking van onvolledige op volledige,
4e. de werking van onvolledige op onvolledige.
Bij ieder dezer vier gevallen komen de acht functiën:

$$B,\ C,\ (D),\ E,\ (F),\ G,\ (H),\ P$$

vóór. Tot nu toe bestond er geen gevaar voor misverstand, thans echter behooren wij bij iedere functie de vier gevallen te onderscheiden. Daarom zal $B_{v.v}$ voorstellen de functie B in het eerste geval, $B_{v.o}$ dezelfde functie in het tweede, $B_{o.v}$ in het derde, $B_{o.o}$ in het vierde geval. De waarde der functiën is in de door HELMHOLTZ uitgewerkte theorie voor het eerste geval reeds opgegeven. Men heeft namelijk blijkens (204):

$$\left.\begin{array}{llll} B_{v.v}=-\dfrac{A^2}{r^2}, & C_{v.v}=\dfrac{1+k}{2}\cdot\dfrac{A^2}{r^2}, & (D)_{v.v}=\dfrac{1+k}{2}\cdot\dfrac{A^2}{r}, & E_{v.v}=\dfrac{1-k}{2}\cdot\dfrac{A^2}{r^2}, \\ (F)_{v.v}=\dfrac{A^2}{r}, & G_{v.v}=\dfrac{1-k}{2}\cdot\dfrac{A^2}{r^2}, & (H)_{v.v}=-\dfrac{1+k}{2}\cdot\dfrac{A^2}{r}, & P_{v.v}=-\dfrac{1-k}{2}\cdot\dfrac{A^2}{r^3}. \end{array}\right\} \quad (205)$$

68. Het is hier de plaats niet om na te gaan op welke wijze HELMHOLTZ gekomen is tot de werking van volledige elementen op onvolledige *. Slechts willen wij opmerken dat in den loop der berekening stilzwijgend de hypothese is ingevoerd dat op een onvolledig element geene koppels werkzaam zijn †. Zonder die hypothese toch zoude formule (1^a) op pag. 285 zijner aangehaalde verhandeling foutief zijn, dewijl daarbij nog de arbeid door zulke koppels verricht zoude moeten worden gevoegd. Verder wijzen wij op het resultaat pag. 287 verkregen, dat de kracht werkzaam van een volledig op een onvolledig element steeds loodrecht zal staan op het onvolledige element. Daaruit en uit de afwezigheid van koppels blijkt dat de krachtwerking van een volledig op een onvolledig element volgens de potentiaaltheorie van HELMHOLTZ identisch is met

* CRELLE, Bd. 78, 1874 pag. 284—287.

† Het is natuurlijk mijne bedoeling niet de rechtmatigheid dezer hypothese te bestrijden. Integendeel ik erken dat met de gangbare opvattingen omtrent het wezen van den electrischen stroom koppels werkzaam op onvolledige elementen moeilijk vereenigbaar zijn. Toch blijft het een hypothese die afzonderlijke vermelding zoude behoeven en wier invoering mij slechts eene niet noodzakelijke beperking der algemeenheid voorkwam.

de krachtwerkingen door GRASZMANN gevonden, zooals dan ook door HELMHOLTZ t. a. p. wordt opgemerkt.

In de potentiaaltheorie is derhalve:

$$\left.\begin{array}{llll} B_{v.o} = 0, & C_{v.o} = \frac{A^2}{r^2}, & (D)_{v.o} = 0, & E_{v.o} = 0, \\ (F)_{v.o} = 0, & G_{v.o} = \frac{A^2}{r^2}, & (H)_{v.o} = 0, & P_{v.o} = 0. \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (206)$$

69. HELMHOLTZ erkent de wet van actie en reactie. Wij zullen derhalve met behulp van die wet thans ook de werking van een onvolledig op een volledig element kunnen berekenen. Volgens de wet van actie en reactie vindt men namelijk, indien men achtereenvolgens de vier fundamentaalgevallen onderzoekt:

$$\left.\begin{array}{l} B_{o.v} = B_{v.o}, \quad C_{o.v} = C_{v.o}, \quad E_{o.v} = G_{v.o}, \quad G_{o.v} = E_{v.o}, \quad (D)_{o.v} = (D)_{v.o}, \\ (F)_{o.v} + (H)_{v.o} = G_{v.o} \cdot r = E_{o.v} \cdot r, \quad (F)_{v.o} + (H)_{o.v} = G_{o.v} \cdot r = E_{v.o} \cdot r \end{array}\right\} \ldots (207)$$

Daaruit volgt:

$$\left.\begin{array}{llll} B_{o.v} = 0, & C_{o.v} = \frac{A^2}{r^2}, & (D)_{o.v} = 0, & E_{o.v} = \frac{A^2}{r^2}, \\ (F)_{o.v} = \frac{A^2}{r}, & G_{o.v} = 0, & (H)_{o.v} = 0, & P_{o.v} = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (208)$$

Op een volledig element werken dus wel degelijk koppels. De uitdrukkingen (208) voldoen naar behooren aan (I^c) en (II^c). Ze voldoet ook aan (II^d), maar niet aan (I^d). Dit behoeft ook niet, want de krachtwerkingen van een gesloten stroom op een *volledig* element zijn onbekend.

70. Voor de werking tusschen onvolledige elementen vindt HELMHOLTZ de wet van AMPÈRE, derhalve:

$$\left.\begin{array}{llll} B_{o.o} = \frac{A^2}{r^2}, & C_{o.o} = \frac{2A^2}{r^2}, & (D)_{o.o} = 0, & E_{o.o} = 0, \\ (F)_{o.o} = 0, & G_{o.o} = 0, & (H)_{o.o} = 0, & P_{o.o} = \frac{A^2}{r^3} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (209)$$

Door de substituties (205), (206), (208) en (209) is men derhalve in staat ieder met de algemeene theorie verkregen resultaat onmiddellijk om te zetten in de potentiaaltheorie van HELMHOLTZ.

71. Wenscht men de krachtwerkingen die in deze potentiaaltheorie tusschen

volkomen elementen worden aangenomen, verder te ontleden, dan kan men onderscheiden 1e de vereenigde werking der beide stroomeinden van een volledig element op een onvolledig stroomelement. Men vindt:

$$\left.\begin{array}{llll} B_{v.o}-B_{o.o}=-\frac{A^2}{r^2}, & C_{v.o}-C_{o\,o}=-\frac{A^2}{r^2}, & (D)_{v.o}-(D)_{o.o}=0, & E_{v.o}-E_{o\,o}=0, \\ (F)_{v.o}-(F)_{o.o}=0, & G_{v.o}-G_{o.o}=\frac{A^2}{r^2}, & (H)_{v.o}-(H)_{o\,o}=0, & P_{v\,o}-P_{o\,o}=-\frac{A^2}{r^3}, \end{array}\right\} \ldots (210)$$

2e de werking van een onvolledig stroomelement op de stroomeinden van een volledig:

$$\left.\begin{array}{llll} B_{o.v}-B_{o\,o}=-\frac{A^2}{r^2}, & C_{o.v}-C_{o.o}=-\frac{A^2}{r^2}, & (D)_{o.v}-(D)_{o\,o}=0, & E_{o.v}-E_{o\,o}=\frac{A^2}{r^2}, \\ (F)_{o.v}-(F)_{o.o}=\frac{A^2}{r}, & G_{o.v}-G_{o.o}=0, & (H)_{o.v}-(H)_{o.o}=\frac{A^2}{r}, & P_{o.v}-P_{o\,o}=-\frac{A^2}{r^3}, \end{array}\right\} \ldots (211)$$

3e de werking van de beide stroomeinden van een volledig stroomelement op de stroomeinden van een ander volledig element. Daarvoor vindt men:

$$\left.\begin{array}{ll} B_{v.v}-B_{v.o}-B_{o.v}+B_{o.o}=0, & C_{v.v}-C_{v.o}-C_{o.v}+C_{o.o}=\frac{1+k}{2}\cdot\frac{A^2}{r^2}, \\ (D)_{v\,v}-(D)_{v.o}-(D)_{o.v}+(D)_{o.o}=\frac{1+k}{2}\cdot\frac{A^2}{r}, & E_{v.v}-E_{v.o}-E_{o.v}+E_{o.o}=-\frac{1+k}{2}\cdot\frac{A^2}{r^2}, \\ (F)_{v.v}-(F)_{v.o}-(F)_{o.v}+(F)_{o.o}=0, & G_{v\,v}-G_{v\,o}-G_{o.v}+G_{o\,o}=-\frac{1+k}{2}\cdot\frac{A^2}{r^2}, \\ (H)_{v.v}-(H)_{v.o}-(H_{v\,o})+(H)_{o.o}=-\frac{1+k}{2}\cdot\frac{A^2}{r}, & P_{v.v}-P_{v\,o}-P_{o.v}+P_{o.o}=\frac{1+k}{2}\cdot\frac{A^2}{r^3}, \end{array}\right\} \ldots (212)$$

4e de werking der onvolledige elementen op elkander. Deze is reeds aangegeven (209).

De krachtwerkingen (210), (211) en (212) kan men ook afleiden uit de door HELMHOLTZ t. a. p. pag. 291 en 292 opgegeven krachten werkzaam tusschen stroomeinden en stroomelementen. Inderdaad worden op die wijze dezelfde uitkomsten verkregen en dit is de proef op de som dat de potentiaaltheorie van HELMHOLTZ door de formules (205), (206), (208) en (209) juist wordt weergegeven. De berekeningen zijn gemakkelijk te verrichten, waartoe men slechts de vier fundamentaalgevallen ieder afzonderlijk te beschouwen heeft.

Theorie van WAND.

72. Door TH. WAND * is eene theorie voor de electrodynamische werkingen vastgesteld, waarbij tusschen onvolledige stroomelementen de krachtwerkingen van AMPÈRE worden aangenomen. Krachtwerkingen tusschen stroomeinden en onvolledige stroomelementen worden niet toegelaten, daarentegen wordt ondersteld dat twee stroomeinden waar gelijksoortige electriciteit tot rust komt elkaar afstooten met een kracht gelijk aan:

$$c' A^2 \iota_1 \iota_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (213)$$

dus onafhankelijk van den afstand.

Dewijl HELMHOLTZ tusschen twee dergelijke stroomeinden eene aantrekkende kracht:

$$\frac{1+k}{2} \cdot A^2 \iota_1 \iota_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (214)$$

onderstelt, zoo zal men de WAND'sche krachtwerkingen tusschen de vier stroomeinden van twee volledige elementen kunnen vinden door in (212) overal: $\frac{1+k}{2}$ te vervangen door $-c'$. Telt men deze krachtwerkingen op bij die van AMPÈRE (209), dan vindt men de krachtwerkingen tusschen twee volledige elementen volgens de theorie van WAND, nam.:

$$\left.\begin{array}{llll} B_{v.v} = \frac{A^2}{r^2}, & C_{vv} = (2-c)\frac{A^2}{r^2}, & (D)_{v.v} = -c' \cdot \frac{A^2}{r}, & E = c' \cdot \frac{A^2}{r^2}, \\ (F) = 0, & G = c' \frac{A^2}{r^2}, & (H) = c' \frac{A^2}{r}, & P = (1-c)\frac{A^2}{r^3} \end{array}\right\} \ldots \quad (215)$$

Dewijl stroomeinden niet op onvolledige stroomelementen werken zijn de krachtwerkingen tusschen volledige en onvolledige elementen gelijk aan die tusschen onvolledige.

De krachtwerkingen (215) voldoen ook aan (I^d) en mogen dus ook tusschen onvolledige stroomelementen aangenomen worden, indien men ten minste daartusschen koppelwerkingen toelaten wil. Inderdaad stemmen ze overeen met die van § 59, form. (164), zooals blijkt door de substitutie:

$$c = c' A^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (216)$$

* *Rep. der experim. Phys.* Bd. 10. 1874.

De electrodynamische theoriën van WEBER *en* CLAUSIUS.

73. De theorie van WEBER voert — zooals bekend is — voor onvolledige stroomelementen tot de wetten van AMPÈRE. Het zal noodig zijn te onderzoeken welke krachtwerkingen die theorie voor volledige stroomelementen aangeeft. Een volledig element onderscheidt zich van een onvolledig door de aanwezigheid van twee stroomeinden waar electriciteit plotseling tot rust komt. Wij zullen dus moeten beginnen met na te gaan de krachtwerking van twee electrische moleculen e_1 en e_2 op elkaar waarvan één of die beiden in uiterst korten tijd τ tot rust komen. Het is duidelijk dat die krachtwerking een zeer korten tijd zal aanhouden maar zeer groot zal zijn — dus een stootwerking of impulsie. Gedurende den tijd dat ze werkt zal ze de krachtwerking die een gevolg is van de snelheid der electrische moleculen verre overtreffen, zoodat deze buiten rekening mag worden gelaten en voor de kracht:

$$\frac{k\,e_1\,e_2}{r^2}\left\{1-\frac{1}{c_1^2}\cdot\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{2}{c_1^2}\,r\,\frac{d^2r}{dt^2}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (217)$$

zal mogen geschreven worden:

$$\frac{k\,e_1\,e_2}{r}\cdot\frac{2}{c_1^2}\cdot\frac{d^2r}{dt^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (218)$$

Nu verbindt WEBER aan zijne wet de hypothese dat een electrische stroom bestaat uit gelijke hoeveelheden positieve en negatieve electriciteit die in tegengestelde richtingen stroomen, zoodat overal de som der absolute hoeveelheden constant blijft. Bovendien heeft CLAUSIUS aangetoond * dat zonder deze hypothese de wet van WEBER tot onjuiste gevolgtrekkingen voert.

Gaat nu eenig positief molecuul e_2 van $\frac{dr}{dt}=v$ in zeer korten tijd over tot $\frac{dr}{dt}=0$ dan is er een snelheidsverlies v, dus een gemiddelde versnelling $-\frac{v}{\tau}$, derhalve een kracht:

$$-\frac{k\,e_1\,e_2}{r}\cdot\frac{2}{c_1^2}\cdot\frac{v}{\tau} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (219)$$

Terzelfder tijd echter gaat een negatief molecuul $(-e_2)$ over van $\frac{dr}{dt}=0$ tot

* CRELLE, Bd. 82, 1877, pag. 89.

$\frac{dr}{dt} = -v$, dus op nieuw een snelheidsverlies v, dus een versnelling $-\frac{v}{\tau}$, en een kracht:

$$-\frac{k e_1 (-e_2)}{r} \cdot \frac{2}{c_1^2} \cdot \frac{v}{\tau} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (220)$$

Beide krachten heffen elkander echter op zoodat dus volgens de wet van WEBER volledige elementen geene andere ponderomotorische krachten uitoefenen dan onvolledige, dus beiden die van AMPÈRE.

74. CLAUSIUS laat bij het opstellen zijner algemeene electrodynamische wet * uitdrukkelijk de hypothese van WEBER los. Wij zullen zien dat zulks aanleiding geeft tot ponderomotorische krachten evenredig niet alleen met de intensiteit van het stroomeind, maar ook met de dichtheid der electriciteit in het punt waarop ze werken, zoodat dus stroomeinden electrisch geladen lichamen zouden aantrekken of afstooten.

Volgens de wet van CLAUSIUS zal voor de krachtwerking van plotseling tot rust komende electriciteit moeten geschreven worden:

$$X = -k e_1 e_2 \frac{d \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{dx_2}{dt}}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (221)$$

waarin $\frac{dx_2}{dt}$ de ontbondene der snelheid van e_2 volgens de X-as voorstelt. Bij overgang in den tijd τ van de snelheid u_2 tot nul is derhalve:

$$X = \frac{k e_1 e_2}{r} \cdot \frac{u_2}{\tau} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (222)$$

Is nu ι'_2 de intensiteit van den positieven stroom, dan is op ieder oogenblik een quantiteit $\iota'_2 \tau$ bezig tot rust te komen, zoodat men dus moet substitueeren $e_2 = \iota'_2 \tau$, dus:

$$X = \frac{k e_1 \iota'_2}{r} \cdot u'_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (223)$$

Als nu de negatieve electriciteit die zich in het stroomeind in beweging zet, een snelheid $-u''_2$ en een intensiteit ι''_2 bezit, dan voegt zich hieraan toe de kracht:

$$-X = -\frac{k e_1 \iota''_2}{r} \cdot u''_2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (224)$$

* CRELLE, Bd. 82, 1877, pag. 85, POGG., *Ann. N. F.* Bd. 1, 1877, pag. 18.

derhalve te zamen:

$$X = \frac{k\,e_1}{r}(\iota'_2\,u'_2 - \iota''_2\,u''_2). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (225)$$

Laat men de hypothese van WEBER toe, dan is

$$\iota'_2 = \iota''_2 \quad \text{en} \quad u'_2 = u''_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (226)$$

en de krachtwerking valt weg. Doet men dit niet en is er in het punt waarop de kracht werkt geen vrije electriciteit, dan valt evenzeer de krachtwerking weg. Is er echter een overschot ϱ_1 van positieve electriciteit, dan is:

$$X = \frac{k\,\varrho_1}{r}(\iota'_2\,u'_2 - \iota''_2 \,.\, u''_2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (227)$$

of volgens de hypothese van C. NEUMANN dat $u''_2 = 0$:

$$X = \frac{k\,\varrho_1}{r}\,\iota_2\,u_2 = \frac{k\,u_2}{r}\,\iota_2\,\varrho_1. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (228)$$

Afgezien echter van zulke krachtwerkingen evenredig met de dichtheid, geeft ook de theorie van CLAUSIUS voor volkomen en onvolkomen stroomelementen dezelfde krachtwerkingen, namelijk die van GRASZMANN.

De invloed der diëlectrische polarisatie.

75. Het is duidelijk dat het bestaan eener diëlectrische polarisatie aan onze formules geen schade doet zoolang men althans aanneemt dat, ook wat de diëlectrische polarisatie betreft, de werking der verschillende elementen van een electrischen stroom onafhankelijk is van elkander en dus de werking van een open of gesloten stroom gelijk is aan de som der werkingen zijner elementen. Denken wij ons dan zulk een element met het omringende homogeene diëlectrische medium dan zullen *èn* de krachtwerking van het element alléén *èn* ook de krachtwerking van het element plus die der stroomen in het medium door het element veroorzaakt, moeten gehoorzamen aan dezelfde wetten van symmetrie die toegepast zijn in de vier fundamentaalgevallen. Natuurlijk zullen echter de functiën B, C, (D), E, (F), G, (H) verschillende waarden verkrijgen naar gelang men de diëlectrische polarisatie-stroomen medetelt of niet. Zoo zouden bijv. tusschen de enkele elementen de wet van AMPÈRE, tusschen een element plus zijne diëlectrische polarisatiestroomen en een ander element de wet van GRASZMANN kunnen gelden.

Natuurlijk hebben wij daarbij volledige elementen op 't oog.

Stootwerking eener statische ontlading.

76. Wordt een der stroomen vervangen door eene statische ontlading dan zal men niet meer de krachten en koppels zelve, maar hunne impulsies te berekenen hebben. In plaats van:

$$\iota_1 \iota_2 X ds_1 ds_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (229)$$

bijv.:

$$\int \iota_1 \iota_2 X ds_1 ds_2 dt, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (230)$$

maar dewijl ι_1, X, ds_1 en ds_2 van den tijd onafhankelijk zijn, zoo zal men mogen schrijven

$$\iota_1 X ds_1 ds_2 \int \iota_2 dt, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (231)$$

maar nu is

$$\int \iota_2 dt = q, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (232)$$

waarin q de hoeveelheid electriciteit der ontlading voorstelt. De impulsie wordt dus:

$$\iota_1 q X ds_1 ds_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (233)$$

De impulsies der statische ontlading worden dus afgeleid uit de krachten en koppels werkzaam tusschen electrische stroomen door de substitutie

$$\iota_2 = q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (234)$$

en het is juist de uiterste geringe waarde van q voor eene krachtige statische ontlading in vergelijking met de waarde van ι_2 van een zwakke galvanische stroom die de moeilijkheid uitmaakt van het bepalen der krachtwerkingen van open stroomen, resp. statische ontladingen.

Breda, 29 December 1878.

Naschrift. In de *Wien. Ber.* van Oktober 1878 komt voor eene verhandeling van MARGULES waarin de mogelijkheid van koppelwerkingen tusschen stroomelementen aangenomen wordt. Daarbij is echter over 't hoofd gezien de koppelwerking (D) van het derde fundamentaalgeval. Voert men in onze formules (II^d) en (IV^d) de — als men eenmaal koppelwerkingen toelaat — voorzeker ongerechtvaardigde hypothese $(D) = 0$ in, dan blijkt onmiddellijk:

$$(H) = 0, \quad (F) = 0$$

welk resultaat dan ook door MARGULES is verkregen en samengevat in de bewoordingen: »Wenn Transversalkrafte angenommen werden, so konnen sie nur in den afficirten Elementen selbst angreifen."

EENIGE OPMERKINGEN

NAAR

AANLEIDING VAN DE ALGEMEENE THEORIE

DER

PONDEROMOTORISCHE KRACHTEN

VAN Dr. D. J. KORTEWEG.

DOOR

J. D. VAN DER WAALS.

§ 1. In bovengenoemden arbeid worden door den schrijver voor de algemeene werking van twee stroomelementen op elkander in rekening gebracht 7 onbekende functiën van den afstand, nam. 4 krachten B, C, E en G en 3 koppels (D), (F) en (H), waartusschen, zooals hij aantoont, 2 betrekkingen bestaan moeten, ingeval wij als door de ervaring bewezen aannemen, dat de formulen van AMPÈRE voor de werking van gesloten stroomen op elkander geheel met de waarheid overeenkomen, terwijl nog 2 andere betrekkingen gevonden worden als wij eveneens als door de ervaring bewezen mogen aannemen, dat een gesloten stroom op een onvolledig stroomelement slechts een kracht uitoefent loodrecht op dat element.

Om tot deze 4 betrekkingen te geraken, berekent de schrijver de werking van oneindig kleine stroomen op elkander en op een stroomelement. Het kwam mij voor, dat daar de proeven genomen worden met stroomen van eindige afmetingen, het natuurlijker zou zijn de 4 genoemde betrekkingen af te leiden uit de werking van gesloten stroomen van eindige afmetingen. Het bleek mij alras, dat

die werking niet, zooals ik eerst vreesde, door zeer ingewikkelde formulen uitgedrukt wordt, maar onder zulken eenvoudigen en symmetrischen vorm kan gebracht worden, dat ik, zelfs al verschilt men met mijn opvatting omtrent de meerdere natuurlijkheid der methode, het als niet overbodig beschouw deze formulen voor de werking van gesloten stroomen op elkander weder te geven. Ik zal mij daarbij zooveel mogelijk aansluiten aan de notaties van de verhandeling van Dr. D. J. KORTEWEG.

§ 2. Uit de formulen (74) enz. van § 30 der genoemde verhandeling volgt voor de werking van een gesloten stroom op een anderen gesloten stroom, waarvan men de elementen dan natuurlijk willekeurig geplaatst moet denken:

$$\begin{aligned} X = & \int_b^b dx_1 \int_a^a \frac{C - Pr}{r}(x_2 - x_1)\, dx_2 - \int_b^b dx_1 \int_a^a \frac{G + Pr}{r}(x_2 - x_1)\, dx_2 \\ & + \int_b^b dy_1 \int_a^a \frac{C - Pr}{r}(x_2 - x_1)\, dy_2 - \int_b^b dy_1 \int_a^a \frac{G + Pr}{r}(y_2 - y_1)\, dx_2 \\ & + \int_b^b dz_1 \int_a^a \frac{C - Pr}{r}(x_2 - x_1)\, dz_2 - \int_b^b dz_1 \int_a^a \frac{G + Pr}{r}(z_2 - z_1)\, dx_2 \quad \ldots\ldots (1) \end{aligned}$$

Door letterverschuiving vindt men de waarden der formulen (2) en (3) voor Y en Z.

Voegt men nu de termen van (1), waarin $\frac{C - Pr}{r}$ voorkomt bij elkander, dan verkrijgt men:

$$\int_b^b \int_a^a \frac{C - Pr}{r}(x_2 - x_1)\,(dx_1\, dx_2 + dy_1\, dy_2 + dz_1\, dz_2), \quad \ldots\ldots (4)$$

terwijl de overige termen opleveren:

$$-\int_b^b \int_a^a \frac{G + Pr}{r}\, dx_2\, [(x_2 - x_1)\, dx_1 + (y_2 - y_1)\, dy_1 + (z_2 - z_1)\, dz_1]. \quad \ldots (5)$$

Neemt men nu in aanmerking, dat

$$r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2,$$

$$r\frac{\delta r}{\delta x_1} = -(x_2 - x_1),$$

$$-r\frac{\delta r}{\delta s_1}\,ds_1 = (x_2-x_1)\,dx_1 + (y_2-y_1)\,dy_1 + (z_2-z_1)\,dz_1$$

en

$$dx_1\,dx_2 + dy_1\,dy_2 + dz_1\,dz_2 = ds_1\,ds_2\cos\varepsilon,$$

dan kan (4) aldus geschreven worden:

$$-\int_b^b\int_a^a (C-Pr)\frac{\delta r}{\delta x_1}\,ds_1\,ds_2\cos\varepsilon$$

en (5) aldus:

$$\int_b^b\int_a^a (G+Pr)\frac{\delta r}{\delta s_1}\,ds_1\,dx_2.$$

Bijgevolg is

$$X = \int_b^b\int_a^a -(C-Pr)\frac{\delta r}{\delta x_1}\,ds_1\,ds_2\cos\varepsilon - \int_b^b\int_a^a -(G+Pr)\frac{\delta r}{\delta s_1}\,ds_1\,dx_2.$$

Neemt men nu een functie (M) van r zoodanig aan, dat

$$dM = -(C-Pr)\,dr$$

en een andere (N), zoodat

$$dN = -(G+Pr)\,dr,$$

dan wordt X van den volgenden vorm:

$$X = \int_b^b\int_a^a \frac{\delta M}{\delta x_1}\cos\varepsilon\,ds_1\,ds_2 - \int_b^b\int_a^a \frac{\delta N}{\delta s_1}\,ds_1\,dx_2.$$

Evenzoo zal men vinden

$$Y = \int_b^b\int_a^a \frac{\delta M}{\delta y_1}\cos\varepsilon\,ds_1\,ds_2 - \int_b^b\int_a^a \frac{\delta N}{d s_1}\,\delta s_1\,dy_2$$

en

$$Z = \int_b^b \int_a^a \frac{\delta M}{\delta z_1} \cos \varepsilon \, d s_1 \, d s_2 - \int_b^b \int_a^a \frac{\delta N}{\delta s_1} d s_1 \, d z_2.$$

Maar aangezien $\int_b^b \frac{\delta N}{\delta s_1} d s_1 = 0$ is, vereenvoudigen de waarden van X, Y en Z zich tot

$$X = \int_b^b \int_a^a \frac{\delta M}{\delta x_1} \cos \varepsilon \, d s_1 \, d s_2, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

$$Y = \int_b^b \int_a^a \frac{\delta M}{\delta y_1} \cos \varepsilon \, d s_1 \, d s_2, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

$$Z = \int_b^b \int_a^a \frac{\delta M}{\delta z_1} \cos \varepsilon \, d s_1 \, d s_2. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

§ 3. Vergelijkt men deze uitkomsten met die, welke uit de theorie van AMPÈRE volgen (men zie bijv. BEER *Electrostatik und Electrodynamik*, pag. 259), dan ziet men, dat door $M = \frac{A^2}{r}$ te stellen een betrekking zal gevonden worden tusschen enkele der onbekende functiën, die, als zij vervuld is, rekenschap kan geven van de werking van gesloten stroomen op elkander. Deze betrekking geeft dus

$$C - Pr = + \frac{A^2}{r^2}. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Maar aangezien men uit de gelijkheid van de waarde van bepaalde integralen tusschen gegeven grenzen niet besluiten mag tot de gelijkheid der functiën, die onder het integraalteeken voorkomen, doet zich de vraag voor of de betrekking (9) behalve voldoende ook noodzakelijk is.

Bedenkt men echter, dat de integratie niet alleen tusschen bepaalde grenzen maar langs geheel willekeurig geplaatste krommen steeds dezelfde uitkomsten zal moeten geven, dan wordt de noodwendigheid der vergelijking (9) licht ingezien. Men kan ze daarenboven op de volgende wijze streng bewijzen. Ingeval nam. $C - Pr \gtrless \frac{A^2}{r^2}$ is, zal het verschil slechts een functie van r kunnen zijn, bijv.

$\varphi(r)$ en zal $\int\int \varphi(r) \frac{\delta r}{\delta x_1} ds_1 \, ds_2 \cos\varepsilon$ langs alle willekeurig geplaatste krommen geïntegreerd $= 0$ moeten zijn.

Nu is het mogelijk twee krommen zoo te plaatsen, dat ten minste voor dien stand geen functie van r de dubbele integratie gelijk nul kan maken.

Stellen wij bijv. twee cirkelvormige stroomen met gelijken straal beschreven in vlakken evenwijdig aan het YZ-vlak, zoodat de lijn, die de middelpunten verbindt loodrecht op deze vlakken staat, zoeken wij dan de waarde van $\int_b^b \frac{\varphi(r)}{r} ds_2 \cos\varepsilon$ voor een willekeurig element van den eersten stroom, dan zal zoo deze integraal een waarde $\gtrless 0$ heeft, de waarde van den dubbelen integraal $2\pi R\,(x_2 - x_1)$ maal deze waarde zijn.

Alleen dus als $\int_b^b \frac{\varphi(r)}{r} ds_2 \cos\varepsilon = 0$ is, zal $\int_a^a \int_b^b ds_1 \, ds_2 \cos\varepsilon \, \varphi(r) \frac{\delta r}{\delta x_1} = 0$ kunnen zijn, en omgekeerd. Maar daar $ds_2 \cos\varepsilon$ de projectie is van elk element van den tweeden stroom op het gekozen element van den eersten en dus $\int_b^b ds_2 \cos\varepsilon = 0$ is, zal $\int_b^b \frac{\varphi(r)}{r} ds_2 \cos\varepsilon$ niet gelijk nul kunnen zijn, daar de positieve termen van $\int_b^b ds_2 \cos\varepsilon$ allen met een, hetzij grooteren, hetzij kleineren factor vermenigvuldigd moeten worden dan de negatieve; deze laatsten zijn toch allen op een hetzij kleineren, hetzij grooteren afstand van het element ds_1 dan de eersten. Zelfs een functie van r, die bij eene willekeurige periode zou af- of toenemen, kan niet voldoen, daar de grootte des cirkels zoo gekozen kan worden, dat alle afstanden tot ds_1 binnen de grenzen vallen, waarin $\varphi(r)$ of afnemende of toenemende wezen zou. Alleen $\frac{\varphi(r)}{r}$ gelijk aan een constante zou voldoen kunnen, maar dat die constante gelijk 0 moet zijn volgt uit de hypothese, dat de krachtwerking op oneindigen afstand verdwijnt.

§ 4. Gaan wij nu over tot de berekening voor eindige gesloten stroomen van de componenten van het koppel, dat uit de koppelwerking tusschen de elementen voortkomt.

Uit de formulen (77), (78) en (79) van § 30 van KORTEWEG's verhandeling volgt:

$$(X) = \int_b^b dx_1 \int_a^a \frac{(D)+(H)}{r^2}(x_2-x_1)\,\{(z_2-z_1)\,dy_2-(y_2-y_1)\,dz_2\}$$

$$+\int_b^b dy_1 \int_a^a \{(F_1)-\frac{(H)}{r^2}(y_2-y_1)^2+\frac{(D)}{r^2}(x_2-x_1)^2\}\,dz_2+\int_b^b dy_1\int_a^a \frac{(H)}{r^2}(y_2-y_1)\,(z_2-z_1)dy_2$$

$$-\int_b^b dy_1\int_a^a \frac{(D)}{r^2}(x_2-x_1)(z_2-z_1)dx_2$$

$$-\int_b^b dz_1\int_a^a \{(F_1)-\frac{(H)}{r^2}(z_2-z_1)^2+\frac{(D)}{r^2}(x_2-x_1)^2\}\,dy_2-\int_b^b dz_1\int_a^a \frac{(H)}{r^2}(z_2-z_1)(y_2-y_1)dz_2+$$

$$+\int_b^b dz_1\int_a^a \frac{(D)}{r^2}\,(y_2-y_1)\,(x_2-x_1)\,dx_2. \quad \ldots \quad (10)$$

Door letterverschuiving vindt men (Y) en (Z) als formule (11) en (12). Voegt men de termen bijeen, waarin (F_1) voorkomt, dan vindt men:

$$\int_b^b \int_a^a (F_1)\,(dy_1\,dz_2-dz_1\,dy_2). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Voegt men de termen bijeen, waarin (H) voorkomt, dan vindt men:

$$\int_b^b \int_a^a \frac{(H)}{r^2}\{z_2-z_1)\,dy_2-(y_2-y_1)\,dz_2\}\,\{(x_2-x_1)\,dx_1+(y_2-y_1)\,dy_1+(z_2-z_1)\,dz_1\}$$

waarvoor geschreven kan worden:

$$\int_b^b \int_a^a \frac{(H)}{r}\times-\frac{\delta r}{\delta s_1}\,ds_1\,\{(z_2-z_1)\,dy_2-(y_2-y_1)\,dz_2\}. \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

Voert men een functie (H_1) in, die tot (H) in gelijke betrekking staat, als (F_1) tot (F), zoodat:

$$d\,(H_1) = -\frac{(H)}{r}\,dr$$

dan wordt (14) aldus geschreven:

$$\int_b^b \int_a^a \frac{\delta\,(H_1)}{\delta s_1}\,ds_1\,\{(z_2-z_1)\,dy_2-(y_2-y_1)\,dz_2\}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

waarvoor na partiële integratiën gevonden wordt:

$$-\int_b^b \int_a^a (H_1)\,(dy_1\,dz_2 - dz_1\,dy_2). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Voegt men de termen eindelijk bijeen, waarin (D) voorkomt, dan vindt men:

$$\int_b^b \int_a^a \frac{(D)}{r^2}(x_2 - x_1) \begin{vmatrix} x_2 - x_1, & dx_1, & dx_2 \\ y_2 - y_1, & dy_1, & dy_2 \\ z_2 - z_1, & dz_1, & dz_2 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Substitueert men in (17) voor $(x_2 - x_1)^2$ de waarde: $r^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$ en schrijft men voor $(x_2 - x_1)\,dx_1$ de waarde:

$$(x_2 - x_1)\,dx_1 = -r\frac{\delta r}{\delta s_1}\,ds_1 - (y_2 - y_1)\,dy_1 - (z_2 - z_1)\,dz_1$$

en evenzoo:

$$(x_2 - x_1)\,dx_2 = r\frac{\delta r}{\delta s_2}\,ds_2 - (y_2 - y_1)\,dy_2 - (z_2 - z_1)\,dz_2,$$

dan valt (17) in de volgende 3 deelen uiteen:

$$\int_b^b \int_a^a (D)\,(dy_1\,dz_2 - dz_1\,dy_2), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

$$\int_b^b \int_a^a -\frac{(D)}{r}\frac{\delta r}{\delta s_1}\,ds_1\,\{(z_2 - z_1)\,dy_2 - (y_2 - y_1)\,dz_2\}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

$$\int_b^b \int_a^a -\frac{(D)}{r}\frac{\delta r}{\delta s_2}\,ds_2\,\{(z_2 - z_1)\,dy_1 - (y_2 - y_1)\,dz_1\}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

voert men nu een functie (D_1) in, zoodanig weder dat $d(D_1) = -\frac{(D)}{r}\,dr$, dan worden (b) en (c):

$$\int_b^b \int_a^a \frac{\delta(D_1)}{\delta s_1}\,ds_1\,\{(z_2 - z_1)\,dy_2 - (y_2 - y_1)\,dz_2\}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

$$\int_b^b \int_a^a \frac{\delta (D_1)}{\delta s_2} d s_2 \{(z_2 - z_1) d y_1 - (y_2 - y_1) d z_1\} \ldots\ldots\ldots\ldots (e)$$

Na partieele integratie worden (d) en (e) beiden:

$$-\int_b^b \int_a^a (D_1) \{d y_1 d z_2 - d z_1 d y_2\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (f)$$

Bijgevolg komt (X) onder den volgenden vorm:

$$\int_b^b \int_a^a [(F_1) - (H_1) + (D) - 2 (D_1)] (d y_1 d z_2 - d z_1 d y_2), \ldots\ldots (18)$$

waaruit men door letterverschuiving formule (19) en (20) voor (Y) en (Z) vindt.

§ 5. De verplaatsing der krachten in den oorsprong brengt nog de volgende koppels voort, waarvan de componente volgens de X-as $\Sigma (Z y_1 - Y z_1)$ onder den volgenden vorm komt:

$$(X') = \int_b^b \int_a^a d s_1 d s_2 \cos \varepsilon \left[y_1 \frac{\delta M}{\delta z_1} - z_1 \frac{\delta M}{\delta y_1}\right] - \int_b^b \int_a^a \frac{\delta N}{\delta s_1} d s_1 (y_1 d z_2 - z_1 d y_2) \ldots (21)$$

Door partieele integratie wordt het laatste gedeelte van (21) gelijk aan:

$$+ \int_b^b \int_a^a N (d y_1 d z_2 - d z_1 d y_2).$$

Voegt men dit koppel bij dat der vorige paragraaf, dan vindt men:

$$(X = \int_b^b \int_a^a d s_1 d s_2 \cos \varepsilon \left[y_1 \frac{\delta M}{\delta z_1} - z_1 \frac{\delta M}{\delta y_1}\right] + \int_b^b \int_a^a [(F_1) - (H_1) + (D) - 2 (D_1) + (N)] (d y_1 d z_2 - d z_1 d y_2) \ldots (22)$$

Door letterverschuiving volgen (23) en (24) voor (Y) en (Z).

§ 6. Vergelijkt men nu deze uitkomst met die uit de theorie van AMPÈRE verkregen, dan blijkt weder, dat door:

$$[(F_1) - (H_1) + (D) - 2 D_1 + N] = \frac{A^2}{r} \ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

te stellen een betrekking gevonden wordt, die de algemeene theorie in over-

eenstemming met de ervaring brengt. Door differentiatie wordt deze betrekking:

$$-\frac{(F)}{r}+\frac{(H)}{r}+\frac{d(D)}{dr}+2\frac{(D)}{r}-(G+Pr)+\frac{A^2}{r^2}=0.$$

Na deeling door r is dit de tweede betrekking door KORTEWEG gevonden. Weder kan de vraag gesteld worden of de betrekking (25) noodwendig is. Is zij niet vervuld, dan moet een functie van (r) bestaan, die ten allen tijde, hoe ook de twee stroomen ten opzichte van elkander staan.

$$\int_b^b \int_a^a \varphi(r)\,(dy_1\,dz_2-dz_1\,dy_2)=0$$

maakt, en niet alleen deze integraal, maar ook de anderen, die door letterverschuiving er van afgeleid kunnen worden. Stelt men nu twee rechthoekige stroomen, de een in het xz-vlak, met een zijde samenvallende met de x-as, de tweede in het xy-vlak met een zijde evenwijdig aan de x-as, maar die zijde zoo ver verschoven, dat de abscis van haar uiteinde dezelfde is als die van het midden der met de x-as samenvallende zijde, dan heeft men reeds een geval, waaruit blijkt, dat geen functie van r aan de bovenonderstelde voorwaarde voldoen kan, en dat dus de betrekking (21) noodzakelijk is. Een constante, al kon die toegelaten worden, zou door de differentiatie toch wegvallen.

§ 7. De voorwaarde, dat de kracht, door een gesloten stroom op een onvolledig element uitgeoefend, loodrecht op dat element staat, geeft een nieuwe betrekking tusschen de 7 onbekende functiën. De ontbondene der kracht, volgens de richting van het element moet dan $=0$ zijn, of:

$$X\frac{dx_1}{ds_1}+Y\frac{dy_1}{ds_1}+Z\frac{dz_1}{ds_1}=0.$$

Deze ontbondene laat zich onder de volgende gedaante brengen:

$$ds_1\int_a^a \frac{C-G-2Pr}{r}\times -r\frac{\delta r}{\delta s_1}\,ds_2\cos\varepsilon. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

De betrekking $C-Pr=G+Pr$ voldoet aan de voorwaarde, dat deze ontbondene nul zij, en daar voor elken willekeurigen stroom de laatste integraal gelijk nul moet zijn, is deze betrekking ook noodzakelijk. Men kan zich daarvan overtuigen door bijv. het element ds_1 evenwijdig aan de x-as geplaatst te denken, en den stroom zoodanig te kiezen, dat voor twee punten, die dezelfde

abscis x_2 hebben, de afstand van het punt op den tak, waarvoor $ds_2 \cos \varepsilon$ positief is, steeds grooter is dan voor dat, waarvoor $ds_2 \cos \varepsilon$ negatief is.

Vergelijking (26) nam. wordt bij deze plaatsing van het element gelijk aan:

$$dx_1 \int_a^a \frac{C - G - 2Pr}{r} . (x_2 - x_1)\, dx_2.$$

Is nu voor gelijke waarden van x_2 voor het eene element, waarvoor dx_2 positief is, $\frac{C - G - 2Pr}{r} >$ dan voor dat, waarbij dx_2 negatief is, dan kan de gesloten integraal niet gelijk aan 0 zijn. $\frac{C - G - 2Pr}{r}$ gelijk aan een konstante zou kunnen voldoen, maar zonder nader onderzoek of ook in het algemeen geval deze waarde zou kunnen voldoen, volgt uit de hypothese, dat de kracht op oneindigen afstand, gelijk nul zij, ook dat deze konstante gelijk nul moet zijn, gelijk uit de volgende vergelijking licht is in te zien.

$$\frac{C - G}{r} + 2P = K.$$

voor $r = \infty$ is C en G en $P = 0$ en dus moet ook $K = 0$ zijn.

§. 8. Wat eindelijk de 4de betrekking aangaat, die kan uit de voorwaarde dat de as der electrische koppel-werking geen componente loodrecht op het element hebbe, evenzeer gevonden worden zonder tot elementaire gesloten stroomen zijn toevlucht te nemen. Deze voorwaarde brengt mede, dat, als het element evenwijdig aan de y- of z-as geplaatst is, of:

$$\int_a^a \left[(F_1) - \frac{(H)}{r^2}(y_2 - y_1)^2 + \frac{(D)}{r^2}(x_2 - x_1)^2\right] dz_2 + \int_a^a \frac{(H)}{r^2}(y_2 - y_1)(z_2 - z_1)\, dy_2 -$$
$$- \int_a^a \frac{(D)}{r^2}(x_2 - x_1)(z_2 - z_1)\, dx_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

of:

$$\int_a^a \left[(F_1) - \frac{(H)}{r^2}(z_2 - z_1)^2 + \frac{(D)}{r^2}(x_2 - x_1)^2\right] dy_2 + \int_a^a \frac{(H)}{r^2}(z_2 - z_1)(y_2 - y_1)\, dz_2 -$$
$$- \int_a^a \frac{(D)}{r^2}(y_2 - y_1)(x_2 - x_1)\, dx_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

voor elken gesloten stroom.

Wij kunnen (27) aldus schrijven:

$$\int_a^a (F_1)\, dz_2 + \int_a^a \frac{(D)}{r^2}(x_2 - x_1) \begin{vmatrix} x_2 - x_1, & dx_2 \\ z_2 - z_1, & dz_2 \end{vmatrix} - \int_a^a \frac{(H)}{r^2}(y_2 - y_1) \begin{vmatrix} y_2 - y_1, & dy_2 \\ z_2 - z_1, & dz_2 \end{vmatrix} = 0.$$

De factor van $\frac{(D)}{r^2}$ valt door de substitutie:

$$(x_2 - x_1)^2 = r^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$

en:

$$(x_2 - x_1)\, dx_2 = r \frac{\delta r}{\delta s_2} ds_2 - (y_2 - y_1)\, dy_2 - (z_2 - z_1)\, dz_2$$

in de volgende 3 deelen uiteen:

$$r^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

$$-r \frac{\delta r}{\delta s_2} ds_2 (z_2 - z_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

en:

$$-(y_2 - y_1) \begin{vmatrix} y_2 - y_1, & dy_2 \\ z_2 - z_1, & dz_2 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

zoodat (27) onder den volgenden vorm komt:

$$\int_a^a [(F_1) + (D) - (D_1)]\, dz_2 - \int_a^a \frac{(H) + (D)}{r^2}(y_2 - y_1) \begin{vmatrix} y_2 - y_1, & dy_2 \\ z_2 - z_1, & dz_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (29)$$

en (28) onder de volgende gedaante:

$$\int_a^a [(F_1) + (D) - (D_1)]\, dy_2 - \int_a^a \frac{(H) + (D)}{r^2}(z_2 - z_1) \begin{vmatrix} z_2 - z_1, & dz_2 \\ y_2 - y_1, & dy_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (30)$$

Deze betrekkingen zijn vervuld als $(H) + (D) = 0$ en $(F_1) + (D) - (D_1) = 0$ zijn, en dat zij noodzakelijk gelijk nul moeten zijn, kan weder blijken als men den stroom een bepaalden stand geeft. Stelt men bijv. een stroom in een vlak

evenwijdig aan het XY-vlak, zoodat $dz_2 = 0$ is, dan volgt uit (29) dat voor alle stroomen evenwijdig aan het XY-vlak:

$$\int_a^a \frac{(H)+(D)}{r^2}(y_2 - y_1)\,dy_2 = 0$$

moet zijn. Hieraan kan niet voldaan worden, tenzij $\frac{(H)+(D)}{r^2}$ = constante genomen worden. Maar (H) en (D) hebben voor $r = \infty$ de waarde 0, en dus de constante kan alleen nul zijn. Is $(H) + (D) = 0$, dan moet ook $(F_1) + (D) - (D_1) =$ constante zijn, of

$$-\frac{(F)}{r} + \frac{d(D)}{dr} + \frac{(D)}{r} = 0.$$

Dit is evenwel geen nieuwe betrekking, maar volgt uit de tweede betrekking, en omgekeerd, zoodat het onderzoek naar het koppel, dat een gesloten stroom op een gesloten stroom uitoefent, had kunnen achterwege blijven; ten minste, wat de uitkomst aangaat voor onvolledige elementen.

Amsterdam, Januari 1879.

GEDRUKT BIJ DE ROEVER-KRÖBER-BAKELS.