Mathematics. — *Contradictoriteit der elementaire meetkunde.* By L. E. J. BROUWER.

(Communicated at the meeting of March 26, 1949.)

In een vroegere mededeeling [1]) is de contradictoriteit der aequivalentie der relaties „>0" en „$\circ>0$" aangetoond [2]). Hieruit volgt tevens de contradictoriteit der aequivalentie der relaties „≥ 0" en „òf $=0$ òf $\circ>0$". Immers laatstgenoemde aequivalentie zou eerstgenoemde impliceeren.

Beschouwen we de *snijpuntsstelling der Euclidische planimetrie*, luidende dat voor elke twee lijnen a en l van het Euclidische vlak, die nòch kunnen samenvallen nòch evenwijdig kunnen zijn, een gemeenschappelijk punt kan worden aangewezen. Nemen we een rechthoekig coördinatenstelsel aan, en kiezen we voor a de X-as en voor l uitsluitend lijnen door het punt $P(0, 1)$ met richtingscoëfficiënt ≤ 0 en ≥ -1, dan leert de snijpuntsstelling in het bijzonder, dat voor elke lijn l door P met richtingscoëfficiënt <0 en ≥ -1 een snijpunt S met de X-as kan worden aangewezen, derhalve een natuurlijk getal $n(l)$ kan worden aangegeven zoodanig dat $x_S < 2^{n(l)}$, derhalve voor de richtingscoëfficiënt $\varrho(l)$ van l de relatie $\varrho(l) < -2^{-n(l)}$, dus de relatie $\varrho(l) <\circ\ 0$ geldt. Daar derhalve uit de snijpuntsstelling der planimetrie de contradictoor gebleken aequivalentie der relaties „<0" en „$<\circ\ 0$" volgt, *is de snijpuntsstelling der Euclidische planimetrie eveneens contradictoor gebleken.*

De hieruit voortvloeiende *contradictoriteit der Euclidische planimetrie* is evenwel door deze uitsluitend in de verte plaatsvindende manifestatie nauwelijks afdoende gedemonstreerd, terwijl de *snijpuntsstelling der projectieve planimetrie*, luidende dat voor elke twee lijnen van het projectieve vlak, die niet kunnen samenvallen, een gemeenschappelijk punt kan worden aangewezen, hierdoor nog niet wordt aangetast.

Beschouwen we wederom [1]) den met het eenheidscontinuum samenvallenden puntwaaier J. Zij f een willekeurig punt van J, verstaan we onder α_f de assertie, die f rationaal verklaart, en beschouwen we de soort σ der sequenties $S(\gamma, \alpha_f)$ en de soort η der correspondeerende tweezijdige dempingsgetallen $E(\gamma, \alpha_f)$, waarbij γ steeds voorstelt de tweevleugelige aanstuiving met kern 0 en telgetallen $(-1)^n 2^{-n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, doch f vrij varieert binnen J, met dien verstande dat het n^{de} element $k_n^{(\mu_n)}$ van f steeds na $c_n(\gamma, \alpha_f)$ doch vóór $c_{n+1}(\gamma, \alpha_f)$ wordt geschapen.

---

[1]) Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **52**, p. 122 (1949).

[2]) Als resultaat der mededeeling is de non-aequivalentie van $>$ en $\circ>$ geformuleerd. De bewijsgang levert echter het verder strekkende resultaat der non-aequivalentie van „>0" en „$\circ>0$".

Zouden nu te eeniger tijd de relaties „$\neq 0$" en „òf < 0 òf > 0" voor het continuum aequivalent blijken, dan zou daarmee in het bijzonder voor elk element e van η kunnen worden aangetoond:

hetzij $e < 0$, in welk geval de onmogelijkheid van $e \circ\!> 0$, dus de absurditeit der rationaliteit van f zou zijn gebleken,

hetzij $e > 0$, in welk geval de onmogelijkheid van $e <\!\circ\ 0$, dus de niet-contradictoriteit der rationaliteit van f zou zijn gebleken.

Derhalve zou het eenheidscontinuum zijn *gesplitst* in twee puntkernsoorten, in elk van welke een element zou kunnen worden aangewezen, hetgeen onmogelijk is [3]). Zoodat van de aequivalentie der relaties „$\neq 0$" en „òf < 0 òf > 0" voor het continuum de absurditeit is gebleken.

Hieruit volgt tevens de contradictoriteit der aequivalentie van „$a = a$" en „òf $a \leq 0$ òf $a \geq 0$" voor het continuum. Immers laatstgenoemde aequivalentie zou eerstgenoemde impliceeren.

Beschouwen we een Euclidisch vlak met een rechthoekig coördinatenstelsel. Zij a de X-as, m de lijn $x = 1$, α een willekeurig reëel getal $\neq 0$, β de absolute waarde van α, P het punt $(-1, 2\beta)$, Q het punt $(1, \alpha)$, l de verbindingslijn der punten P en Q, γ een zoowel van $\frac{1}{3}$ als van 3 verwijderd liggend reëel getal. Dan snijdt de verbindingslijn van P met het punt $(\gamma, 0)$ de lijn m in het punt $\left(1, 2\beta\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)$, dat met Q slechts kan samenvallen, als hetzij $2\beta\,\frac{\gamma-1}{\gamma+1} = \beta$, hetzij $2\beta\,\frac{\gamma-1}{\gamma+1} = -\beta$, d.w.z. als hetzij $\beta(\gamma-3) = 0$, hetzij $\beta(3\gamma-1) = 0$, welke vergelijkingen beide valsch zijn, zoodat het onmogelijk is, dat de verbindingslijn l van P en Q de X-as a snijdt in het punt $(\gamma, 0)$.

Mocht derhalve voor de lijnen l en a een snijpunt kunnen worden aangewezen, dan is dit òf het punt $(\frac{1}{3}, 0)$, òf het punt $(3, 0)$. In het eerste geval is α noodzakelijk < 0, in het laatste geval > 0.

Gold dus de snijpuntsstelling der projectieve planimetrie, kon derhalve voor iedere $\alpha \neq 0$ een gemeenschappelijk punt van a en l worden aangewezen, dan zouden de relaties „$\neq 0$" en „òf < 0 òf > 0" voor het continuum aequivalent zijn. Zoodat wegens de contradictoriteit dezer aequivalentie *eveneens de snijpuntsstelling der projectieve planimetrie contradictoor is gebleken,* waarmee zoowel van de Euclidische als van de projectieve planimetrie de contradictoriteit afdoende is gedemonstreerd.

Verwacht mag worden dat, met behulp van uit vrije variatie van f voortvloeiende soorten van dempingsgetallen door α_f, ook van andere reeds onjuist gebleken theorieën der klassieke wiskunde de contradictoriteit zal kunnen worden vastgesteld.

---

[3]) Vgl. Mathem. Annalen **97**, p. 66, noot [10]).