CORRELATION PROBLEMS IN A ONE-DIMENSIONAL MODEL OF TURBULENCE. IV *)

BY

J. M. BURGERS

(*Mededeling no. 65d uit het Laboratorium voor Aero- en Hydrodynamica der Technische Hogeschool te Delft*)

(Communicated at the meeting of May 20, 1950)

27. In Parts I — III of this paper expressions have been constructed for $\overline{v^2}$, $\overline{v_1 v_2}$ and $\overline{v_1^2 v_2}$, referring to a particular type of solutions of eq. (1). These expressions contain several series of other mean values, depending on the lengths of the segments λ_i, the values of τ_i and ζ_i associated with them and combinations of such quantities. Substitution of the expressions for $\overline{v_1 v_2}$ and $\overline{v_1^2 v_2}$ into the fundamental equation (12) or (12*a*) for the propagation of correlation, gave a number of relations between mean values involving the λ_i, τ_i etc. However, even when this equation is supplemented by the hypothesis that the correlation function is of self-preserving type, no method was found which would enable us to calculate the values of these quantities. One gets the impression that the equation for the propagation of correlation does not adequately embody all the statistical properties of the system and that it is necessary to look for another statistical treatment, of a more basic character. Such a treatment also should show whether a tendency exists towards the development of self-preserving correlation functions.

To find a way which may lead to such a treatment is still the great problem of the theory of turbulence. The following pages do not pretend more than to sketch a few aspects of questions appearing here, in order to bring the investigation of our system provisionally to a close.

An ideal method for a statistical treatment would be to devise a description of the system of such type, that every possible state could be completely specified by a single datum, say by the position of a point in a multidimensional system of coordinates. Application of the laws of motion as stated in section 7 would give us the displacement of the representative point in course of time, and the simultaneous history of an assembly of systems could be pictured by a flow of such points. If now we could find a quasi-stationary probability function for the distribution of these points over the available space, which would be in conformity with the laws governing the flow, it would seem that mean

*) Continued from these Proceedings 53, 718—731 (1950).

values could be calculated by averaging over the system of representative points. At the present no such description is available and it looks as if the number of details to be specified by means of the position of a representative point, must be so large that the application of this idea will be extremely complicated.

A different way of attack is to look for a class of elements which throughout the development of the system retain a certain individuality. For these elements a distribution function might be introduced and a consideration of the laws of motion might lead to the derivation of a BOLTZMANN equation for the distribution function. Although this idea likewise is beset with difficulties due to the peculiar nature of the relation between the λ_i and τ_i, which involves questions of order of arrangement to which reference has already been made in sections **11** and **12**, it appears nevertheless that the nearest approach to an assembly of *"weekly interacting elements"* is obtained by taking the segments λ_i as the fundamental entities. In order to be able to make use of the laws of motion stated in section **7**, we must associate with every segment at least one further quantity, for which we choose $s_i = \frac{1}{2}(\tau_{i-1} + \tau_i)$.

So long as no interaction takes place between neighbouring segments, the laws of motion give:

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = \frac{\lambda_i - s_i}{t} \quad ; \quad \frac{ds_i}{dt} = 0 \tag{111}$$

Interaction occurs when the length λ_i of a segment has decreased to zero. The segment then vanishes from the assembly, while its two neighbours suffer a sudden increase of their s-values: the segment on the left hand side has its value of s_{i-1} increased by $\frac{1}{2}\tau_i$ and the segment on the right hand side has its value of s_{i+1} increased by $\frac{1}{2}\tau_{i-1}$. When s_i is the only datum available, the way in which it divides into $\frac{1}{2}\tau_i$ and $\frac{1}{2}\tau_{i-1}$ becomes a point of uncertainty. It will immediately be seen that in this respect the segments are not independent: when the division should be known for a single segment, it can be found for all other segments by means of formulae of the type:

$$\tau_{i+1} = 2\, s_{i+1} - \tau_i \quad ; \quad \tau_{i+2} = 2\, s_{i+2} - \tau_{i+1}, \text{ etc.}$$

In order not to have our way blocked already at the start, we shall ignore this circumstance and consider the ratio τ_i/τ_{i-1}, for a segment which has decreased to zero, to be a matter of pure chance for that element.

Although the expressions for $\overline{v_1 v_2}$ and $\overline{v_1^2 v_2}$ require the knowledge of a great many functions, the complexity of the problem forces us to restrict the attention to the distribution function $f_1(\lambda)d\lambda$ for the lengths λ_i of single segments, and to mean values like $\overline{\tau_i}^*$ or $\overline{s_i}^*$, referring to a given λ_i.

28. It may be useful, as a first attempt, to simplify still further and to consider only the values of the lengths λ_i. We shall assign an average rate of increase of length to all segments with lengths between λ_i and $\lambda_i + d\lambda_i$, to be given by:

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = \frac{\lambda_i - s_i^*}{t} \tag{111 a}$$

where s_i^* represents the restricted mean value

$$s_i^* = \tfrac{1}{2}\,\overline{(\tau_{i-1} + \tau_i)}^{\,*} = \overline{\tau_i}^{\,*} \tag{111 b}$$

for the given value of λ_i, as defined in section 12. If we denote by N the total number of segments in a constant great length (which we may take as unit length), the BOLTZMANN equation for Nf_1 obtains the form:

$$\frac{\partial}{\partial t}(Nf_1) = -\frac{\partial}{\partial \lambda}\left\{\frac{\lambda - s^*}{t}\,Nf_1\right\} \tag{112}$$

Since the interaction between segments affects only the value of s_i, but not the lengths of other segments, no interaction term is required in eq. (112). — Integration with respect to λ from 0 to ∞, having regard to (36) and to the fact that N is a function of t alone, gives:

$$-\frac{t}{N}\frac{dN}{dt} = f_0\, s^* \tag{113}$$

where f_0 and s^* refer to $\lambda_i = 0$. This equation, which is the same as (64), expresses the gradual decrease of the number of segments in unit length through the disappearance of segments for which λ_i has become zero. For shortness we write a for the right hand side of (113); in principle a can be a function of t. For self-preserving systems eq. (95) gives $a = \frac{2}{3}$.

Eliminating N from (112) we arrive at the following equation for f_1:

$$t\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \lambda}\{(\lambda - s^*)\,f_1\} - a f_1 = 0 \tag{114}$$

The solution of this equation is hampered by the circumstance that a guess must be made concerning the proper choice of s^* (which should satisfy the condition that the overall mean value of s must be equal to that of λ), while also the fact that a depends on special values of f and s^* brings complications. By way of example we give the following particular self-preserving solution, for which $a = {}^{2}$, while it has been assumed that s^* should be equal to $A\,t^{2/3}$ for all λ (with A independent of λ):

$$\left\{\begin{array}{ll} f_1 = \dfrac{2}{3\,A\,t^{2/3}}\left(1 - \dfrac{\lambda}{3\,A\,t^{2/3}}\right) & \text{for } \lambda < 3\,A\,t^{2/3} \\ f_1 = 0 & \text{for } \lambda > 3\,A\,t^{2/3} \end{array}\right. \tag{115}$$

This solution leads to:

$$\overline{\lambda_i} = \overline{s_i} = A\,t^{2/3}.\ ^{13)}$$

[13]) A problem in a way complementary to the one considered here, is obtained when we start from the molecular analogue mentioned in footnote 3) to section 7. In this analogue we have to do with molecules of various masses τ_i, arbitrarily

29. We will now give attention to the circumstance that segments of a given length λ_i may have various values for s_i and we introduce a distribution function $G(\lambda, s)\, d\lambda\, ds$, defined in such a way that the number of segments per unit length of the y-axis with values of λ_i and s_i between assigned limits, at a definite instant, is given by

$$N(t)\, G(\lambda, s)\, d\lambda\, ds \tag{116}$$

In general the function G will depend on t. For all t it must satisfy the condition:

$$\int_0^\infty d\lambda \int_0^\infty ds\, G(\lambda, s) = 1 \tag{116 a}$$

The BOLTZMANN equation for G will refer to a λ, s-plane and takes the form:

$$\frac{\partial}{\partial t}(NG) = -\frac{\partial}{\partial \lambda}\left\{\frac{\lambda - s}{t} NG\right\} + \triangle(NG) \tag{117}$$

The term $\triangle(NG)$ represents the effect of the interactions, which now must be taken into account. The interaction produces sudden additions to the values of s_i of certain segments, in consequence of which their representative points in the λ, s-plane jump upwards, but there is no creation, nor annihilation of representative points. It follows that we must have:

$$\int_0^\infty d\lambda \int_0^\infty ds \,\triangle(NG) = 0 \tag{118}$$

Integration of the BOLTZMANN equation over the whole λ, s-plane consequently gives:

$$-\frac{t}{N}\frac{dN}{dt} = \int_0^\infty ds\, s\, G(0, s) \tag{119}$$

which is equal to $f_0 s^* = a$, that is to the quantity already occurring in (113).

---

distributed over a straight line of infinite length, and endowed with positive or negative velocities. With the data given in the footnote, the velocities $\beta\zeta_i$ are connected in a particular way with the coordinates ξ_i and the masses τ_i, but one could also take a more general point of view and treat the velocities as quite arbitrary.

There will be collisions and it is assumed that two colliding molecules will immediately stick together, with their masses and their momenta added. Then the following statistical problem presents itself: can one find a law governing the probable mass distribution of the molecules? Such a law cannot be of stationary character, since the number of molecules per unit length gradually decreases in consequence of their combining, while the average mass of a molecule correspondingly increases. But it might be that there would be an approach to a self-preserving function, *e.g.* for the dispersion of the masses about their average value.

In order to obtain an expression for $\triangle (NG)$ we consider a group of disappearing segments, for which s_i may have a value between s_1 and $s_1 + ds_1$. The number of these segments (for unit time and unit length of the y-axis) temporarily will be written:

$$\nu = NG(0, s_1)\,\frac{s_1}{t}$$

They will occasion upward jumps of the s-values of their immediate neighbours. If we write: $ln\,(\tau_i/\tau_{i-1}) = 2\varkappa$, we have:

$$\tfrac{1}{2}\,\tau_{i-1} = \frac{e^{-\varkappa}\,s_1}{e^{\varkappa} + e^{-\varkappa}}\ ;\ \tfrac{1}{2}\,\tau_i = \frac{e^{\varkappa}\,s_1}{e^{\varkappa} + e^{-\varkappa}}.$$

The value of $\varkappa$ is not known beforehand. We assume that there exists a probability function $p(\varkappa)\,d\varkappa$, defined in such a way that:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(\varkappa)\,d\varkappa = 1, \text{ with } p(\varkappa) = p(-\varkappa).$$

There will then be called forward $\nu\,p(\varkappa)\,d\varkappa$ jumps of amount $\tfrac{1}{2}\,\tau_{i-1}$ and an equal number of amount $\tfrac{1}{2}\,\tau_i$. If we neglect the possibility of a correlation between neighbouring segments, the representative points of the neighbouring segments can be situated in any element $d\lambda\,ds$ of the λ, s-plane. Since the probability to find such points in an element $d\lambda\,ds$ is given by $G\,(\lambda, s)\,d\lambda\,ds$, we must expect that out of this element there will disappear

$$(A) \qquad 2\,\nu\,p(\varkappa)\,d\varkappa\;\; G\,(\lambda, s)\,d\lambda\,ds$$

representative points, half of which make upward jumps of amount $\tfrac{1}{2}\,\tau_{i-1}$ and half of which make jumps of amount $\tfrac{1}{2}\,\tau_i$. It is possible, however, that there will be some preference for neighbours with a large positive value of $d\lambda_i/dt$ (that is, with a large positive value of $\lambda_i - s_i$), since such segments will have a great tendency to cause a decrease in length of their neighbours. It may therefore be advisable to multiply the expression (A) by a factor γ, increasing with $\lambda - s$. The introduction of such a factor must not bring about any change in the total number of points which jump upward; hence the following condition must be fulfilled:

$$(B) \qquad \int_0^{\infty} d\lambda \int_0^{\infty} ds\,\gamma\,G\,(\lambda, s) = 1$$

Having regard to the factor γ it is found that the total number of representative points disappearing from an element $d\lambda\,ds$ amounts to:

$$(C) \quad d\lambda\,ds\,\gamma\,G\,(\lambda, s)\,\frac{2\,N}{t} \int_{-\infty}^{+\infty} d\varkappa\,p(\varkappa) \int_0^{\infty} ds_1\,s_1\,G\,(0, s_1) = d\lambda\,ds\,\gamma\,G\,(\lambda, s)\,\frac{2\,Na}{t}$$

while the number of points newly appearing in an element $d\lambda\, ds$ in consequence of jumps from below is given by

$$(D) \qquad d\lambda\, ds\, \frac{2N}{t} \int_{-\infty}^{+\infty} d\varkappa\, p(\varkappa) \int_0^{s'} ds_1\, s_1\, G(0, s_1)\, \gamma\, G(\lambda, s - s'')$$

where

$$s' = \frac{(e^{\varkappa} + e^{-\varkappa})\, s}{e^{\varkappa}} \quad ; \quad s'' = \frac{e^{\varkappa} s_1}{e^{\varkappa} + e^{-\varkappa}}.$$

Combining (C) and (D) we obtain:

$$(120) \qquad \triangle(NG) = \frac{2N}{t} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} d\varkappa\, p(\varkappa)\, S - a\gamma G(\lambda, s) \right]$$

with

$$(120\,a) \qquad S = \int_0^{s'} ds_1\, s_1\, G(0, s_1)\, \gamma\, G(\lambda, s - s'')$$

In the latter integral γ will be a function of $\lambda - (s - s'')$.

It can be proved that

$$(120\,b) \qquad \int_0^{\infty} ds\, \triangle(NG) = 0$$

This shows that integration of eq. (117) with respect to s from 0 to ∞ brings us back to eq. (112). At the same time we have obtained a verification of (118).

Elimination of N from eq. (117) gives:

$$(121) \qquad t\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \lambda}\{(\lambda - s) G\} - a\, G = 2 \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} d\varkappa\, p(\varkappa)\, S - a\, \gamma\, G \right\}$$

30. To simplify as much as possible we may look for a self-preserving solution of the type:

$$(122) \qquad \lambda = x t^{a} \quad , \quad s = z t^{a} \quad ; \quad G = \Phi(x, z)\, t^{-2a}$$

Further we replace γ by 1 and we assume that the only relevant value of $\varkappa$ is zero. We then obtain the following equation for the function Φ:

$$(123) \qquad \{(1-a)\, x - z\} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - a z \frac{\partial \Phi}{\partial z} + (1-a)\, \Phi = T$$

where

$$T = 2 \int_0^{2z} dz_1\, z_1\, \Phi(0, z_1)\, \Phi(x, z - \tfrac{1}{2} z_1).$$

The characteristics of eq. (123) are determined by:

$$dx/dz = -\{(1-a)\, x - z\}/a z,$$

from which:

$$(x - z)\, z^{(1-a)/a} = C.$$

A schematic picture has been given in fig. 9 for the case $a = \frac{2}{3}$, so that the equation of the characteristics becomes $(x - z)\sqrt{z} = C$. The value $C = 0$ gives the diagonal $x = z$.

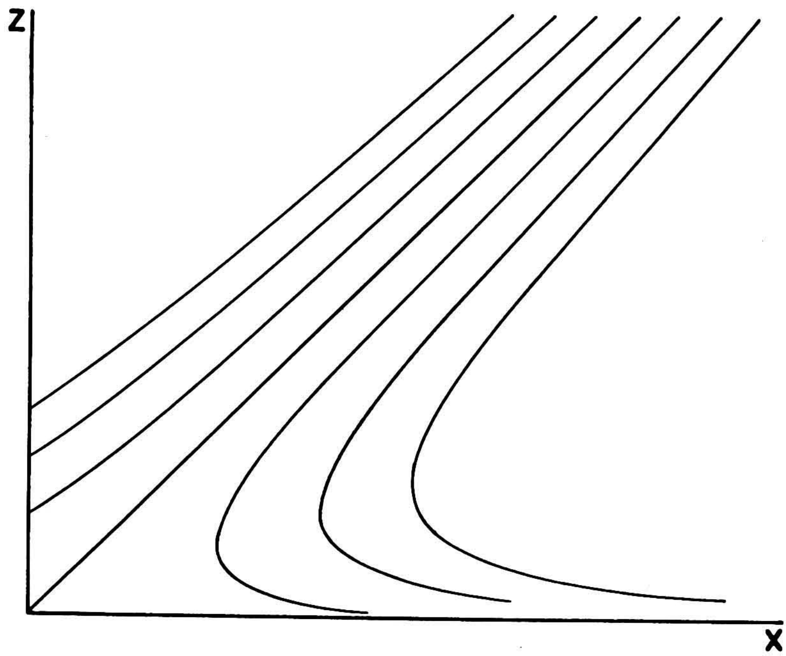

Fig. 9

Along a characteristic the following relation holds:

$$\frac{d\Phi}{\Phi} = \frac{1-a}{a}\frac{dz}{z} - \frac{T}{a\Phi}\frac{dz}{z}.$$

For small z, the quotient T/Φ is of order z^2 (or may be smaller); this makes it possible to use as an approximation:

$$\Phi \cong z^{\frac{1-a}{a}} H \qquad (\text{for } z \to 0),$$

where H has a constant value along a characteristic, which value in general must be supposed to be a function of C.

Since it can be proved that:

$$\int_0^\infty T\,dz = 2\,a \int_0^\infty \Phi\,dz,$$

it follows that for large z we must have $T > 2a\Phi$. We may conclude that:

$$\ln \Phi < \left(\frac{1-a}{a} - 2\right) z + \text{constant}$$

along those branches of the characteristics which go to infinity.

If we assume the function $H(C)$ to be of the type $\exp(-aC^2)$, where a is a constant, we shall get a concentration of representative points along the diagonal $x = z$ and also along the line $z = 0$. The distribution obtained in this way can have a convergent integral $\iint dx\, dz\, \Phi(x, z)$, so that the function Φ can be normalized. However, it may be that integrals of the type $\iint dx\, dz\, x^n \Phi(x, z)$ or $\iint dx\, dz\, z^n \Phi(x, z)$ with $n > 0$ will not be convergent. It cannot be made out at this moment whether the convergence can be improved by a better choice for the function $H(C)$, or by more suitable assumptions for γ and $p(\varkappa)$. It might also be that we are encountering here a real difficulty, which would rule out the existence of self-preserving solutions.

Résumé.

Dans une étude récente sur les théories de la turbulence par MM. Agostini et Bass [14]), les auteurs observent que l'impossibilité d'obtenir de solutions des équations de Navier-Stokes qui ressemblent à la turbulence et par suite de prendre des moyennes sur de telles solutions, nous oblige à nous contenter de prendre les moyennes sur les équations elles-mêmes. On obtient ainsi des équations qui sont vérifiées par les grandeurs statistiques, mais qui ne suffisent pas à les déterminer complètement. La déduction de ces équations constitue le point de départ des travaux modernes sur la turbulence.

Le but de l'article présent (auquel la communication sur la formation de couches tourbillonnaires dans un type simplifié de mouvement turbulent, Proc. **53**, 122 (1950), a servi d'introduction), était de substituer au système d'équations de Navier-Stokes une équation simplifiée, qui néanmoins contiendrait des termes essentiellement importants du point de vue dynamique. Cette équation devrait satisfaire à la condition qu'elle admettrait la construction d'une classe de solutions présentant un caractère propre à rendre efficace l'application de formules statistiques. Dans ce but le nombre de variables dépendantes a été réduit d'abord à deux (dans la communication qui sert d'introduction) et ensuite à une seule. En effectuant cette simplification, l'équation de continuité de l'hydrodynamique a été complètement abandonnée. Comme cette équation joue un rôle très important dans la théorie de la turbulence hydrodynamique, on doit s'attendre à ce que certaines propriétés cinématiques, caractéristiques de la turbulence vraie, ne se retrouvent pas dans les solutions de l'équation à étudier. Mais il reste d'autres propriétés, de nature plutôt dynamique et caractéristiques elles aussi, qui peuvent être vérifiées sur ces solutions. On espère qu'une telle étude pourra aider à discerner entre les traits fondamentaux du phénomène de la turbulence et des traits géométriques de nature plutôt accidentelle.

---

[14]) L. Agostini et J. Bass, Les théories de la turbulence (Public. scient. et techn. du Ministère de l'Air, no. 237, 49, (Paris 1950)).

L'équation sur laquelle porte l'analyse présente la forme:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \tag{1}$$

Elle comporte un terme non-linéaire et un terme du second ordre, multiplié par une constante ν qui est traitée comme très petite. L'équation admet la dérivation d'une équation pour la dissipation d'une "énergie cinétique", ainsi que la formation d'une équation pour la propagation de corrélation, comme celle-ci a été donnée pour la première fois par DE KÁRMÁN et HOWARTH dans le cas de la turbulence hydrodynamique.

La présence du terme non-linéaire dans l'équation (1) (comme aussi des termes correspondants dans le système à deux variables considéré dans la communication précédente) donne lieu à une tendance à former des discontinuités dans la solution, qui pourtant se trouvent être "arrondies" par l'effet du terme $\nu\,(\partial^2 v/\partial y^2)$. On peut interpréter ce phénomène comme une tendance à faire apparaître des régions de dissipation concentrée. Pour bien mettre en évidence ce caractère et pour pouvoir en faire usage dans une analyse statistique, nous nous sommes bornés à un type de solutions approchées, dans lesquelles l'allure de la variable v est donnée par une courbe en forme de scie, présentant des segments inclinés vers la droite (tous parallèles), alternant avec des segments verticaux (ou plutôt presque verticaux, si l'on tient compte de l'effet du terme en ν). La répartition des longueurs λ_i des segments inclinés, celle des hauteurs τ_i/t des segments verticaux, ainsi que celle des hauteurs ζ_i/t des points de milieu des derniers, peuvent faire l'objet d'une statistique et permettent ainsi d'introduire un élément aléatoire dans les solutions.

Certaines relations fournies par l'équation (1) peuvent être utilisées pour déduire un système de "lois de mouvement", qui permettent de suivre le développement dans le temps d'une telle courbe au moyen de règles assez simples. Un phénomène particulier à ce développement est la possibilité de rapprochement de deux segments verticaux consécutifs, qui se confondent en un seul dès que la longueur du segment incliné entre eux est devenue égale à zéro. De cette façon le nombre moyen des segments λ_i par unité de longueur de l'axe des abscisses va en diminuant, et la "longueur d'onde moyenne" du système augmente avec le temps.

Le but principal de l'article a été de déduire des formules exprimant les corrélations $\overline{v_1 v_2}$ et $\overline{v_1^2 v_2}$ par des fonctions statistiques ayant trait à la répartition des λ_i, τ_i, ζ_i. Ici v_1 désigne la valeur de v à un point arbitraire y; v_2 la valeur de v au même instant au point $y + \eta$; on prend la moyenne par rapport à y pour une valeur de η constante, en supposant que de telles moyennes existent pour les solutions prises en vue. Les formules (47) et (53) obtenues dans la seconde partie de l'article se rapportent à une approximation dans laquelle l'influence du terme $\nu\,(\partial^2 v/\partial y^2)$ est négligée; la formule (50) pour $\overline{v_1 v_2}$ tient compte de cette influence.

Ces formules sont introduites dans l'équation fondamentale pour la propagation de corrélation (12) ou (12a). On peut s'attendre à ce que cette substitution puisse conduire à l'établissement de certaines relations entre les fonctions statistiques. Les plus simples ont été données par les équations (55), (57) ou bien par (66) — (68). Ces formules permettent une vérification de quelques relations valables pour la turbulence hydrodynamique. On peut reconnaître aussi dans ces relations l'influence de la diminution graduelle du nombre de segments par unité de longueur de l'axe des abscisses, conséquence déjà signalée du fait que de temps en temps deux segments verticaux peuvent se confondre en un seul.

En faisant usage de certaines transformations il a été possible de démontrer que $\overline{v_1 v_2}$ et $\partial(\overline{v_1^2 v_2})/\partial\eta$ tendent vers zéro quant η augmente indéfiniment (Partie III, section **20**).

Il était possible aussi d'obtenir une formule pour l'intégrale $J_0 = \int\limits_0^\infty \overline{v_1 v_2}\, d\eta$ et de démontrer que pour toute solution donnée cette quantité reste indépendante du temps. La question de savoir si cette intégrale peut prendre une valeur zéro, n'a pas été abordée; on a supposé que sa valeur serait positive. Sous ce rapport l'absence d'une équation de continuité peut introduire une différence notable entre le système étudié et le cas de la turbulence hydrodynamique.

Après avoir donné quelques formules pour les fonctions spectrales correspondant à $\overline{v_1 v_2}$ et $\overline{v_1^2 v_2}$, on a étudié les relations obtenues lorsqu'on introduit l'hypothèse que le développement dans le temps des fonctions de corrélation doit satisfaire à une loi de similitude (sections **24**, **25**). De cette façon on réussit à exprimer toute une série de grandeurs caractéristiques du système au moyen d'une seule fonction Ω, définie par l'équation (82). Mais on n'obtient pas une relation qui puisse servir à trouver une forme générale pour cette fonction.

Ici, de nouveau, on a l'impression que l'application de l'équation pour la propagation de corrélation ne traduit pas suffisamment toutes les propriétés statistiques qui déterminent le développement d'une solution. Sans doute il faut chercher une méthode statistique encore plus fondamentale. Quelques tentatives sont exposées dans la dernière partie de la communication; on a essayé de traiter les segments λ_i comme des éléments conservant une certaine individualité pendant le développement du système dans le temps et de former une équation de BOLTZMANN à laquelle devrait satisfaire la fonction de répartition correspondante. Les difficultés qui se présentent ici ne permettent pas encore de porter ces tentatives à un résultat définitif.

L'étude abordée dans cet article des problèmes statistiques se rattachant aux solutions de l'équation (1), n'est pas terminée. Il se pose par exemple des questions concernant la validité de la solution approchée, quand deux (ou même plusieurs) segments verticaux de la courbe pour v se trouvent très rapprochés, et aussi quand la solution arrive dans sa dernière phase où l'amplitude de v est devenue très petite. D'autre part des questions ayant trait à la répartition des longueurs λ_i, τ_i, ζ_i sur des grandes distances, sont laissées ouvertes. Des détails de cette répartition peuvent influencer sur la grandeur de l'invariant J_0, ainsi que sur des autres grandeurs statistiques. Enfin on devra envisager encore le problème de la transmission de l'énergie d'une région du spectre à une autre. Il sera possible, peutêtre, de revenir sur ces problèmes dans une communication ultérieure.

Malgré ces lacunes nous espérons que les considérations presentées dans cet article démontront que l'étude d'un "modèle mathématique" pourra contribuer au développement de nos connaissances sur la turbulence.