electrolytes on the electrophoretic velocity of a 12 hours old, so negative sol with $2 \,.\, 10^{-5}$ g. mol $AgNO_3$ per liter in excess. The negative ions influence the normal double layer, the positive ions the new double layer of the crystal surfaces.

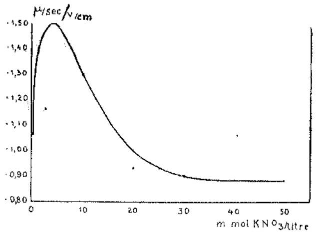

Fig. 9

1⁰. KNO_3. Small quantities of KNO_3 strongly increased the electrophoretic velocity of the sol. A maximum set in at about 3 m. mol/liter. At higher concentrations the velocity again became smaller (Fig. 9).

This has been frequently observed. We have to deal here with a relaxation effect. Owing to the fact that there are so few ions in the solution, the layer of counter ions of the particles cannot be replenished sufficiently rapidly during electrophoresis, so that the particles are inhibited electrostatically by the counter ions moving in the opposite direction. Only little electrolyte is required to neutralize this effect.

The same effect was observed on a positive hydrophobic Fe_2O_3 sol. Here the electrophoretic velocity was about doubled by 5 m. mol KNO_3.

2⁰. $BaNO_3$. The Ba''-ion had such a preponderantly lowering influence that here no maximum was found.

3⁰. K_2SO_4 and $CH(SO_3K)_3$. In these salts again a maximum set in. At higher concentrations the electrophoretic velocity was not so strongly lowered by K_2SO_4 as by KNO_3. The influence of $CH(SO_3K)_3$ was still smaller.

Conc.	KNO_3	K_2SO_4	$CH(SO_3K)_3$
0 m. equiv./l.	−1.22 μ/sec/V/cm	−1.22 μ/sec/V/cm	−1.22 μ/sec/V/cm
20 „ „ „	−1.27 „	(−1.17) „	−1.57 „
30 „ „ „	−0.88 „	−1.01 „	−1.57 „

The K^+-ions compress the unknown double layer equally strongly in all salts. The ions of higher valency SO_4'' and $CH(SO_3)_3'''$, however, compress the normal double layer much more strongly than the NO_3'-ion, so that altogether the electrophoretic velocity is not so strongly reduced. In this sol, consequently, a double rule of SCHULZE–HARDY is observed.

8. *Summary.*

A dilute AgBr sol becomes rapidly extinct. During a few hours a flocculation takes place, which slowly comes to an end, owing to increasing stability of the sol. Sols with excess of $AgNO_3$ adsorb Ag^+-ions, but finally become negative under the influence of a new double layer, the construction of which is yet unknown, on the crystal surfaces formed by internal recrystallization.

Mathematics. — *Une inégalité relative aux sommes de* WEYL. Par
J. G. VAN DER CORPUT.

(Communicated at the meeting of May 20, 1939.)

Dans cet article X désigne un entier $\geqq 2$.

P désignant un entier et

$$f(y) = \frac{a}{n!}\, y^n + a_1\, y^{n-1} + \ldots + a_n$$

un polynôme à coefficients réels, chaque somme de la forme

$$\sum_{y=P+1}^{P+X} e^{2\pi i f(y)}$$

s'appelle une somme de WEYL. Dans la théorie analytique des nombres nous avons besoin d'une borne supérieure pour le module de

$$S = X^{-1} \sum_{y=P+1}^{P+X} e^{2\pi i f(y)}.$$

Supposons que n soit > 1, que τ soit un nombre $\geqq 1$ et $\frac{a}{q}$ une fraction irréductible à dénominateur positif, tels que nous ayons $\left| a - \frac{a}{q} \right| \leqq \frac{\tau}{q^2}$.
Comme il est connu, dans ces conditions à tout nombre positif ε correspond un nombre c_1, dépendant uniquement de ε et n tel que

$$|\, S \,|^{2^{n-1}} < c_1\, X^{\varepsilon} \left(\tau + \frac{q \log q}{X} \right) \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{X^{n-1}} \right). \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Cette formule, qui a été appliquée à plusieurs reprises dans la théorie additive des nombres, n'a pas d'intérêt quand l'ordre de grandeur de q est moins élevée que celui de chaque puissance de X à exposant fixe; en effet, dans ce cas le membre de droite de (1) tend vers l'infini avec X. C'est précisément ce désavantage qui rend jusqu'à présent la formule inutile dans la théorie additive des nombres premiers. Cette difficulté provient du facteur X^{ε}. M. VINOGRADOW [1]) a remplacé l'inégalité par une

[1]) Einige allgemeine Primzahlsätze. Travaux de l'Institut mathématique de Tbilissi, 3, 35—67 (1938); voir p. 36, Hilfssatz 2.

autre, qui ne contient pas ce facteur X^{ε}, mais sa formule ne contient pas (1). Dans cet article je déduirai une inégalité qui est plus précise que (1) et en même temps plus précise que la formule de VINOGRADOW, à savoir:

Dans les conditions citées, à tout nombre positif $\varepsilon \leqq \frac{1}{2}$ *correspond un nombre* c_2, *dépendant uniquement de* ε *et de* n, *tel qu'on ait*

$$|S|^{2^{n-1}} < c_2 x^{\sigma} \left(\tau + \frac{q}{X}\right)^{1-\varepsilon} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{X^{n-1}}\right)^{1-\varepsilon}; \quad . \; . \; . \quad (2)$$

dans cette formule on a

$$x = \log X \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{(n-1)^l - 1}{l}, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

où l *désigne le plus petit entier* $\geqq \frac{1}{\varepsilon}$.

Il est clair que (1) suit immédiatement de (2), même sans le facteur $\log q$; en effet, si $\sigma_1 = \frac{(n-1)^{l_1} - 1}{l_1}$, où l_1 est le plus petit entier $\geqq \frac{1}{2\varepsilon}$, on a $x^{\sigma_1} < c_3 X^{\frac{1}{2}\varepsilon}$, où c_3 ne dépend que de ε et de n (de même c_4 plus loin) et

$$\left(\tau + \frac{q}{X}\right)^{-\frac{1}{2}\varepsilon} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{X^{n-1}}\right)^{-\frac{1}{2}\varepsilon} < X^{\frac{1}{2}\varepsilon},$$

de sorte que la formule (2), appliquée avec $\frac{1}{2}\varepsilon$ au lieu de ε, donne

$$|S|^{2^{n-1}} < c_4 X^{\varepsilon} \left(\tau + \frac{q}{X}\right) \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{X^{n-1}}\right).$$

Dans la théorie additive des nombres premiers on prend jusqu' à présent pour q une valeur telle qu'à tout nombre positif fixe Ω correspond une constante c_6, dépendant de Ω, avec $q \geqq c_6 x^{\Omega}$. Dans ce cas (1) n'a pas d'intérêt, mais (2) nous donne un nombre c_7, dépendant uniquement de $\varepsilon \leqq \frac{1}{2}$, n et Ω, tel qu'on ait, si τ est borné,

$$|S|^{2^{n-1}} < c_7 x^{\sigma - (1-\varepsilon)\Omega}.$$

Désignons par Ω_1 un nombre fixe quelconque. Si nous prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}$ (donc $l = 2$ et $\sigma = \frac{1}{2} n^2 - n$) et $\Omega = 2\sigma + 2^n \Omega_1$, nous trouvons un nombre c_8, dépendant uniquement de n et de Ω_1, tel que nous ayons

$$|S| < c_8 x^{-\Omega_1}.$$

Cette inégalité, qui résulte d'ailleurs aussi de la formule de VINOGRADOW, nous apprend que S tend vers zéro, si X croît indéfiniment.

Pour la démonstration de (2) j'ai besoin de quelques lemmes.

Lemme 1: *Si* $u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s$ ($r \geqq 1$, $s \geqq 1$) *désignent des nombres naturels avec* $u_1 \ldots u_r = v_1 \ldots v_s$, *il existe rs nombres naturels* $a_{\varrho\sigma}$ *avec*

$$u_\varrho = a_{\varrho 1} \ldots a_{\varrho s}; \quad v_\sigma = a_{1\sigma} \ldots a_{r\sigma} \qquad (\varrho = 1, \ldots, r; \sigma = 1, \ldots, s).$$

Démonstration: Le lemme est évident dans le cas particulier $r = 1$. Supposons que r soit $\geqq 2$ et que le lemme ait été déjà démontré, si r est remplacé par $r - 1$.

Si nous désignons par (u, v) le plus grand commun diviseur de u et de v, et si nous posons

$$(u_1, v_1) = a_{11}; \quad \left(\frac{u_1}{a_{11}}, v_2\right) = a_{12}; \quad \left(\frac{u_1}{a_{11}\, a_{12}}, v_3\right) = a_{13};$$

$$\ldots; \left(\frac{u_1}{a_{11} \ldots a_{1,s-1}}, v_s\right) = a_{1s},$$

$$u_1 = a_{11} \ldots a_{1s}\, w \quad \text{et} \quad v_\sigma = a_{1\sigma}\, b_\sigma \qquad (\sigma = 1, \ldots, s),$$

nous avons $w u_2 \ldots u_r = b_1 \ldots b_s$. Le nombre naturel w étant premier avec $b_1 \ldots b_s$ est donc 1 et le lemme à démontrer, appliqué avec $r - 1$ au lieu de r, nous donne $(r-1)s$ entiers $a_{\varrho\sigma}$ avec

$$u_\varrho = a_{\varrho 1} \ldots a_{\varrho s} \quad \text{et} \quad b_\sigma = a_{2\sigma} \ldots a_{r\sigma} \qquad (\varrho = 2, \ldots, r; \sigma = 1, \ldots, s).$$

Le lemme est ainsi démontré.

Lemme 2: *Supposons que* l *désigne un entier* > 1, *et que* m *soit un nombre naturel. Si* $u_{\lambda\mu}$ ($\lambda = 1, \ldots, l$; $\mu = 1, \ldots, m$) *sont des nombres naturels tels que les* l *produits* $u_{\lambda 1} u_{\lambda 2} \ldots u_{\lambda m}$ ($\lambda = 1, \ldots, l$) *soient égaux l'un à l'autre, il existe* m^l *nombres naturels* $a_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_l}$ *avec*

$$u_{\lambda\mu} = \Pi\, a_{\mu_1, \ldots, \mu_{\lambda-1}, \mu, \mu_{\lambda+1}, \ldots, \mu_l};$$

le produit est étendu aux nombres naturels $\mu_1, \ldots, \mu_{\lambda-1}, \mu_{\lambda+1}, \ldots, \mu_l$ *tous* $\leqq m$.

Démonstration: Le lemme précédent nous fournit le cas particulier $l = 2$. Supposons que l soit $\geqq 3$ et que le lemme ait été déjà démontré si l est remplacé par $l - 1$. De cette manière nous trouvons m^{l-1} nombres naturels $b_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_{l-1}}$ avec

$$u_{\lambda\mu} = \Pi\, b_{\mu_1, \ldots, \mu_{\lambda-1}, \mu, \mu_{\lambda+1}, \ldots, \mu_{l-1}}$$

($\lambda = 1, \ldots, l-1$; $\mu = 1, \ldots, m$); le produit est étendu aux nombres naturels $\mu_1, \ldots, \mu_{\lambda-1}, \mu_{\lambda+1}, \ldots, \mu_{l-1}$, tous $\leqq m$. Nous avons donc

$$u_{l1}\, u_{l2} \ldots u_{lm} = \Pi\, b_{\mu_1 \ldots \mu_{l-1}},$$

où le produit figurant dans le membre de droite est étendu aux nombres naturels $\mu_1, \dots, \mu_{l-1}$, tous $\leqq m$. D'après le lemme précédent, appliqué avec $r = m$ et $s = m^{l-1}$, il existe m^l nombres $a_{\mu_1 \dots \mu_l}$ avec

$$b_{\mu_1 \dots \mu_{l-1}} = \prod_{\mu_l = 1}^{m} a_{\mu_1 \dots \mu_l} \quad \text{et} \quad u_{l\mu} = \Pi\, a_{\mu_1 \dots \mu_{l-1} \mu};$$

le dernier produit est étendu aux nombres naturels $\mu_1, \dots, \mu^l_{-1}$, tous $\leqq m$. Le lemme est donc démontré.

Lemme 3: *A tout nombre naturel L correspond un nombre c_9, tel que pour tout entier $X \geqq 2$ le nombre des systèmes formés par L nombres naturels $b_1, \dots, b_L$ tels que*

$$b_1 b_2 \dots b_L \leqq X, \quad \dots \dots \dots \quad (4)$$

est inférieur à $c_9 X x^{L-1}$.

Démonstration: Le cas particulier $L = 1$ est évident. Supposons que L soit $\geqq 2$ et que le lemme ait été déjà démontré, si l'on remplace L par $L-1$. L'entier b_1 parcourt le système des nombres naturels $\leqq X$. Si b_1 est choisi, le nombre des systèmes $b_2, \dots, b_L$ qui entrent en considération est d'après le lemme à démontrer (appliqué avec $L-1$ au lieu de L) inférieur à $c_{10} X b_1^{-1} x^{L-2}$, où c_{10} ne dépend que de L. Par conséquent le nombre des systèmes formés par L entiers $b_1, \dots, b_L$ avec (4) est inférieur à

$$c_{10} X x^{L-2} \sum_{b_1 \leqq X} \frac{1}{b} < c_9 X x^{L-1}.$$

Lemme 4: *Si $\tau_m(h)$ désigne pour chaque choix des nombres naturels m et h le nombre de manières différentes d'écrire h comme le produit de m nombres naturels, à tout entier $l \geqq 2$ correspond un nombre c_{11}, dépendant uniquement de m et de l, tel qu'on ait pour tout entier $X \geqq 2$*

$$\sum_{h=1}^{X} \tau_m^l(h) < c_{11} X x^{m^l - 1}. \quad \dots \dots \dots \quad (5)$$

Démonstration: $\tau_m(h)$ est le nombre des systèmes formés par lm nombres naturels $u_{\lambda\mu}$ tels qu'on ait

$$u_{\lambda 1} u_{\lambda 2} \dots u_{\lambda m} = h \qquad (\lambda = 1, \dots, l).$$

Le membre de gauche de (5) est donc égal au nombre des systèmes, formés par lm nombres naturels $u_{\lambda\mu}$ tels que $\prod_{\mu=1}^{m} u_{\lambda\mu}$ soit indépendant de λ et en outre $\leqq X$. A chacun de ces systèmes correspond, d'après le lemme 2, un système formé par m^l entiers $a_{\mu_1 \dots \mu_l}$ vérifiant l'inégalité

$$\prod_{\mu_1=1}^{m} \dots \prod_{\mu_l=1}^{m} a_{\mu_1 \dots \mu_l} \leqq X; \quad \dots \dots \dots \quad (6)$$

à deux systèmes différents $(u_{\lambda\mu})$ correspondent deux systèmes $(a_{\mu_1 \dots \mu_l})$, qui sont différents l'un de l'autre. Par conséquent le membre de gauche de (5) est au plus égal au nombre des systèmes formés par m^l nombres naturels $a_{\mu_1 \dots \mu_l}$ avec la propriété (6), donc, d'après le lemme précédent, inférieur à $c_{11} X x^{m^l - 1}$.

Lemme 5: *Supposons que le nombre réel α, le nombre $\tau \geqq 1$ et la fraction irréductible $\frac{a}{q}$ soient tels qu'on ait $\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leqq \frac{\tau}{q^2}$ et posons pour tout nombre naturel h*

$$M(h) = \min\left(1, \frac{1}{X \{h\alpha\}}\right),$$

où $\{u\}$ désigne la distance de u à l'entier le plus voisin; min (u, v) désigne le plus petit des deux nombres u et v.

A tout nombre $\varrho > 1$ correspond un nombre c_{12}, dépendant uniquement de ϱ, tel qu'on ait pour tout entier D

$$\sum_{h=D+1}^{D+q} M^{\varrho}(h) < c_{12}(\tau + X^{-1} q). \quad \dots \dots \dots \quad (7)$$

Démonstration: Si l'on pose $C = D + \frac{1}{2} q$ ou $D + \frac{1}{2}(q+1)$, selon que q est pair ou impair, on a $|h - C| \leqq \frac{1}{2} q$ pour chaque $h \geqq D + 1$ et $\leqq D + q$, par conséquent en vertu de $\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leqq \frac{\tau}{q^2}$,

$$\left| \alpha h - \alpha C - \frac{a}{q}(h - C) \right| \leqq \frac{\tau\, |h - C|}{q^2} \leqq \frac{\tau}{2q}. \quad \dots \dots \quad (8)$$

Si h parcourt le système $D+1, \dots, D+q$, le produit $a(h-C)$ parcourt un système complet de restes modulo q, parce que a est premier avec q. Désignons par r_h le reste modulo 1 de $\alpha C + \frac{a}{q}(h - c)$, tel que nous ayons $-\frac{1}{2} < r_h \leqq \frac{1}{2}$. Ces points r_h $(h = D+1, \dots, D+q)$ sont équidistants et la distance vaut $\frac{1}{q}$. Le nombre des h avec $|r_h| \leqq \frac{1}{q}(\frac{1}{2}\tau + 1)$ est donc tout au plus $1 + 2(\frac{1}{2}\tau + 1) \leqq 4\tau$ et la contribution de ces h au membre de gauche de (7) est $\leqq 4\tau$.

A chaque nombre naturel g correspond tout au plus un h avec

$$\frac{1}{q}(\tfrac{1}{2}\tau + g) < r_h \leqq \frac{1}{q}(\tfrac{1}{2}\tau + g + 1)$$

et pour cet h éventuel on a

$$\{\alpha h\} \geqq r_h - q \cdot \frac{\tau}{2q^2} > \frac{g}{q}.$$

La contribution des h avec $r_h > \frac{1}{q}(\frac{1}{2}\tau + 1)$ est donc inférieure à

$$\sum_{g=1}^{\infty} min\,(1, X^{-\varrho} q^{\varrho} g^{-\varrho}) \leqq \sum_{g \leqq \tau + X^{-1} q} 1 + \sum_{g > \tau + X^{-1} q} X^{-\varrho} q^{\varrho} g^{-\varrho}$$
$$< c_{13}\,(\tau + X^{-1} q),$$

où c_{13} dépend uniquement de ϱ. On trouve la même borne supérieure pour la contribution des h avec $r_h < -\frac{1}{q}(\frac{1}{2}\tau + 1)$ et le lemme est donc démontré.

Lemme 6: *Dans les conditions du lemme précédent on a pour tout nombre naturel H et pour tout nombre $\varrho > 1$*

$$H^{-1} \sum_{h=1}^{H} M^{\varrho}(h) < c_{14}\,(\tau + X^{-1} q)\,(q^{-1} + H^{-1}),$$

où c_{14} ne dépend que de ϱ.

Démonstration: Partageons la somme $\sum_{h=1}^{H}$ en sommes partielles contenant chacune au plus q termes, de telle façon que le nombre de ces sommes partielles soit inférieur à $\frac{H}{q} + 1$. Le lemme précédent, appliqué à chacune de ces sommes partielles, donne le lemme 6.

Démonstration de (2).
Comme on le sait [1]), on a

$$| S |^{2^{n-1}} < 4^{2^{n-1}} \left(X^{-1} + X^{1-n} \sum_{h_1, \ldots, h_{n-1}=1}^{X} min\left(1, \frac{1}{X\{\alpha h_1 \ldots h_{n-1}\}}\right)\right)$$
$$\leqq 4^{2^{n-1}} \left(X^{-1} + X^{1-n} \sum_{h=1}^{X^{n-1}} \tau_{n-1}(h)\, min\left(1, \frac{1}{X\{\alpha h\}}\right)\right),$$

où $\tau_{n-1}(h)$ désigne le nombre de manières d'écrire h comme le produit de $n-1$ nombres naturels. L'inégalité de CAUCHY généralisée nous donne donc pour tout entier $l \geqq 2$

$$| S |^{2^{n-1}} < 4^{2^{n-1}} \left(X^{-1} + A^{\frac{1}{l}} B^{\frac{l-1}{l}}\right),$$

où

$$A = X^{1-n} \sum_{h=1}^{X^{n-1}} \tau_{n-1}^{l}(h) < c_{15}\, x^{(n-1)^l - 1}$$

[1]) Comparer par exemple E. LANDAU, Vorlesungen über Zahlentheorie, I, p. 253 (Satz 265).

d'après le lemme 4 et

$$B = X^{1-n} \sum_{h=1}^{X^{n-1}} min\left(1, \frac{1}{X^{\frac{l}{l-1}} \{\alpha h\}^{\frac{l}{l-1}}}\right)$$
$$< c_{16}\,(\tau + X^{-1} q)\,(q^{-1} + X^{1-n})$$

d'après le lemme précédent (c_{15}, c_{16} et c_{17} ne dépendent que de n et de l). En vertu de

$$X^{-1} < (\tau + X^{-1} q)\,(q^{-1} + X^{1-n})$$

on trouve donc

$$| S |^{2^{n-1}} < c_{17}\, x^{\frac{(n-1)^l - 1}{l}} (\tau + X^{-1} q)^{1 - \frac{1}{l}} (q^{-1} + X^{1-n})^{1 - \frac{1}{l}},$$

d'où suit (2), si nous prenons pour l le plus petit entier $\geqq \frac{1}{\varepsilon}$.