Die weitere Entscheidung, ob man mit einer Torse oder mit einem Kegel zu tun hat, gibt die Differentialkomitante (mit veränderlichen Linienkoordinaten π_{ik} und ϱ_{ik})

$$V^* = (01^2\,\pi^2)\,(02^2\,\varrho^2) = (aa_1{}^2\,\pi^2)\,(aa_2{}^2\,\varrho^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

$V^* \not\equiv 0$ gibt die Torsen. $V^* \equiv 0$ die Kegel. Dass V^* bei Kegeln, also für $a_{ik} = (ys)_{ik}$, $s = \text{const.}$, verschwindet, rechnet man leicht nach. Bei $a_{ik} = (yy')_{ik}$ wird

$$V^* = (yy'\,y''\,\pi^2)\,.\,(yy'\,y''\,\varrho^2).$$

Wäre dies für alle π_{ik} und ϱ_{ik} Null, so würde

$$y'' = \alpha\,.\,y + \beta\,y' \quad , \quad C_y = \text{Gerade} \quad , \quad a_{ik} = \text{const.}$$

folgen, also keine Fläche F vorliegen.

Bei den abwickelbaren Flächen F mit $U^* \equiv 0$, die also in einem R_3 liegen, gibt schliesslich neben V^* noch die Komitante

$$W^* = (012^2\,x)\,(0\,v')\,(1\,w') = (aa_1\,a_2{}^2\,x)\,(av')\,(a_1\,w') \quad . \quad . \quad (30)$$

eine letzte Einteilung: $W^* \not\equiv 0$, F ist nicht eben; $W^* \equiv 0$, F ist eben. Berechnet man W^* für $a_{ik} = (yy')_{ik}$ so entsteht

$$W^* = (yy'\,y''\,y'''\,x)\,.\,(y\,v')\,(y\,w')$$

und $W^* \equiv 0$ ist für eine ebene Kurve C_y notwendig und hinreichend.

Bei einem Kegel mit $a_{ik} = (ys)_{ik}$ haben wir

$$W^* = (yy'\,y''\,sx)\,.\,(sv')\,(sw')$$

und auch hier ist $W^* \equiv 0$ für einen ebenen Kegel, d.h. für ein Geradenbüschel notwendig und hinreichend.

Wir stellen nach Obigem für eine erste Klassifikation der analytischen Regelflächen des R_4 vom projektiv-differentialgeometrischen Standpunkte aus, folgende Tabelle zusammen:

$$M'_{02} \not\equiv 0,\ \text{nicht-abwickelbare } F \begin{cases} H \not\equiv 0, \text{ allgemeine Fläche} \\ H \equiv 0, F \text{ in einem } R_3 \end{cases}$$

$$M'_{02} \equiv 0,\ \text{abwickelbare Fläche } F \begin{cases} U^* \not\equiv 0, F \text{ im } R_4 \begin{cases} V^* \not\equiv 0, \text{ Torse des } R_4 \\ V^* \equiv 0, \text{ Kegel des } R_3 \end{cases} \\ U^* \equiv 0, F \text{ im } R_3 \begin{cases} V^* \not\equiv 0,\ W^* \not\equiv 0, \text{ Torse im } R_3 \\ V^* \not\equiv 0,\ W^* \equiv 0, F \text{ gebildet von den} \\ \qquad \text{Tangenten einer ebenen Kurve} \\ V^* \equiv 0,\ W^* \not\equiv 0, \text{ Kegel im } R_3 \\ V^* \equiv 0,\ W^* \equiv 0, \text{ Geradenbüschel} \end{cases} \end{cases}$$

Mathematics. — *Ueber Differentialkomitanten zweier kontravarianter Grössen* [1]. Von J. A. SCHOUTEN.

(Communicated at the meeting of March 30, 1940.)

Bekanntlich lässt sich aus einem kontravarianten Vektor $v^\varkappa$ und einem beliebigen Affinor $P^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}_{\cdot \quad \cdot\ \lambda_1 \ldots \lambda_q}$ in folgender Weise eine Differentialkomitante bilden

$$\left. \begin{aligned} Q^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}_{\cdot \quad \cdot\ \lambda_1 \ldots \lambda_q} = v^\mu\, \partial_\mu P^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}_{\cdot \quad \cdot\ \lambda_1 \ldots \lambda_q} - \sum_i^{1,\ldots,p} P^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_{i-1}\, \mu \varkappa_{i+1} \ldots \varkappa_p}_{\cdot \qquad\qquad\quad \cdot\ \lambda_1 \ldots \lambda_q}\, \partial_\mu v^{\varkappa_i} \\ + \sum_j^{1,\ldots,q} P^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}_{\cdot \quad \cdot\ \lambda_1 \ldots \lambda_{j-1}\, \mu \lambda_{j+1} \ldots \lambda_q}\, \partial_{\lambda_q} v^\mu \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Dass dieser Ausdruck tatsächlich ein Affinor ist, folgt daraus, dass

$$\left. \begin{aligned} Q^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}_{\cdot \quad \cdot\ \lambda_1 \ldots \lambda_q} = v^\mu\, \nabla_\mu P^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}_{\cdot \quad \cdot\ \lambda_1 \ldots \lambda_q} - \sum_i^{1,\ldots,p} P^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_{i-1}\, \mu \varkappa_{i+1} \ldots \varkappa_p}_{\cdot \qquad\qquad\quad \cdot\ \lambda_1 \ldots \lambda_q}\, \overleftarrow{\nabla}_\mu v^{\varkappa_i} \\ + \sum_j^{1,\ldots,q} P^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}_{\cdot \quad \cdot\ \lambda_1 \ldots \lambda_{j-1}\, \mu \lambda_{j+1} \ldots \lambda_q}\, \overleftarrow{\nabla}_{\lambda_j} v^\mu \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ist, wo ∇ das Symbol der kovarianten Ableitung einer linearen Uebertragung mit *beliebigen* Parametern $\Gamma^\varkappa_{\mu\lambda}$ ist und $\overleftarrow{\nabla}$ das Symbol der kovarianten Ableitung mit den Parametern ${}'\Gamma^\varkappa_{\mu\lambda} = \Gamma^\varkappa_{\lambda\mu}$. Der Beweis erfolgt, indem man (2) ausschreibt und feststellt, dass alle Glieder mit $\Gamma^\varkappa_{\mu\lambda}$ sich gegenseitig aufheben. Der Ausdruck

$$\underset{L}{\delta}\, P^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}_{\cdot \quad \cdot\ \lambda_1 \ldots \lambda_q} = R^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}_{\cdot \quad \cdot\ \lambda_1 \ldots \lambda_q}\, dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

ist das LIE'sche Differential von $P^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}_{\cdot \quad \cdot\ \lambda_1 \ldots \lambda_q}$ in bezug auf die infinitesimale Verrückung $v^\varkappa\, dt$. Dieser Differentialausdruck ist 1931 von W. SLEBODZINSKI [2]) gebildet und hat seitdem vielfach Anwendung

---

[1]) Die Differentialinvarianten kovarianter Grössen sind behandelt von R. WEITZENBÖCK in Ueber Differentialinvarianten von kovarianten Tensoren, Proc. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **29**, 400—403 (1926).

[2]) W. SLEBODZINSKI, Sur les équations canoniques de HAMILTON. Bull. Acad. Royale de Belgique (5) **17**, 864—870 (1931).

gefunden, insbesondere bei Variationsproblemen. Geometrisch bedeutet das LIE'sche Differential die Differenz zwischen dem wirklichen Feldwert und dem über $v^{\varkappa}\,dt$ „mitgeschleppten" Feldwert [1]).

Es seien nun zwei kontravariante Affinoren $P^{\mu\varkappa_1\ldots\varkappa_a}$ und $Q^{\lambda\varkappa_1\ldots\varkappa_b}$ von der Valenz $a+1$ bzw. $b+1$ gegeben. Dann gilt die Gleichung

$$\left.\begin{aligned}
R^{\varkappa_1\ldots\varkappa_{a+b+1}} &\overset{\text{def}}{=} \sum_i^{0,\ldots,a} \mathfrak{P}^i\, P^{\{\varkappa_1\ldots\varkappa_i\,|\mu|\,\varkappa_{i+1}\ldots\varkappa_a}\, \partial_\mu\, Q^{\varkappa_{a+1}\ldots\varkappa_{a+b+1}\}}\\
&- \sum_j^{0,\ldots,b} \mathfrak{P}^{ab+a+b+j} Q^{\{\varkappa_1\ldots\varkappa_j\,|\lambda|\,\varkappa_{j+1}\ldots\varkappa_b}\, \partial_\lambda\, P^{\varkappa_{b+1}\ldots\varkappa_{a+b+1}\}} =\\
&= \sum_i^{0,\ldots,a} \mathfrak{P}^i\, P^{\{\varkappa_1\ldots\varkappa_i\,|\mu|\,\varkappa_{i+1}\ldots\varkappa_a}\, \nabla_\mu\, Q^{\varkappa_{a+1}\ldots\varkappa_{a+b+1}\}}\\
&- \sum_j^{0,\ldots,b} \mathfrak{P}^{ab+a+b+j}\, Q^{\{\varkappa_1\ldots\varkappa_j\,|\lambda|\,\varkappa_{j+1}\ldots\varkappa_b}\, \overleftarrow{\nabla}_\lambda\, P^{\varkappa_{b+1}\ldots\varkappa_{a+b+1}\}}
\end{aligned}\right\} . \qquad (4)$$

wo $\{\,\}$ bedeutet, dass die Summe aller *geraden* Permutationen der eingeklammerten Indizes genommen und durch deren Anzahl dividiert werden soll (sodass also $\{\,\} = (\,) + [\,]$ ist) und $\mathfrak{P}^i$ ein gerader oder ungerader Permutationsoperator dieser Indizes ist für i gerade bzw. ungerade. Es ist also z.B. $\mathfrak{P}\{\varkappa\lambda\nu\} = \{\lambda\varkappa\nu\}$ und $\mathfrak{P}^2\{\varkappa\lambda\nu\} = \{\varkappa\lambda\nu\}$. ∇ und $\overleftarrow{\nabla}$ haben dieselbe Bedeutung wie oben.

Beweis.

Schreibt man die rechte Seite der Gleichung aus, so fallen die Terme, die $\Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda}$ nicht enthalten, gegen die linke Seite fort und es bleibt

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_i^{0,\ldots,a} \sum_j^{0,\ldots,b} \mathfrak{P}^i\, P^{\{\varkappa_1\ldots\varkappa_i|\mu|\varkappa_{i+1}\ldots\varkappa_a}\, \Gamma^{\varkappa_{a+j+1}}_{\mu\lambda}\, Q^{\varkappa_{a+1}\ldots\varkappa_{a+j}|\lambda|\varkappa_{a+j+2}\ldots\varkappa_{a+b+1}\}} -\\
-&\sum_j^{0,\ldots,b} \sum_i^{0,\ldots,a} \mathfrak{P}^{ab+a+b+j}\, Q^{\{\varkappa_1\ldots\varkappa_j|\lambda|\varkappa_{j+1}\ldots\varkappa_b}\, \Gamma^{\varkappa_{b+i+1}}_{\mu\lambda}\, P^{\varkappa_{b+1}\ldots\varkappa_{b+i}|\mu|\varkappa_{b+i+2}\ldots\varkappa_{a+b+1}\}} =\\
=&\sum_i^{0,\ldots,a} \sum_j^{0,\ldots,b} \mathfrak{P}^{i+j+b}\, P^{\{\varkappa_1\ldots\varkappa_i|\mu|\varkappa_{i+1}\ldots\varkappa_a}\, Q^{\varkappa_{a+1}\ldots\varkappa_{a+j}|\lambda|\varkappa_{a+j+1}\ldots\varkappa_{a+b}}\, \Gamma^{\varkappa_{a+b+1}\}}_{\mu\lambda} -\\
-&\sum_j^{0,\ldots,b} \sum_i^{0,\ldots,a} \mathfrak{P}^{i+j+b}\, P^{\{\varkappa_1\ldots\varkappa_i|\mu|\varkappa_{i+1}\ldots\varkappa_a}\, Q^{\varkappa_{a+1}\ldots\varkappa_{a+j}|\lambda|\varkappa_{a+j+1}\ldots\varkappa_{a+b}}\, \Gamma^{\varkappa_{a+b+1}\}}_{\mu\lambda} = 0
\end{aligned}\right\} . \qquad (5)$$

womit der Beweis geliefert ist.

Da R also ein Affinor ist, ist eine Differentialkomitante von der Valenz

[1]) Vergl. Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie von J. A. SCHOUTEN und D. J. STRUIK, I 142, II 161.

$a+b+1$ entstanden, die sich bei Zerlegung von $\{\,\}$ in $(\,)$ und $[\,]$ auch folgendermassen schreiben lässt:

$$\left.\begin{aligned}
R^{\varkappa_1\ldots\varkappa_{a+b+1}} = &\sum_i^{0,\ldots,a} P^{(\varkappa_1\ldots\varkappa_i|\mu|\varkappa_{i+1}\ldots\varkappa_a}\, \partial_\mu\, Q^{\varkappa_{a+1}\ldots\varkappa_{a+b+1})}\\
+ &\sum_i^{0,\ldots,a} (-1)^i\, P^{[\varkappa_1\ldots\varkappa_i|\mu|\varkappa_{i+1}\ldots\varkappa_a}\partial_\mu\, Q^{\varkappa_{a+1}\ldots\varkappa_{a+b+1}]}\\
- &\sum_j^{0,\ldots,b} Q^{(\varkappa_1\ldots\varkappa_j|\lambda|\varkappa_{j+1}\ldots\varkappa_b}\, \partial_\lambda\, P^{\varkappa_{b+1}\ldots\varkappa_{a+b+1})}\\
- &\sum_j^{0,\ldots,b} (-1)^{ab+a+b+j}\, Q^{[\varkappa_1\ldots\varkappa_j|\lambda|\varkappa_{j+1}\ldots\varkappa_b}\, \partial_\lambda\, P^{\varkappa_{b+1}\ldots\varkappa_{a+b+1}]}
\end{aligned}\right\} . \qquad (6)$$

in welchem Ausdruck natürlich ebenfalls ∂_μ durch ∇_μ und (gleichzeitig!) ∂_λ durch $\overleftarrow{\nabla}_\lambda$ ersetzt werden darf.

Die gefundene Differentialkomitante hat einige merkwürdige Eigenschaften.

1. Ist $a=0$, so geht R nur für $b=0$ und für $b=1$ über in die Komitante, die sich nach der Vorschrift (1) bilden lässt. Für $a=0$ und $b>1$ entsteht die Summe des alternierenden und des symmetrischen Teiles letzterer Komitante. Die neue Komitante bringt also erst für $a>0$, $b>0$ Neues.

2. Ist $P\,(Q)$ symmetrisch bzw. alternierend, so geht in R für $a>0$, $b>0$ nur der symmetrische bzw. alternierende Teil von $Q\,(P)$ ein. Ist dieser Teil also Null, so ist auch R Null. Insbesondere ist also die Komitante einer symmetrischen und einer alternierenden Grösse Null.

3. Zwei symmetrische (alternierende) Grössen bilden für $a>0$, $b>0$ eine symmetrische (alternierende) Komitante. Statt (6) kommt für symmetrische Grössen einfacher

$$\left.\begin{aligned}
R^{\varkappa_1\ldots\varkappa_{a+b+1}} = (a+1)\, P^{\mu(\varkappa_1\ldots\varkappa_a}\, \partial_\mu\, Q^{\varkappa_{a+1}\ldots\varkappa_{a+b+1})} -&\\
-(b+1)\, Q^{\mu(\varkappa_1\ldots\varkappa_b}\, \partial_\mu\, P^{\varkappa_{b+1}\ldots\varkappa_{a+b+1})}&
\end{aligned}\right\} . \qquad (7)$$

und für alternierende Grössen

$$\left.\begin{aligned}
R^{\varkappa_1\ldots\varkappa_{a+b+1}} = (a+1)\, P^{\mu[\varkappa_1\ldots\varkappa_a}\, \partial_\mu\, Q^{\varkappa_{a+1}\ldots\varkappa_{a+b+1}]} -&\\
-(-1)^{ab+a+b}\,(b+1)\, Q^{\mu[\varkappa_1\ldots\varkappa_b}\, \partial_\mu\, P^{\varkappa_{b+1}\ldots\varkappa_{a+b+1}]}&
\end{aligned}\right\} . \qquad (8)$$

Beide Formeln gelten auch wenn $a=0$ $(b=0)$ und $Q\,(P)$ für $b>0$ $(a>0)$ symmetrisch bzw. alternierend ist. R ist dann also auch symmetrisch bzw. alternierend.

4. Genügt ein Vektor w_λ einem System von Gleichungen

$$X_a^{\mu\varkappa_1\ldots\varkappa_{s_a}}\, w_\mu\, w_{\varkappa_1} \ldots . \, w_{\varkappa_{s_a}} = 0 \; ; \; a = 1, \ldots, p \quad \ldots \quad (9)$$

wo die $X_a^{\mu\varkappa_1\ldots\varkappa_{s_a}}$ symmetrisch sind, und schreibt man $X_{ab}^{\mu\varkappa_1\ldots\varkappa_{s_a+s_b}}$ für die Komitante von X_a und X_b, so beweist man leicht, dass

$$\left.\begin{aligned} &X_{ab}^{\mu\varkappa_1\ldots\varkappa_{s_a+s_b}}\, w_\mu\, w_{\varkappa_1} \ldots . \, w_{\varkappa_{s_a+s_b}} = \\ &= 2\,(s_a+1)\,(s_b+1)\, X_a^{\lambda\varkappa_1\ldots\varkappa_{s_a}}\, X_b^{\mu\nu_1\ldots\nu_{s_b}}\, w_{\varkappa_1} \ldots . \, w_{\varkappa_{s_a}}\, w_{\nu_1} \ldots . \, w_{\nu_{s_b}}\, \partial_{[\mu} w_{\lambda]} \end{aligned}\right\} . \quad (10)$$

ist, in welcher Gleichung man rechts wegen der Symmetrie der X statt über $\mu\lambda$ auch über ab alternieren darf. Sind die Valenzen der X_a alle eins und ist gefordert dass $\partial_{[\mu} w_{\lambda]} = 0$ sei, also $w_\lambda = \partial_\lambda p$, so ist (9) ein System linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung in p und man benutzt dann die Beziehung (10) bekanntlich dazu um das System (9) zu verlängern und zu einem vollständigen System zu gelangen. Ueber einen ähnlichen Verlängerungsprozess der Gleichungen (9) mittels (10) für allgemeine Werte der Valenzen, wenn allgemeinere Forderungen für $\partial_{[\mu} w_{\lambda]}$ aufgestellt werden, soll in einer folgenden Mitteilung berichtet werden.

Mathematics. — *Beiträge zur Theorie der Systeme* PFAFF*scher Gleichungen. III. Beweis des Hauptheorems für den Fall dass der Rang den höchsten Wert hat.* Von J. A. SCHOUTEN und W. VAN DER KULK.

(Communicated at the meeting of March 30, 1940.)

1. *Formulierung des Hauptheorems.*

a. Es sei

$$C_\lambda^x\, dx^\lambda = 0 \; ; \; x = p+1, \ldots, n \quad \ldots \quad (1)$$

ein System von $q = n - p$ linear unabhängigen PFAFFschen Gleichungen in n Variabeln und

$$B_b^\varkappa\, \partial_\varkappa f = 0 \; ; \; b = 1, \ldots, p \; ; \; B_b^\mu\, C_\mu^x = 0 . \quad \ldots \quad (2)$$

das adjungierte System von p linear unabhängigen partiellen Differentialgleichungen und es seien die C_λ^x und $B_b^\varkappa$ analytisch in der Umgebung des beliebig gewählten Punktes $x^\varkappa = \underset{0}{x}{}^\varkappa$.

Ferner sei

$$C_{[\dot a_1 \dot b_1}{}^{x_1} \ldots . \, C_{\dot a_\sigma \dot b_\sigma]}{}^{x_\sigma} \begin{cases} = 0 \text{ für } \sigma > \varrho \\ \neq 0 \text{ für } \sigma = \varrho \end{cases} ; \; C_{ab}^{\cdot\cdot x} = 2\, C_\lambda^x\, B_{[a}^\mu\, \partial_{|\mu|}\, B_{b]}^\lambda . \quad . \quad (3)$$

d.h. es sei der Halbrang (nach ENGEL) von (1) gleich ϱ. $(2\varrho \leqq p)$. Sodann besitzt das System von $p - \varrho$ multilinearen Differentialgleichungen mit $\varrho + 1$ Unbekannten

$$\left\| \begin{matrix} X_1 \overset{1}{p} \; ; \; \ldots & X_1 \overset{\varrho+1}{p} \\ \vdots & \vdots \\ X_p \overset{1}{p} \; ; \; \ldots & X_p \overset{\varrho+1}{p} \end{matrix} \right\| = \text{Matrix vom Range } \varrho ; \qquad X_b = B_b^\mu\, \partial_\mu \quad . \quad (4)$$

ein System von Lösungen $\overset{1}{p}, \ldots, \overset{\varrho+1}{p}$, das im Punkte $x^\varkappa = \underset{0}{x}{}^\varkappa$ der Gleichung

$$(\partial_{[\lambda_1} \overset{1}{p})\,(\partial_{\lambda_2} \overset{2}{p}) \ldots . \,(\partial_{\lambda_{\varrho+1}]} \overset{\varrho+1}{p}) = Q_{[\lambda_1} P_{\lambda_2 \ldots . \lambda_{\varrho+1}]} \quad \ldots \quad (5)$$

genügt. In dem Ausdrucke rechts ist Q_λ ein Vektor in $x^\varkappa = \underset{0}{x}{}^\varkappa$ der Teiler von $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_q} = C_{[\lambda_1}^{p+1} \ldots C_{\lambda_q]}^{n}$ ist, d. h. die Gleichung

$$B_a^\lambda\, Q_\lambda = 0 ; \; a = 1, \ldots, p \quad \ldots \quad (6)$$