the entire dermatome with which it bears connection, and will distribute those stimuli reflectory throughout the entire myotome which is innervated by it.

Within the segmental reflectory field a certain functional subdivision can be found: Contraction of the M. obl. ext. could be chiefly obtained from the ventral section of the segmental reflectory field; contraction of the long dorsal muscles chiefly from the dorsal zone. The contraction of the M. rectus only could be elicited from the entire field.

Not only reflex actions may be obtained from the isolated spinal segment, its function is more extensive than normal; stimulating the skin of the trunk of an intact dog does not cause any perceptible contraction of dorsal or abdominal muscles, and usually the only result is a wrinkling of the skin (M. cutan. dors). But the completely isolated segment on the other hand distributes any stimulus that it receives through the periphery that belongs to the same segment, no matter in which part of the receptory field it has been received.

It is a matter of subjective interpretation which cannot be determined with objective data whether this is a case of Isolierungsveränderung, as MUNK calls it, or whether conditions than have been normally repressed are set free.

But even when the so-called Isolierungsveränderungen are assumed to be present the facts as set forth do prove that an isolated spinal segment possesses in principle all nutritive and reflex functions that are inhaerent to a segmental unit.

Physics. — *Propriétés paramagnétiques de cristaux de terres rares.* I. Par H. A. KRAMERS.

(Communicated at the meeting of December 17, 1932).

§ 1. *Introduction.* Selon JEAN BECQUEREL [1]), l'explication de certains phénomènes magnétooptiques, observés à basses températures dans les cristaux contenant des terres rares, devra se baser avant tout sur la considération de l'influence des forces électriques dans le réseau sur les atomes magnéto-actifs. Quant à la rotation paramagnétique dans ces cristaux, qui fut découverte par J. BECQUEREL en 1908 [2]), et qui fut après l'objet de nombreuses recherches, cette hypothèse fut examinée de plus près dans deux articles théoriques [3]), ayant pour but d'expliquer les résultats obtenus par J. BECQUEREL et W. J. DE HAAS pour la tyso-

[1]) J. BECQUEREL, Proc. Amst. **32**, 749, 1929, Zs. für Phys. **58**, 205, 1929.

[2]) J. BECQUEREL, Le Radium, **5**, 16, 1908.

[3]) H. A. KRAMERS, Proc. Amst. **32**, 1176, 1929, H. A. KRAMERS et J. BECQUEREL **32**, 1190, 1929, Dans ce qui suit, nous citons ces articles comme art. I et II.

nite et pour le xénotime. Quoique l'analyse pût expliquer la forme générale de la loi qui règle la rotation comme fonction du champ et de la température [1]), beaucoup de détails restaient insuffisamment éclaircis [2]). En particulier, l'explication qui fut proposée pour la valeur $n \cong 1$ dans la loi de la rotation dans la tysonite était en désaccord avec la théorie de Hund du paramagnétisme des sels des terres rares. Or, les expériences de DE HAAS et GORTER [3]) sur la susceptibilité de CeF_3 ont montré que cette théorie s'applique aussi à la tysonite.

La continuation des expériences sur la rotation par BECQUEREL et DE HAAS ont depuis fourni nombre de résultats, qui sont franchement incompatibles avec la théorie proposée dans les articles cités. Dans cette théorie il fut admis que dans les cristaux uniaxes, dont il s'agit, les termes de deuxième ordre dans le développement

$$U = u_0 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots .$$

du potentiel du champ qui agit sur un atome (u_k = polynome harmonique du k-ième degré dans les coordonnées cartésiennes) ont une influence prédominante comparée aux termes d'ordre plus élevé. Or un calcul approximatif montre, que les derniers termes ne sont point du tout négligeables dans la région de la couche électronique 4_3. (Un tel calcul s'effectue aisément, si l'on admet, que les couches extérieures de l'ion magnéto-actif ne sont pas déformées par les forces du réseau. La détermination de cette déformation amène de grandes difficultés, mais on prévoit qu'elle aura la tendance d'agrandir plutôt que de diminuer l'influence relative des termes d'ordre élevé.) Dans cet ordre d'idées il sera bon de rappeler que Mr. BETHE [4]) a pu expliquer qualitativement les effets ZEEMAN énormes trouvés par J. BECQUEREL dans le cas de nombreuses lignes d'absorption dans les cristaux de terres rares, précisément en tenant compte de ces termes dans le développement du potentiel.

Dans un article plus récent [5]) j'ai étudié l'influence d'un champ électrique quelconque sur un atome magnéto-actif. Si le nombre d'électrons est pair, les états stationnaires de l'atome seront en général décomposés en des niveaux non-dégénerés et non-magnétiques. Si, d'autre part, ce nombre est impair, les niveaux restent toujours doublement dégénérés; un champ magnétique décomposera un tel niveau en deux états magnétiques, dont la distance est proportionelle au champ. Comme ces deux états pris individuellement apportent à la rotation totale des contributions égales, mais de signes opposés, il en résulte la loi en tangente hyperbolique quand la température est assez basse.

---

1) $\varrho = \varrho_\infty (\lambda, T)\, tg\, hyp\, \frac{n \mu_B H}{k T}$.

2) Comparer C. R. du Congrès de Physique Solvay, 1930.

3) W. J. DE HAAS and C. J. GORTER, Proc. Amst. **33**, 949, 1930.

4) H. BETHE, Ann. d. Phys. **3**, 133, 1929.

5) H. A. KRAMERS, Proc. Amst. **33**, 959, 1930. Dans ce qui suit nous citons cet article comme III.

Même si l'on se base sur les formules générales du dernier article, certains résultats parmi ceux obtenus récemment par BECQUEREL et DE HAAS restent encore inexplicables. Or, dans une théorie complète, certains termes apparaissent que, jusqu'ici, j'avais considéré comme insignifiants; si l'on en tient compte certaines difficultés auxquelles se heurte l'interprétation des expériences semblent disparaître. Il s'agit d'une question qui, sous un aspect plus simple, s'est offerte déjà à Mr. VAN VLECK dans ces recherches connues [1]) sur la susceptibilité paramagnétique. VAN VLECK a remarqué qu'on commettrait une faute bien grosse, si l'on se contentait, en calculant l'énergie d'un niveau comme fonction du champ H, du terme linéaire en H; il faudra soigneusement tenir compte des termes en H^2 qui, dans certains cas (paramagnétisme de Eu et Sm), jouent même un rôle prédominant. Dans la théorie de la rotation paramagnétique, on rencontre une situation analogue. Dans un champ magnétique la partie de la rotation due à un certain niveau, ne sera pas constante mais dépendra encore de H. Dans ce qui suit, nous étudions cette dépendance de plus près; je suis redevable à Mr. VAN VLECK d'avoir attiré mon attention sur ce problème il y a déjà plusieurs années. Au même temps nous aurons l'occasion de traiter d'une façon générale le problème de la susceptibilité paramagnétique.

2. *L'influence simultanée des forces du réseau et du champ magnétique.*

Soient j le nombre quantique du moment d'impulsion totale et g le facteur de LANDÉ qui caractérisent l'état fondamental d'un ion libre d'une terre rare. Nous désignons les fonctions d'ondes normalisées, correspondant à ce niveau, par φ_m, où m est le nombre quantique "magnétique" $(m = -j, \ldots + j)$ qui correspond à la quantisation par rapport à l'axe des z. Nous les choisissons de manière qu'elles se transforment sous une rotation quelconque des axes des coordonnées comme $\binom{2j}{j+m}^{1/2} \xi^{j+m} \eta^{j-m}$ où $\xi^2, -\xi\eta, -\eta^2$ se transforment comme $x+iy$, z, $x-iy$. Elles obéissent à l'équation

$$(H - E)\, \varphi_m = 0$$

où H est l'opérateur hamiltonien de l'ion libre, tandis que E représente son énergie.

Admettons que l'influence énergétique des forces du réseau sur cet état soit petite comparée à la distance des niveaux plus élevés de l'ion libre. Nous abandonnons donc l'idée d'un effet PASCHEN-BACK électrique, que nous avions admise dans notre théorie de la rotation dans la tysonite (voir art. I et II). Nous considérons les forces électriques du réseau comme une perturbation qui agit sur les électrons de la couche 4_3.

[1]) J. H. VAN VLECK. Theory of electric and magnetic susceptibilities, Oxford, 1932.

Désignons par V l'énergie potentielle de ces forces; elle est une fonction des coordonnées de ces électrons et on peut la choisir telle, qu'elle renferme déjà l'influence due à la déformation des couches complètes 5_0 et 5_1.

Par W nous désignons les termes qu'il faut introduire dans l'opérateur hamiltonien pour rendre compte de la présence d'un champ magnétique homogène.

Les fonctions d'ondes des niveaux, dans lesquels l'état fondamental de l'ion libre est décomposé, seront données par:

$$\psi = \sum_m a_m \varphi_m + \zeta \qquad \sum_m a_m^* a_m = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

où ζ est petit par rapport aux φ_m. L'équation de SCHRÖDINGER qui se rapporte au système perturbé prend la forme

$$(H + V + W - E - \triangle)\,\psi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

où $\triangle$ est l'énergie additionnelle d'un niveau perturbé.

Multipliant (2) par φ_m^* et intégrant par rapport aux coordonnées (y compris les coordonnées des spins) de tous les électrons, on trouve — en négligeant les termes qui sont petits de deuxième ordre —

$$\triangle\, a_{m'} = \sum_m (V_{m'm} + W_{m'm})\, a_m\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$V_{m'm} = \int \varphi_{m'}^*\, V\, \varphi_m\, d\tau\,, \qquad W_{m'm} = \int \varphi_{m'}^*\, W\, \varphi_m\, d\tau\,, \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

où $\int \ldots d\tau$ symbolise l'intégration en question.

Quant aux éléments $W_{m'm}$ de la matrice de la perturbation magnétique, il y aura d'abord les termes diagonaux

$$W_{mm} = m\, g\, \mu_B\, H_z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

où μ_B est le magnéton de Bohr, tandis que H_z est la composante du champ parallèle à l'axe auquel se rapporte m. Les deux autres composantes H_x et H_y, perpendiculaires à H_z, donnent lieu aux éléments:

$$W_{m,m\pm 1} = \tfrac{1}{2}\, g \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\; \mu_B\, (H_x + i H_y)\,. \quad . \quad . \quad (6)$$

Nous avons négligé les termes diamagnétiques dans la fonction HAMILTONienne.

Quant à la perturbation électrique, nous développons le potentiel du champ selon la formule

$$U(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{\lambda,\mu} U_\lambda^\mu = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} f_\lambda^\mu(r)\, Y_\lambda^\mu(\vartheta, \varphi)$$

où les Y_λ^μ sont les fonctions sphériques de Laplace d'ordre λ, qui dépendent de l'azimuth φ en forme d'un facteur $e^{i\mu\varphi}$. Si l'on ne tient pas compte

de la déformation des couches extérieures $f_\lambda^\mu(r)$ sera rigoureusement proportionel à r^λ. En posant

$$V_\lambda^\mu = -\sum_k e\, U_\lambda^\mu(r_k, \vartheta_k, \varphi_k),$$

où la sommation est étendue sur tous les électrons de la couche on aura

$$V = \sum_{\lambda,\mu} V_\lambda^\mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7a)$$

On trouve les éléments des matrices des V_λ^μ à des facteurs près qui ne dépendent pas de m, m', si l'on égalise les coefficients de A, B, C dans l'équation [1])

$$\left.\begin{aligned}\sum_{m',m,\mu} (-1)^{j+m} \binom{2j}{j+m'}^{1/2} \binom{2j}{j+m}^{1/2} (V_\lambda^\mu)_{m'm}\, A^{j-m}\, B^{j+m'}\, C^{\lambda-\mu} = \\ (B-A)^{2j-\lambda}\,(B-C)^{\lambda}\,(A-C)^{\lambda}\end{aligned}\right\} \quad (7b)$$

Il s'ensuit que ces éléments ne diffèrent de 0, que si les conditions suivantes sont remplies.

$$\mu = m' - m, \qquad 2j - \lambda \geqq 0.$$

Si l'on remplace dans (7) m' et m par $-m$ et $-m'$, et A, B par B, A on trouve:

$$(V_\lambda^\mu)_{-m,-m'} = (-1)^{2j+\lambda+m+m'} (V_\lambda^\mu)_{m'm} = (-1)^{\lambda+\mu} (V_\lambda^\mu)_{m',m} \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Les matrices en question s'annulent toujours quand λ est impair, parce que les V_λ^μ sont multipliés par $(-1)^\lambda$ quand on réfléchit la position des électrons par rapport à l'origine. On aura donc d'une façon générale:

$$V_{-m,-m'} = (-1)^{m'-m}\, V_{m'm} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9a)$$

à côté de la condition hermitienne:

$$V_{m'm} = V^*_{mm'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9b)$$

De même, les éléments de matrice de W satisfont à

$$W_{-m,-m'} = -(-1)^{m'-m}\, W_{m'm} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10a)$$

$$W_{m'm} = W^*_{mm'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10b)$$

La première de ces conditions peut être considérée comme un cas particulier de (8) correspondant à $\lambda = 1$.

En mettant (3) sous la forme

$$\triangle a_{m'} = \sum_m \{ V_{m'm} + W_{m'm}(\vec{H}) \}\, a_m$$

---

[1]) On l'obtient facilement en se servant de la méthode symbolique, développée dans deux articles antérieurs (Proc. Amst. **33**, 953, 1930; **34**, 965, 1931).

on déduit de cette formule à l'aide de (9), (10)

$$\triangle (-1)^{j+m'} a^*_{-m'} = \sum_m \{ V_{m'm} + W_{m'm} (-\vec{H}) \} (-1)^{j+m} a^*_{-m}$$

On en conclut que si

$$\psi = \Sigma\, a_m \varphi_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

représente comme première approximation un état de l'ion perturbé, qui correspond à l'énergie $\triangle$ et au champ $\vec{H}$, l'expression

$$\psi' = \Sigma\, a'_m \varphi_m \qquad a'_m = C (-1)^{j+m} a^*_{-m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

($C =$ constante quelconque) représente un état de l'ion, qui correspond à la même énergie et à la même perturbation électrique mais à un champ magnétique renversé. Pour $\vec{H} = 0$ (12) et (13) obéissent donc à la même équation de SCHRÖDINGER; dans ce cas ψ' et ψ ne pourraient différer que par un facteur constant ε et l'on aurait:

$$a'_m = C (-1)^{j+m} a^*_{-m} = \varepsilon\, a_m$$

$$C^* (-1)^{j-m} a_m = \varepsilon^* a^*_{-m}$$

Il s'ensuit

$$\varepsilon^* \varepsilon = (-1)^{2j} C^* C$$

On ne peut pas remplir cette condition quand j est demi impair, et nous avons retrouvé un cas particulier de la loi générale, selon laquelle pour un nombre impair d'électrons les niveaux d'un système perturbé par des forces purement électriques sont toujours au moins doublement dégénérés. *Dans ce qui suit nous supposons toujours j demi-impair.*

Nous désignons les états, dans lesquels l'ion libre est décomposé par le champ électrique ($\vec{H} = 0$), par un nombre quantique μ qui prend les valeurs $-j, -j+1, \ldots j$ et qui est choisi de telle façon que les niveaux d'énergie correspondants $\triangle^0_\mu$ satisfaisent à $\triangle^0_\mu = \triangle^0_{-\mu}$. Si un système de fonctions de SCHRÖDINGER correspondantes est donné par

$$\psi^0_\mu = \sum_m a^{0\mu}_m \varphi_m \qquad \sum_m a^{*0\mu}_m a^{0\mu'}_m = \delta_{\mu\mu'}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

on pourra toujours s'arranger de manière que

$$a^{0+\mu}_m = (-1)^{m-\mu} a^{*0-\mu}_{-m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

A part la liberté dans le choix des μ, on peut toujours remplacer un système de coëfficients $a^{0\mu}_m$ par un autre qu'on obtient en effectuant une transformation unitaire quelconque sur chacune des paires ψ^0_μ et $\psi^0_{-\mu}$.

La matrice de la perturbation électrique devient, par rapport au système orthogonal et normalisé des ψ^0, une matrice diagonale

$$V_{\mu'\mu} = \triangle^0_\mu \delta_{\mu'\mu} \quad , \quad \triangle^0_\mu = \triangle^0_{-\mu}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

tandis que les éléments de la matrice de la perturbation magnétique $\mathbf{W}_{\mu'\mu}$ sont, comme les $W_{m'm}$, des fonctions linéaires et homogènes en H_x, H_y, H_z qui satisfont aux relations [1]):

$$\left.\begin{aligned} W_{-\mu,-\mu'} &= -(-1)^{\mu'-\mu}\, W_{\mu'\mu} \\ W_{\mu\mu'} &= W^*_{\mu'\mu} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Le problème séculaire se présente maintenant sous la forme:

$$\left.\begin{aligned} \psi &= \sum_{\mu} b_\mu\, \psi^0_\mu = \sum_{\mu,m} b_\mu\, a^{0\mu}_m\, \varphi_m = \sum_m a_m\, \varphi_m \\ (\triangle - \triangle^0_{\mu'})\, b_{\mu'} &= \sum_{\mu} W_{\mu'\mu}\, b_\mu \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

et les niveaux $\triangle$ de l'ion perturbé par $\vec{H}$ sont donnés par les racines de l'équation

$$D \equiv |(\triangle - \triangle^0_\mu)\, \delta_{\mu'\mu} - W_{\mu'\mu}| = 0, \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

La déterminante D est un polynôme pair par rapport à H_x, H_y, H_z (conséquence de (10) ou (17)). Pour les petites valeurs de H_x, H_y, H_z les racines de D peuvent être mises sous la forme

$$\triangle_{\pm|\mu|} = \triangle^0_\mu + Q^{(1)}_\mu(\vec{H}) \pm \sqrt{|W_{\mu,-\mu}|^2 + W^2_{\mu\mu}}\,(1 + Q^{(2)}_\mu(\vec{H})), \quad \ldots \quad (20)$$

où $Q^{(1)}$ et $Q^{(2)}$ sont des séries de puissances en H_x, H_y, H_z qui ne contiennent que des termes de degré pair et qui s'annulent pour $\vec{H} = 0$. Pour les grandes valeurs de $\vec{H}$ on aura comme première approximation l'effet ZEEMAN de l'ion libre; pour les valeurs intermédiaires il y aura une espèce d'effet PASCHEN-BACK.

Pour les petites valeurs de H_x, H_y, H_z les fonctions d'ondes appartenant aux niveaux (20) sont données par:

$$\left.\begin{aligned} \psi_{+|\mu|} &= \alpha_\mu\, \psi^{(0)}_\mu + \beta_\mu\, \psi^{(0)}_{-\mu} + \sum_{\mu'} c^{+|\mu|}_{\mu'}\, \psi^{(0)}_{\mu'} \\ \psi_{-|\mu|} &= -\beta^*_\mu\, \psi^{(0)}_\mu + \alpha^*_\mu\, \psi^{(0)}_{-\mu} + \sum_{\mu'} c^{-|\mu|}_{\mu'}\, \psi^{(0)}_{\mu'} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (21)$$

où les $c^{\pm|\mu|}_{\mu'}$ sont des coëfficients qui s'annulent avec $\vec{H}$.

Les α et β ne dépendent que de la direction du champ; ils sont définis par:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_\mu &= \cos\vartheta_\mu\, e^{i\chi_\mu} & \beta_\mu &= \sin\vartheta_\mu\, e^{-i\chi_\mu} \\ \frac{W_{\mu,-\mu}}{W_{\mu\mu}} &= tg\, 2\vartheta_\mu\, e^{2i\chi_\mu} & W_{\mu\mu}\cos 2\vartheta &\gtrless 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (22)$$

---

[1]) $W_{\mu'\mu} = \Sigma\, a^{*0\mu'}_{m'}\, W_{m'm}\, a^{0\mu}_m =$

$$= -\Sigma\,(-1)^{m-\mu}\, a^{0-\mu}_{-m}\, W_{-m,-m'}\,(-1)^{m'-m}\,(-1)^{-m'+\mu'}\, a^{*0-\mu'}_{-m'}$$

$$= -(-1)^{\mu'-\mu}\, W_{-\mu,-\mu'}.$$

Les premiers deux termes dans le second membre de chacune des équations (21) constituent les solutions du problème de la perturbation électrique qui sont appropriées au champ magnétique. Les $c_{\mu'}^{\pm|\mu|}$ peuvent être développés suivant les puissances de H, les coëfficients étant des fonctions de la direction de $|H|$. A l'aide du calcul des perturbations, on trouve pour les termes linéaires en H:

$$\left.\begin{aligned} c_{\mu'}^{+|\mu|} &= \frac{a_\mu W_{\mu'|\mu|} + \beta_\mu W_{\mu',-|\mu|}}{\triangle_\mu^0 - \triangle_{\mu'}^0} \quad \mu' \neq \pm|\mu| \\ c_{\mu'}^{-|\mu|} &= \frac{-\beta_\mu^* W_{\mu'|\mu|} + \alpha_\mu^* W_{\mu',-|\mu|}}{\triangle_\mu^0 - \triangle_{\mu'}^0} \quad \mu' \neq \pm|\mu| \\ c_{\mu'}^{+|\mu|} &= c_{\mu'}^{-|\mu|} = 0 \qquad\qquad (\mu' = \pm|\mu|) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Si, pour un $|\mu|$ donné, le niveau reste dégénéré en seconde approximation, c. à d. si $W_{\mu\mu}$ et $W_{\mu,-\mu}$ s'annulent, un calcul plus approfondi sera nécessaire. Aussi les formules ne restent plus bonnes quand il y a des niveaux qui, en l'absence du champ magnétique, sont plus que doublement dégénerés. Un tel cas s'offre quelquefois quand le champ électrique possède un haut degré de symétrie.

Souvent le champ électrique jouit de certaines propriétés de symétrie qui sont intimément liées à la symétrie du cristal. Comme conséquence, certains éléments de la matrice $V_{m'm}$ s'annulent tandis qu' éventuellement des relations linéaires existent entre d'autres parmi eux. L'équation séculaire pourra être décomposée souvent en des équations de degrés inférieurs. Cette question a été étudiée d'une façon générale par Mr. BETHE [1]).

§ 3. *La rotation paramagnétique d'un seul niveau.*

Nous définissons les éléments de matrice $\vec{\omega}_{m'm}$ d'une certaine grandeur vectorielle par [2])

$$\vec{\omega}_{m'm} = \frac{i\nu}{h} \sum_g \frac{[\vec{P}_{m'g}\, \vec{P}_{gm}]}{\nu^2 - \nu_g^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24a)$$

où ν est la fréquence de la lumière, tandis que la sommation s'étend à tous les états excités g de l'ion, l'énergie d'excitation étant donnée par $h\nu_g$. Les $\vec{P}_{mg}, \vec{P}_{gm}$ sont les éléments de matrice de la polarisation électrique $\vec{P}$ de l'ion:

$$\vec{P}_{mg} = \int \varphi_m^* \vec{P} \varphi_g \, d\tau = \vec{P}_{gm}^* \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24b)$$

---

[1]) H. BETHE, Ann. d. Phys. **3**, 133. 1929.

[2]) Voir Art. III p. 969.

Dans cette formule φ_m est une des fonctions d'ondes qui décrivent l'état fondamental de l'ion libre. tandis que les φ_g sont celles qui correspondent aux états excités. Nous admettons que les φ_g tiennent déjà compte des forces du réseau, car souvent le domaine où elles sont sensiblement différentes de zéro s'étendra jusqu' aux atomes voisins. D'autre part nous négligeons toujours l'effet d'un champ magnétique sur les états g, c. à d. nous négligeons les effets de rotation diamagnétique.

Les $\vec{\omega}_{m'm}$ satisfont aux relations:

$$\left.\begin{aligned} \vec{\omega}_{-m,-m'} &= -(-1)^{m'-m}\,\vec{\omega}_{m'm} \\ \vec{\omega}_{m\,m'} &= \vec{\omega}^{*}_{m'\,m} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

La seconde équation suit immédiatement de (24), tandis qu'on prouve la première en tenant compte de la double dégénérescence des niveaux g [1]). Ici, comme dans le cas des $V_{m'm}$, la symétrie du réseau peut imposer certaines conditions auxquelles les $\vec{\omega}_{mm'}$ doivent obéir. Si l'on avait affaire à un ion libre, on voit aisément que les $\vec{\omega}_{mm'}$ sont, à un facteur constant près, égaux aux éléments de matrice donnés par (5) et (6), si l'on remplace H_x, H_y, H_z par des vecteurs d'unité de longueur dans la direction de l'axe de x, y, z respectivement.

A l'aide des $\vec{\omega}_{m'm}$ on calcule aisément la contribution $\vec{\omega}$ d'un état de l'ion décrit par (1) à la rotation paramagnétique totale du cristal. En s'appuyant sur la formule (34) dans l'article III, on trouve immédiatement

$$\vec{\omega} = \sum_{m',m} a^{*}_{m'}\,\vec{\omega}_{m'm}\,a_m\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

si l'on néglige l'influence du terme ζ en (1) et le changement des ν_g qui se rapporte à la déformation de l'état fondamental de la couche des électrons 4_3 par le champ électrique.

Si les a_m sont précisément les grandeurs qui résolvent les équations de perturbation (3), $\vec{\omega}$ représente la contribution à la rotation qu' apporte le niveau correspondant. Les formules du paragraphe précédent (voir (18)) montrent qu'il sera utile d'introduire les éléments de matrice:

$$\vec{\omega}_{\mu'\mu} = \sum_{m'm} a^{0*}_{m'}{}^{\mu'}\,\vec{\omega}_{m'm}\,a^{0\mu}_{m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

qui jouissent des propriétés suivantes:

$$\left.\begin{aligned} \vec{\omega}_{-\mu,-\mu'} &= -(-1)^{\mu'-\mu}\,\vec{\omega}_{\mu'\mu} \\ \vec{\omega}_{\mu\mu'} &= \vec{\omega}^{*}_{\mu'\mu} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

---

[1]) Voir la question analogue dans art. III, p. 969.

Pour la rotation d'un niveau on trouve alors:

$$\vec{\omega} = \sum_{\mu'\mu} b^*_{\mu'} \vec{\omega}_{\mu'\mu} b_\mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

La comparaison avec (21) montre que, pour les petites valeurs de H, la rotation des niveaux $+|\mu|$ et $-|\mu|$ sera donnée par:

$$\vec{\omega}_{\pm|\mu|} = \vec{\omega}^{(0)}_{\pm|\mu|} + \vec{\omega}^{(1)}_{\pm|\mu|} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

où les $\vec{\omega}^{(0)}_{\pm|\mu|}$ ne dépendent que de la direction du champ, tandis que les $\vec{\omega}^{(1)}_{\pm\mu}$ s'annulent avec H. Pour les $\vec{\omega}^{(0)}_{\pm|\mu|}$ on trouve:

$$\left.\begin{aligned} \vec{\omega}^{(0)}_{+|\mu|} = -\vec{\omega}^{(0)}_{-|\mu|} = \alpha^*_\mu \alpha_\mu \vec{\omega}_{\mu\mu} + \beta^*_\mu \beta_\mu \vec{\omega}_{-\mu,-\mu} + \\ + \alpha^*_\mu \beta_\mu \vec{\omega}_{\mu,-\mu} + \beta^*_\mu \alpha_\mu \vec{\omega}_{-\mu,\mu} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (31a)$$

En première approximation les rotations des deux niveaux $\pm|\mu|$ sont égales mais de sens opposés. Le résultat contenu en (31*a*) ne diffère pas de celui donné par les formules (37) et (38) dans l'article III. Il exprime que $\omega^{(0)}_{|\mu|}$ est égal à une fonction vectorielle linéaire du champ magnétique, divisée par $\triangle^{(1)}_{|\mu|} = \sqrt{W^2_{\mu\mu} + |W_{\mu,-\mu}|^2}$, c. à d. par la partie linéaire du déplacement du niveau dans le champ.

Les $\vec{\omega}^{(1)}_{\pm\mu}$ peuvent être développés suivant les puissances de H. On trouve les termes linéaires en H à l'aide de (23):

$$\left.\begin{aligned} \omega^{(1)}_{+|\mu|} &= \Sigma \Big\{ (\alpha^*_\mu \vec{\omega}_{|\mu|\mu'} + \beta^*_\mu \vec{\omega}_{-|\mu|\mu'}) c^{|\mu'|}_{\mu'} + \\ &\qquad + c^{*|\mu|}_{\mu'} (\vec{\omega}_{\mu'|\mu|} \alpha_\mu + \vec{\omega}_{\mu',-|\mu|} \beta_\mu) \Big\} \\ &= \sum_{\mu' \neq \pm|\mu|} \frac{\vec{\omega}_{|\mu|\mu'} W_{\mu',|\mu|} + \vec{\omega}_{-|\mu|,\mu'} W_{\mu',-|\mu|}}{\triangle^0_\mu - \triangle^0_{\mu'}} = \vec{\omega}^{(1)}_{-|\mu|} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (31b)$$

Cette formule nous apprend que le terme dans la rotation qui est linéaire en H est une fonction vectorielle linéaire de $\vec{H}$; il est égal pour les deux niveaux $\pm|\mu|$.

On prévoit d'une façon générale que les termes dans la rotation des deux niveaux $\pm|\mu|$ qui sont proportionels à H^n sont égaux si n est impair, tandis qu' ils sont égaux mais de sens opposés si n est pair.

La somme des grandeurs $(\vec{\omega}_{+|\mu|} + \vec{\omega}_{-|\mu|})$ étendue sur toutes les valeurs de μ est indépendante de $\vec{H}$. On trouve aisément

$$\sum_{|\mu|} (\vec{\omega}_{+|\mu|} + \vec{\omega}_{-|\mu|}) = \sum_\mu \vec{\omega}_{\mu\mu} = Spur\, \vec{\omega} = \sum_m \vec{\omega}_{mm} \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$