bildung im Kebnekaise-Gebiet hat QUENSEL[1]) darauf hingewiesen, dass — auch wenn die Umkristallisation über die Kataklase überwiegt — zuerst die mechanische Zertrümmerung sich vollzogen hat und dass erst später Umkristallisationserscheinungen diese Struktur mehr oder weniger verhüllt haben. Es ist verständlich, dass in seinen Orthohartschiefern erst die Verkleinerung des Korns und die Ausbildung der Schieferung die Zirkulation der Lösungen erleichtern musste, bevor die Umkristallisation richtig vor sich gehen konnte. In den untersuchten Hartschiefern vom Abiskojokk sind kataklastische Erscheinungen verhältnismässig selten. In den grobkörnigen Quarz-Feldspat-Einlagerungen sind sie deutlich entwickelt. Es ist möglich, dass durch ein ursprünglich feineres Korn und eine ursprüngliche Schichtung die Umkristallisation beschleunigt wurde und in vielen Gesteinen die kataklastischen Stadien in geringerem Masz als im Kebnekaise-Gebiet oder gar nicht durchlaufen wurden.

*Zusammenfassung.*

Wie in den östlichen Randgebieten kommen auch im westlichen Teil des Gebirges südlich vom Torne Träsk rein klastische Gesteine — vorwiegend Arkosen und Schiefer — zwischen den Hochgebirgsbildungen und dem Grundgebirge eingelagert vor[2]). Die epi-bis mesometamorphen Hartschiefer liegen höher als die rein klastischen Gesteine. Bewegung und Kristallisation weisen auf eine kaledonische Dynamometamorphose, die während der Bildung der Ueberschiebungen in Zonen starker Bewegung stattfand. Die Kennzeichen der Hartschiefer weisen auf eine hauptsächlich parakristalline Deformation von einer z. T. aus Sandsteinen und Arkosen bestehenden Schichtserie, und es ist möglich, dass vom Anfang der Metamorphose an die Kristallisationsgeschwindigkeit in Hauptsache gleich oder grösser war als die Deformationsgeschwindigkeit. Ein einigermassen bedeutender Altersunterschied zwischen den sedimentären Hartschiefern und den rein klastischen Sedimenten kann aus dem metamorphen Charakter der von uns untersuchten Hartschiefer nicht abgeleitet werden.

In einem Teil der, durch prä- bis parakristalline Deformation gekennzeichneten, überschobenen Glimmerschiefer am Ostabhang des Nuolja kann eine ältere und eine jüngere Metamorphose unterschieden werden. Die jüngere ist — wie die der Hartschiefer — eine kaledonische Dynamometamorphose. Sie hat hier destruktiv gewirkt und hat manchen Gesteinen ein „jüngeres" Aussehen verliehen. Die ältere Metamorphose kann in den von uns untersuchten Gesteinen zeitlich nicht genau festgelegt werden; sie kann kaledonisch oder älter sein. In vielen Gebirgen sind die metamorphen Gesteine durch petrographische Vergleiche vielfach für älter

[1]) P. QUENSEL. loc. cit. S. 105.
[2]) P. J. HOLMQUIST. loc. cit. S. 60.



gehalten als sie in Wirklichkeit sind. Sie sind allmählich in höhere stratigraphische Horizonte hinaufgerückt. Aber umgekehrt können Gesteine durch retrograde Metamorphose jüngeren Gesteinen petrographisch ähnlich werden. Die genaue Abschätzung des proportionalen Anteils der älteren konstruktiven und der jüngeren destruktiven Metamorphose in den Glimmerschiefern und Phylliten des Nuolja ist für die Tektonik dieses Gebiets von grosser Bedeutung.

**Mathematics.** — *Arithmetische Eigenschaften einer Klasse von Dezimalbrüchen* von KURT MAHLER in Krefeld. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT).

(Communicated at the meeting of April 24, 1937).

Da über die Dezimalbruchentwicklung der klassischen transzendenten Zahlen, z.B. e und $\pi$, auch heute noch fast nichts bekannt ist[1]), so hat es ein gewisses Interesse, spezielle Dezimalbrüche zu konstruieren, deren Transzendenz sich zeigen lässt, ohne trivial zu sein. Ich behandle hier Dezimalbrüche folgender Gestalt: Unter $f(k)$ werde ein ganzwertiges nichtkonstantes Polynom verstanden, das für $k \geqq 1$ positiv ist und mit $k$ gegen $+\infty$ strebt. Alsdann bedeute $\sigma$ den Dezimalbruch, der entsteht, wenn hinter das Komma der Reihe nach nacheinander die dezimal dargestellten natürlichen Zahlen $f(1), f(2), f(3), \ldots$ hingeschrieben werden; z.B. wird also so dem Polynom $f(k) = \frac{1}{2}(k^2 + k)$ der Dezimalbruch

$$0{,}1\ 3\ 6\ 10\ 15\ 21\ 28\ 36\ 45\ 55\ 66\ 78\ 91\ 105\ 120\ldots\ldots$$

zugeordnet. Für alle Zahlen $\sigma$ dieser Gestalt wird bewiesen:

„*$\sigma$ ist transzendent, aber keine* LIOUVILLE-*Zahl.*"

Ein ganz gleichlautendes Resultat gilt auch noch, wenn statt solcher Dezimalbrüche analog gebildete Brüche in bezug auf eine beliebige Zahlsystem-Basis $q \geqq 2$ betrachtet werden; darum wird in der vorliegenden Arbeit sogleich der Fall eines allgemeinen natürlichen $q \geqq 2$ zugrunde gelegt. Jedoch mache ich die Annahme, dass $f(x)$ für alle reellen $x \geqq 1$ monoton im strengen Sinn zunimmt, weil dies die Betrachtungen wesentlich vereinfacht. Hierin liegt aber nur eine scheinbare Einschränkung; lässt man nämlich endlichviele Anfangsziffern von $\sigma$ fort, was auf eine ganze lineare Transformation von $\sigma$ mit rationalen Koeffizienten hinauskommt, so ist diese Forderung für die Folge der Restziffern von selbst erfüllt.

Der Beweis der beiden Aussagen über $\sigma$ beruht wesentlich auf einer

[1]) Wegen einiger elementarer Aussagen vergl. eine demnächst in Mathematica *B* (Zutphen) erscheinende Note des Verfassers. Dort wird auch schon das Ergebnis dieser Arbeit im Spezialfall $f(x) = x$ gezeigt.

auch an sich merkwürdigen Reihenentwicklung $(A)$ für diese Zahl. Indem man diese Reihe nach beliebig vielen Gliedern abbricht, erhält man eine Folge von Brüchen, die sehr schnell gegen $\sigma$ konvergieren. Die Nenner dieser Brüche sind bis auf einen Faktor geringerer Grössenordnung reine Potenzen von $q$; mittels eines wichtigen neuen Satzes von SCHNEIDER kann hieraus die Transzendenz von $\sigma$ hergeleitet werden. Dass $\sigma$ keine LIOUVILLE-Zahl ist, ergibt sich schliesslich direkt aus einem Irrationalitätsmass $(B)$ für $\sigma$, das leicht aus den Eigenschaften seiner Näherungsbrüche folgt.

1. Sei $f(x)$ ein ganzwertiges Polynom in $x$ genau vom Grad $m \geqslant 1$, das für alle $x \geqslant 1$ selbst $\geqslant 1$ ist und monoton im strengen Sinn zunimmt. Die Umkehrfunktion $x = g(y)$ von $y = f(x)$ nimmt folglich für $y \geqslant f(1)$ ebenfalls monoton im strengen Sinn zu und ist stets $\geqslant 1$.

Bedeutet $q \geqslant 2$ eine feste natürliche Zahl, so gestattet jede der natürlichen Zahlen $f(k)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ eine eindeutig bestimmte Darstellung

$$f(k) = \sum_{\lambda=0}^{N_k} Z_{k\lambda}\, q^{N_k-\lambda} = Z_{k0}\, Z_{k1}\, Z_{k2} \ldots Z_{k N_k}$$

im Zahlsystem zur Basis $q$; dabei gehören die Ziffern $Z_{k0}, Z_{k1}, \ldots, Z_{k N_k}$ der endlichen Folge $0, 1, \ldots, q-1$ an und es ist speziell $Z_{k0} > 0$. Indem die einzelnen Ziffern der Darstellungen aller $f(k)$ der Reihe nach hinter dem Komma niedergeschrieben werden, ergibt sich der Bruch

$$\sigma = 0, Z_{10}\, Z_{11} \ldots Z_{1 N_1}\, Z_{20}\, Z_{21} \ldots Z_{2 N_2}\, Z_{30}\, Z_{31} \ldots Z_{3 N_3} \ldots$$

zur Basis $q$, dessen arithmetische Eigenschaften im folgenden untersucht werden sollen. Zu diesem Zweck werden wir zunächst eine einfachere Reihenentwicklung für $\sigma$ herleiten.

2. Sei $n$ die durch die Ungleichungen

$$q^{n-1} \leqslant f(1) \leqslant q^n - 1$$

definierte natürliche Zahl, ferner

$$j_{n-1} = 0,\; j_\nu = [g\,(q^\nu - 1)] \text{ für } \nu = n, n+1, n+2, \ldots.$$

Für jede natürliche Zahl $\nu \geqslant n$ werde unter $J_\nu$ die Menge aller natürlichen Zahlen $k$ mit

$$q^{\nu-1} \leqslant f(k) \leqslant q^\nu - 1$$

verstanden. Man sieht leicht ein, dass $k$ dann und nur dann zu $J_\nu$ gehört, wenn

$$j_{\nu-1} + 1 \leqslant k \leqslant j_\nu$$

ist; $J_\nu$ enthält also $j_\nu - j_{\nu-1}$ Elemente. Da $f(k)$ im System zur Basis $q$ dann und nur dann $\nu$-stellig wird, wenn $k$ in $J_\nu$ liegt, so ist demnach die Gesamtanzahl der Ziffern aller $\nu$-stelligen Zahlen $f(k)$ gleich

$$\nu\,(j_\nu - j_{\nu-1})$$



und folglich die Gesamtanzahl der Ziffern aller höchstens $(\nu-1)$-stelligen Zahlen $f(k)$ für $\nu = n$ gleich 0 und für $\nu > n$ gleich

$$\sum_{\mu=n}^{\nu-1} \mu\,(j_\mu - j_{\mu-1}).$$

Ferner entsteht für $\nu \geqslant n$ die kleinste, bzw. die grösste $\nu$-stellige Zahl $f(k)$, wenn $k = j_{\nu-1} + 1$, bezw. $k = j_\nu$ ist.

Somit ist der additive Beitrag, den die Ziffern von $f(k)$ zu $\sigma$ liefern, für $k$ in $J_n$ gleich

$$f(k)\, q^{-nk}$$

und für $k$ in $J_\nu$ mit $\nu > n$ gleich

$$f(k)\, q^{-\sum\limits_{\mu=n}^{\nu-1} \mu (j_\mu - j_{\mu-1}) - \nu (k - j_{\nu-1})},$$

denn eine etwaige $\lambda$-te Stelle $Z$ hinter dem Komma in der Entwicklung von $\sigma$ zur Basis $q$ liefert den Beitrag $Zq^{-\lambda}$ zum Wert von $\sigma$. Indem die zu allen $k = 1, 2, 3, \ldots$ gehörigen Teilbeiträge addiert werden, ergibt sich damit für $\sigma$ die folgende Reihenentwicklung:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{j_n} f(k)\, q^{-nk} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} q^{-\sum\limits_{\mu=n}^{\nu-1} \mu (j_\mu - j_{\mu-1}) + \nu j_{\nu-1}} \sum_{k=j_{\nu-1}+1}^{j_\nu} f(k)\, q^{-\nu k}.$$

3. Diese Entwicklung kann noch vereinfacht werden, da die Summen

$$S_\nu = \sum_{k=j_{\nu-1}+1}^{j_\nu} f(k)\, q^{-\nu k} \qquad (\nu = n, n+1, n+2, \ldots$$

sich bekanntlich explizit angeben lassen. Am einfachsten gelingt dies mittels der folgenden Formel aus der Differenzenrechnung [2]):

$$\sum_{z=0}^{\infty} F(z)\, x^z = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{x^h \Delta^h F(0)}{(1-x)^{h+1}}.$$

Dabei bedeutet $F(z)$ eine für $z = 0, 1, 2, \ldots$ definierte Funktion und

$$\Delta^h F(z) = \sum_{i=0}^{h} \binom{h}{i} (-1)^i F(z + h - i) \qquad (\Delta^0 F(z) = F(z))$$

ihre $h$-te Differenz an der Stelle $z$ $(h = 0, 1, 2, \ldots)$.

Um von dieser Formel Gebrauch zu machen, werde $S_\nu$ in der Form

$$S_\nu = q^{-\nu (j_{\nu-1}+1)} \sum_{z=0}^{\infty} f(z + j_{\nu-1} + 1)\, q^{-\nu z} - q^{-\nu (j_\nu + 1)} \sum_{z=0}^{\infty} f(z + j_\nu + 1)\, q^{-\nu z}$$

geschrieben und $x = q^{-\nu}$ gesetzt. Da die Differenzen $(m+1)$-ten und

[2]) Siehe z.B.: CESARO-KOWALEWSKI, Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung (Leipzig 1904), § 807 c. Offenbar erübrigt sich im betrachteten Fall jeder Konvergenzbeweis.

höheren Grades der beiden Polynome $f(z+j^{\nu}{}_{-1}+1)$ und $f(z+j_{\nu}+1)$ identisch in $z$ verschwinden, so folgt alsdann

$$S_{\nu}=q^{-\nu j_{\nu-1}}A_{\nu}-q^{-\nu j_{\nu}}B_{\nu}$$

mit den Abkürzungen

$$A_{\nu}=\sum_{h=0}^{m}\frac{\Delta^h f(j_{\nu-1}+1)}{(q^{\nu}-1)^{h+1}},\quad B_{\nu}=\sum_{h=0}^{m}\frac{\Delta^h f(j_{\nu}+1)}{(q^{\nu}-1)^{h+1}}.$$

Mittels dieser Gleichung lassen sich alle Teilsummen $S_{\nu}$ aus der im vorigen Paragraphen abgeleiteten Gleichung für $\sigma$ eliminieren. Das ergibt:

$$\sigma=(A_n-q^{-nj_n}B_n)+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}q^{-\sum\limits_{\mu=n}^{\nu-1}\mu(j_{\mu}-j_{\mu-1})+\nu j_{\nu-1}}(q^{-\nu j_{\nu-1}}A_{\nu}-q^{-\nu j_{\nu}}B_{\nu}),$$

und schliesslich durch Zusammenfassen aller Glieder mit gleichem Exponenten von $q$ und Einsetzen der Werte von $A_{\nu}$ und $B_{\nu}$:

$$(A):\ \sigma=\sum_{h=0}^{m}\frac{\Delta^h f(1)}{(q^n-1)^{h+1}}+$$

$$+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}q^{-\sum\limits_{\mu=n}^{\nu-1}\mu(j_{\mu}-j_{\mu-1})}\sum_{h=0}^{m}\Delta^h f(j_{\nu-1}+1)\left\{\frac{1}{(q^{\nu}-1)^{h+1}}-\frac{1}{(q^{\nu-1}+1)^{h+1}}\right\}.$$

4. Das letzte Ergebnis führt nun leicht zur Aufstellung einer Folge von Brüchen $P_s/Q_s$, die ausserordentlich schnell gegen $\sigma$ konvergieren und damit den Transzendenzbeweis ermöglichen. Sei $D_s$ für jeden Index $s\geqq n+1$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen

$$q^n-1,\ q^{n+1}-1,\ldots,q^s-1,$$

weiter

$$Q_s=D_s^{m+1}\,q^{\sum\limits_{\mu=n}^{s-1}\mu(j_{\mu}-j_{\mu-1})}$$

und

$$P_s=Q_s\left\{\sum_{h=0}^{m}\frac{\Delta^h f(1)}{(q^n-1)^{h+1}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{\nu=n+1}^{s}q^{-\sum\limits_{\mu=n}^{\nu-1}\mu(j_{\mu}-j_{\mu-1})}\sum_{h=0}^{m}\Delta^h f(j_{\nu-1}+1)\left(\frac{1}{(q^{\nu}-1)^{h+1}}-\frac{1}{(q^{\nu-1}-1)^{h+1}}\right)\right\},$$

ferner

$$R_s=\sum_{\nu=s+1}^{\infty}q^{-\sum\limits_{\mu=n}^{\nu-1}\mu(j_{\mu}-j_{\mu-1})}\sum_{h=0}^{m}\Delta^h f(j_{\nu-1}+1)\left(\frac{1}{(q^{\nu}-1)^{h+1}}-\frac{1}{(q^{\nu-1}-1)^{h+1}}\right).$$



Es besteht also die Gleichung

$$\sigma-\frac{P_s}{Q_s}=R_s\quad\ldots\ldots\ldots\quad(1)$$

$Q_s$ ist definitionsgemäss eine natürliche Zahl. Aber auch $P_s$ ist ganz rational, denn die Koeffizienten

$$\Delta^h f(1)\quad\text{und}\quad\Delta^h f(j_{\nu-1}+1)$$

sind als Differenzen ganzwertiger Polynome an natürlichen Stellen des Arguments ganze rationale Zahlen, so dass die Nenner der einzelnen Summanden von $P_s$ durch den Faktor $Q_s$ weggehoben werden. Wir werden für $log\ Q_s$ und $log\ R_s$ asymptotische Formeln ableiten und beginnen dazu mit einer solchen Formel für

$$i_{\nu}=\sum_{\mu=n}^{\nu-1}\mu(j_{\mu}-j_{\mu-1})=(\nu-1)j_{\nu-1}-(j_n+j_{n+1}+\ldots+j_{\nu-2}).$$

Als Polynom $m$-ten Grades, das für $x\to+\infty$ gegen $+\infty$ strebt, gestattet $f(x)$ eine Darstellung

$$f(x)=a^{-m}x^m\left(1+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\ldots+\frac{a_m}{x^m}\right),$$

wo $a$ eine positive Konstante und $a_1, a_2, \ldots, a_m$ gewisse reelle Zahlen sind. Die Umkehrfunktion von $y=f(x)$ wird alsdann gleich

$$x=g(y)=a\,y^{1/m}+O(1).$$

Wegen

$$j_{\mu}=[g(q^{\mu}-1)]$$

ist also insbesondere

$$j_{\mu}=a\,q^{\mu/m}+O(1)$$

und damit

$$i_{\nu}=a(\nu-1)\,q^{\frac{\nu-1}{m}}+O\left(q^{\frac{\nu-1}{m}}\right).$$

Erstens ist nun die natürliche Zahl

$$D_s<q\cdot q^2\cdot q^3\ldots q^s=q^{\frac{s(s+1)}{2}},$$

so dass sich aus der vorigen Formel für $i_{\nu}$ und der Definition von $Q_s$ die Beziehung

$$log\ Q_s\backsim a(s-1)\,q^{\frac{s-1}{m}}\,log\ q\quad\ldots\ldots\quad(2)$$

ergibt. Hiernach ist insbesondere

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\log Q_{s+1}}{\log Q_s} = q^{1/m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Zweitens ist für $\nu \to \infty$

$$\sum_{h=0}^{m} \Delta^h f(j_{\nu-1}+1)\left\{\frac{1}{(q^\nu-1)^{h+1}} - \frac{1}{(q^{\nu-1}-1)^{h+1}}\right\} \backsim$$

$$\backsim -f(j_{\nu-1}+1)\frac{q-1}{q^\nu} \backsim -\alpha^{-m}\left(\alpha q^{\frac{\nu-1}{m}}\right)^m \frac{q-1}{q^\nu} = -\left(1-\frac{1}{q}\right),$$

da die Terme mit $h \geqq 1$ sich gegen den mit $h=0$ vernachlässigen lassen. Der Summand von $R_s$ mit $\nu = s+1$ hat also offenbar höhere Grössenordnung als alle folgenden, und man erhält

$$R_s \backsim -\left(1-\frac{1}{q}\right) q^{-i_{s+1}}$$

und erst recht

$$\log |R_s| \backsim -\alpha s q^{\frac{s}{m}} \log q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Hieraus folgt für alle genügend grossen $s$

$$R_s \neq 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Ferner ergibt sich wegen (2) die Limesgleichung

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\log |R_s|}{\log Q_s} = -q^{1/m} < -1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

und die asymptotische Formel

$$\log |Q_s R_s| \backsim -\alpha s \left(q^{\frac{1}{m}}-1\right) q^{\frac{s-1}{m}} \log q, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

so dass also von einem $s$ ab

$$|Q_s R_s| < |Q_{s-1} R_{s-1}| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

ist.

5. Von TH. SCHNEIDER wurde vor einiger Zeit folgender Satz bewiesen: *„Zu der reellen Zahl $\vartheta$ gebe es eine Konstante $\varkappa > 1$ und eine unendliche Folge von Brüchen*

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \ldots,$$



*deren Nenner von einem $s$ ab monoton zunehmen und Potenzen einer festen natürlichen Zahl $q$ darstellen, derart dass*

$$0 < \left|\vartheta - \frac{p_s}{q_s}\right| \leqq q_s^{-\varkappa} \quad \text{und} \quad \limsup_{s\to\infty} \frac{\log q_{s+1}}{\log q_s} < \infty$$

*ist. Dann ist $\vartheta$ transzendent.“* Eine Durchsicht des Beweises dieses Satzes zeigt ohne Mühe, dass $\vartheta$ auch dann noch transzendent ist, wenn die Bedingung, dass die $q_s$ Potenzen von $q$ sind, durch folgende schwächere Forderung ersetzt wird [3]: *„Für jeden Index $s$ kann $q_s = q_s' q_s''$ als Produkt einer natürlichen Zahl $q_s'$ mit*

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\log q_s'}{\log q_s} = 0$$

*und einer reinen Potenz $q_s''$ von $q$ dargestellt werden.“*

Identifizieren wir $\vartheta$ mit $\sigma$ und nehmen wir eine willkürliche Zahl $\varkappa$ mit

$$1 < \varkappa < q^{1/m},$$

so haben die Näherungsbrüche $P_s/Q_s$ wegen (2) von einem $s$ ab monoton zunehmende Nenner; nach Definition ist ferner $Q_s = D_s^{m+1} \cdot q^{i_s}$, wo der erste Faktor der Gleichung

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\log D_s^{m+1}}{\log Q_s} = 0$$

genügt und der zweite eine reine Potenz von $q$ ist; endlich gilt wegen (1), (5) und (6) für genügend grosse $s$

$$0 < \left|\sigma - \frac{P_s}{Q_s}\right| < Q_s^{-\varkappa}$$

und es ist wegen (3)

$$\limsup_{s\to\infty} \frac{\log Q_{s+1}}{\log Q_s} < \infty.$$

Alle Voraussetzungen der vorigen Verallgemeinerung des SCHNEIDERschen Satzes sind demnach erfüllt, und man kommt zu folgendem Resultat:

Satz 1: *Die Zahl $\sigma$ ist transzendent.*

6. Zu jedem Bruch $P/Q$ mit schon genügend grossem Nenner $Q$ kann wegen (8) ein Index $s$ mit

$$|Q_s R_s| < \frac{1}{2Q} \leqq |Q_{s-1} R_{s-1}| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

---

[3]) Da SCHNEIDER selbst seinen Beweis nur skizziert, so werde verwiesen nach folgender Arbeit des Verfassers: „Ein Analogon zu einem SCHNEIDERschen Satz“, Proc. Royal. Akad., Amsterdam, **39**, 633—640 u. 729—739 (1936). In dem dort in allen Einzelheiten bewiesenen Satz 2 ist der Satz von SCHNEIDER als Spezialfall enthalten.

gefunden werden. Wegen der Identität

$$\sigma - \frac{P}{Q} = \left(\frac{P_s}{Q_s} - \frac{P}{Q}\right) + R_s$$

ist alsdann entweder $\dfrac{P_s}{Q_s} = \dfrac{P}{Q}$ und also

$$\sigma - \frac{P}{Q} = R_s,$$

oder $\dfrac{P_s}{Q_s} \neq \dfrac{P}{Q}$, also $|P_s Q - P Q_s| \geqq 1$ und somit wegen (9):

$$\left|\sigma - \frac{P}{Q}\right| \geqq \frac{1}{Q Q_s} - |R_s| \geqq \frac{1}{2 Q Q_s} \geqq \frac{1}{2}|R_s|,$$

so dass in jedem Fall

$$\left|\sigma - \frac{P}{Q}\right| \geqq \frac{1}{2}|R_s| \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

folgt.

Wenn nun aber $Q$ und also auch $s$ genügend gross ist, so gilt wegen (9) und (7)

$$\frac{1}{Q} \leqq q^{-\frac{2}{3}\alpha s (q^{1/m} - 1) q^{\frac{s-2}{m}}},$$

und wegen (10) und (4)

$$\left|\sigma - \frac{P}{Q}\right| \geqq q^{-\frac{4}{3}\alpha s q^{\frac{s}{m}}},$$

also erst recht

$$(B): \qquad \left|\sigma - \frac{P}{Q}\right| \geqq Q^{-\frac{2 q^{2/m}}{q^{1/m} - 1}}.$$

Damit ist bewiesen:

Satz 2: *Alle Näherungsbrüche von $\sigma$ mit genügend grossem Nenner genügen der Ungleichung (B). Die Zahl $\sigma$ ist also Nicht-Liouvillesch.*

Herrn Dr. med. A. HEILBRONN gewidmet.

*Krefeld*, März 1937.

---

**Mathematics.** — *Two remarks on* VAN DER CORPUT'*s generalisation of* KNOPP'*s inequality.* By V. LEVIN. (Communicated by J. G. VAN DER CORPUT).

(Communicated at the meeting of April 24, 1937).

1. Let $a_n \geqq o$ (not all $a_n = o$), $0 < u < 1$, $q > 0$, $0 < p \leqq 1$. Then

$$F(u) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n \left(a_0^{\binom{n}{0} q^n} a_1^{\binom{n}{1} q^{n-1}} \ldots a_n^{\binom{n}{n}}\right)^{\frac{p}{(q+1)^n}} \leqq \frac{q\lambda + 1}{(1-\lambda)^{1-p}} \left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right\}^p . \quad (1)$$

where $0 < \lambda = \lambda(u, p, q) < 1$ is uniquely determined by

$$u = \frac{(q+1)\lambda^{1-\frac{p}{q+1}}}{q\lambda + 1}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1, 1)$$

The sign of equality in (1) holds for $a_n = c\lambda^n$ $(c > 0)$. VAN DER CORPUT's inequality [1]) is (1) with $p = 1$, in which case $u = 1$ is admitted (KNOPP's inequality). But for $p = 1$, $u = 1$ equality cannot occur in (1), the constant $q + 1$ remaining, however, the best possible.

The proof of (1) runs as follows:

$$F(u) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n \lambda^{\frac{np}{q+1}} \left(\left(a_0^p \lambda^{-p.0}\right)^{\binom{n}{0} q^n} \left(a_1^p \lambda^{-p.1}\right)^{\binom{n}{1} q^{n-1}} \ldots \left(a_n^p \lambda^{-pn}\right)^{\binom{n}{n}}\right)^{\frac{1}{(q+1)^n}}$$

$$\leqq \sum_{n=0}^{\infty} u^n \lambda^{\frac{np}{q+1}} \frac{1}{(q+1)^n} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} q^{n-m} a_m^p \lambda^{-mp}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} a_m^p \left(\frac{u \lambda^{-\frac{pq}{q+1}}}{q+1}\right)^m \sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} \left(\frac{q u \lambda^{\frac{p}{q+1}}}{q+1}\right)^{n-m}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} a_m^p \left(\frac{u \lambda^{-\frac{pq}{q+1}}}{q+1}\right)^m \left(1 - \frac{q u \lambda^{\frac{p}{q+1}}}{q+1}\right)^{-m-1}$$

$$= (q\lambda + 1) \sum_{m=0}^{\infty} a_m^p \lambda^{m(1-p)}$$

---

[1]) "Generalisation of an inequality by KNOPP", these Proceedings **39** (1936), 1053–1055.