Physics. — *Zur Theorie der Einfangung von Elektronen durch α-Teilchen.* Von H. C. BRINKMAN und H. A. KRAMERS.

(Communicated at the meeting of November 29, 1930).

§ 1. RUTHERFORD [1]) hat aus seinen Versuchen die freie Weglänge in Luft für die von HENDERSON [2]) entdeckte Einfangung von Elektronen durch α-Teilchen bestimmen können. Die gefundene freie Weglänge kann durch eine Formel $\lambda = a \,.\, v^b$ dargestellt werden, wo v die Geschwindigkeit des α-Teilchens und b gleich 5.6 ist.

JACOBSEN [3]) hat die Rutherfordschen Messungen wiederholt und erweitert auf andere Luftarte. Für Luft findet er Werte, die sich den Rutherfordschen ziemlich gut anschliessen aber 10 bis 50 % kleiner ausfallen. JACOBSEN bemerkt, dass im Gebiet kleiner Geschwindigkeiten das Gleichgewichtsverhältnis zwischen doppelt und einfach geladene Teilchen in Luft und Glimmer verschieden ist, was mit sich bringt, dass die Werte der freien Weglänge für Einfangung hier ziemlich unsicher sind.

THOMAS [4]) hat eine korrespondenzmässige Theorie der Einfangung gegeben. Er verfolgt die Bahn des Elektrons während der Wechselwirkung des Atoms mit einem sehr schnellen α-Teilchen und berechnet die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Elektron ungefähr mit der Geschwindigkeit und in der Richtung des α-Teilchens aus dem Atom herausfliegt. Der gefundene Wirkungsquerschnitt ist für Wasserstoff proportional v^{-11} und zu klein, als dass die Einfangung in Wasserstoff überhaupt gemessen werden könnte, was JACOBSEN auch experimentell bestätigt hat.

Für schwere Stoffe findet THOMAS einen Wirkungsquerschnitt proportional $v^{-5.5}$ und für Luft einen vier mal grösseren Wert als RUTHERFORD gemessen hat.

OPPENHEIMER [5]) hat auf Grund der Bornschen Stosstheorie den Wirkungsquerschnitt für Einfangung in Wasserstoff berechnet. Er findet denselben proportional v^{-6} für grosse Geschwindigkeiten des α-Teilchens. Für Luft erzielt er eine sehr gute Übereinstimmung mit den Rutherfordschen Experimenten.

---

[1]) E. RUTHERFORD, Phil. Mag. **47**, 277, 1924.

[2]) G. H. HENDERSON, Proc. Royal Soc. **102**, 496, 1923.

[3]) J. C. JACOBSEN, Nature. **7**, 2982, 1926. Diss. Kopenhagen (DYVA & JEPPESEN, 1928). Phil. Mag. **10**, 401, 1930.

[4]) L. H. THOMAS, Proc. Royal Soc. **114**. 561, 1927. Vgl. auch N. BOHR, Zs. für Phys. **34**, 148 (Fussnote). 1925. Gegen einen früheren Versuch von FOWLER (Phil Mag. **47**, 257), welcher sich auf Betrachtungen eines Temperaturgleichgewichts bezog, können ernste Einwände erhoben werden.

[5]) OPPENHEIMER, Phys. Rev. **31**, 66, 349, 1928.

Eine nähere Betrachtung zeigt aber, dass die Oppenheimersche Rechnung nicht einwandfrei ist. Wir haben deshalb die wellenmechanische Rechnung wieder aufgenommen, wobei wir uns wie OPPENHEIMER auf die erste Bornsche Näherung beschränkt haben.

Es zeigt sich, dass die Integralausdrücke, die bei der Berechnung der Einfangung eines in einem Coulombfelde gebundenen Elektrons auftreten, sich exakt auswerten lassen. Im Falle einer s-Bahn bekommt man besonders einfache Resultate.

Angewandt auf atomaren Wasserstoff erhalten wir für den Wirkungsquerschnitt Q einen Wert, der für grosse Geschwindigkeiten des α-Teilchens proportional v^{-12} ist und ein Maximum hat wenn v in der Nähe der Geschwindigkeit des Elektrons in seiner Bohrschen Bahn liegt. In Übereinstimmung mit JACOBSENs Resultat sind unsere Werte für Q so klein, dass eine Einfangung in Wasserstoff kaum nachweisbar wäre, immerhin sind unsere Werte im allgemeinen grösser als diejenige der Thomasschen Formel, jedoch kleiner als die Oppenheimerschen Werte. Unsere Formeln lassen sich zur ungefähren Berechnung von Q für Luft anwenden. Wir finden eine befriedigende Übereinstimmung mit den experimentellen Werten. Im besonderen kommt das Rutherfordsche experimentelle Gesetz der Proportionalität von Q mit $v^{-5.6}$ so zum Vorschein, dass die Einfangung der K-Elektronen im experimentellen Gebiet mit zunehmender Geschwindigkeit zunimmt, für die leichter gebundenen L-Elektronen dagegen schneller als $v^{-5.6}$ abnimmt.

§ 2. In diesem Paragrafen wollen wir das Einfangungsproblem als ein wellenmechanisches Dreikörperproblem behandeln. Der Übersichtlichkeit wegen wiederholen wir die Formeln der allgemeinen Methode. Sie sind von den Oppenheimerschen Formeln nicht wesentlich verschieden.

Die Wechselwirkung zwischen H-Kern und α-Teilchen wird immer vernachlässigt.

Es sei $\varphi_0\, e^{-2\pi i \nu_0 t}$ die Lösung der Schrödingergleichung:

$$(H + H_0)\,\psi = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

für den Fall eines im Coulombfelde eines z-fach geladenen Kernes im Grundzustande gebundenen Elektrons (Wechselwirkungsenergie H_0) und eines gegen das Atom mit der relativen Geschwindigkeit **v** bewegten α-Teilchens, unter Vernachlässigung der Wechselwirkung H_1 zwischen Elektron und α-Teilchen.

Es sei $\varphi_1\, e^{-2\pi i \nu t}$ die Lösung der Schrödingergleichung:

$$(H + H_1)\,\psi = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial t},$$

für den Fall eines einmal ionisierten gegen den H-Kern mit der relativen

Geschwindigkeit $\mathbf{v}'$ bewegten He^+-Atoms im Grundzustande, unter vernachlässigung der Wechselwirkung H_0 zwischen H-Kern und Elektron.

Die Funktionen φ_0 und φ_1 denken wir uns folgendermassen gewählt. Erstens streichen wir in beiden den Faktor, welcher die Koordinaten des gemeinschaftlichen Schwerpunktes enthält und der sich bei der Einfangung ja nicht ändert. Zweitens seien φ_0 bzw. φ_1 so normiert, dass relativ zum Atom v, bzw. v', α-Teilchen pro Sek. die Flächeneinheit senkrecht zur Bewegungsrichtung durchqueren.

Wir setzen jetzt als Lösung der vollständigen Schrödingergleichung:

$$(H + H_1 + H_0)\,\psi = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

an:

$$\psi = c_0\,(t)\,\varphi_0\,e^{-2\pi i \nu_0 t} + \int c_1\,(\mathbf{v}', t)\,\varphi_1\,e^{-2\pi i \nu t}\,d\sigma' + \ldots$$

Hier bezeichnet $d\sigma'$ das Raumelement in dem Vektorraum σ' wobei $h\sigma'$[1]) der relative Impuls vom System α-Teilchen-Elektron relativ zum gemeinschaftlichen Schwerpunkt des Systems ist. Mit dieser Festsetzung sind $|c_0|^2$ bzw. $\int |c_1|^2\,d\sigma'$ die relativen Wahrscheinlichkeiten dafür, dass man das Elektron im Grundzustand am Atomkern bzw. am α-Teilchen gebunden findet. Dieses gilt aber nur wenn wir noch annehmen, dass φ_0 und φ_1 mit genügender Annäherung zu einander orthogonal sind[2]). Die nicht hingeschriebenen Terme beziehen sich auf andere Zustände des Elektrons als die hier ins Auge gefassten (z.B. Anregung und Ionisation, und Einfangung in vom Grundzustande verschiedene Zustände).

Man findet in bekannter Weise nach der Methode der Variation der Konstanten, wenn zur Zeit $t = 0$, $c_0 = 1$ und $c_1 = 0$ gesetzt wird, dass die zeitliche Änderung von c_1 während eines Zeitintervalls $0 \to t$ gleich

$$-\frac{h}{2\pi i}\dot{c}_1 = \int d\tau\,\varphi_0^*\,H_1\,\varphi_1\,e^{-2\pi i(\nu-\nu_0)t} = H_{01}\,e^{-2\pi i(\nu-\nu_0)t} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ist, wo $\int d\tau$ Integration über alle vorkommenden Koordinaten bedeutet.

Hierbei ist angenommen: erstens, dass c_1 klein gegen eins bleibt während des betrachteten Zeitverlaufs, zweitens dass auch die Wahrscheinlichkeit des Übergangs nach höheren Zuständen des Atoms und der Ionisation während dieser Zeit so klein ist, dass c_0 praktisch gleich 1 bleibt und drittens dass φ_0 und φ_1 orthogonal sind, was bei nicht zu kleinen Abständen von Kern und α-Teilchen tatsächlich ungefähr zutrifft. Wir haben jetzt $\dot{c}_1$ über t und sodann $|c_1|^2$ über σ zu integrieren.

---

[1]) $h\,\sigma' = \mu\,v'$ wo μ die reduzierte Masse bedeutet.

[2]) Man beweist in diesem Fall leicht, dass bei der gewählten Normierung $|c_0|^2 + \int |c_1|^2\,d\sigma' + \ldots$ zeitlich konstant bleibt.

Man findet:

$$I = \int \left| \int_0^t H_{01}\, e^{-2\pi i(\nu-\nu_0)t}\, dt \right|^2 d\sigma' = \int_0^\infty \int_{-1}^{+1} \left| \int_0^t H_{01}\, e^{-2\pi i(\nu-\nu_0)t}\, dt \right|^2 2\,\pi\sigma'^2\, d\sigma'\, d\xi$$

wo ξ der Kosinus des Winkels zwischen $\mathbf{v}$ und $\mathbf{v}'$ ist.

Wegen:

$$\frac{d\nu}{d\sigma'} = v' \quad \text{und} \quad \sigma' = \frac{\mu v'}{h}$$

folgt in wohlbekannterWeise [1]):

$$I = t \int_{-1}^{+1} \left| H_{01} \right|^2 \frac{2\,\pi v'}{h^2}\, \mu^2\, d\xi.$$

In dieser Formel ist v' so zu wählen, dass das Energieprinzip:

$$\frac{v^2}{2}\,\frac{M(Mq+m)}{\Sigma M} + E_{K,e} = \frac{v'^2}{2}\,\frac{Mq\,(M+m)}{\Sigma M} + E_{\alpha,e}$$

erfüllt ist.

Hier bedeutet:

m bzw. qM bzw. M = die Masse des Elektrons, bzw. des Kernes, bzw. des α-Teilchens.

$\Sigma M = m + (q+1)\,M$

$E_{K,e}$ bzw. $E_{\alpha,e}$ = die Bindungsenergie des Elektrons am Kerne bzw. am α-Teilchen.

Der Wirkungsquerschnitt ist:

$$Q = \frac{I}{tv} \cdot \frac{4\pi^2}{h^2}$$

Bei der Berechnung der Integralausdrücke erhält man für die Wellenfunktion des Anfangszustandes φ_0 [2]):

$$\frac{1}{\sqrt{\pi a_z^3}}\, exp \left\{ \frac{2\,\pi i}{h} (\mathbf{p}_\alpha \cdot \varrho_\alpha + \mathbf{p}_{Ke} \cdot \varrho_{Ke}) - \frac{|\varrho|}{a_z} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi a_z^3}}\, exp \left[\frac{2\,\pi i}{h} \left\{ \mathbf{v} \cdot \left(\mathbf{R} \left[-\frac{M^2(Mq+m)}{(\Sigma M)^2} - \frac{M(Mq+m)^2}{(\Sigma M)^2} \right] + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \varrho \left[\frac{M^3 q}{(\Sigma M)^2} + \frac{M^2 q\,(Mq+m)}{(\Sigma M)^2} \right] \right) \right\} - \frac{|\varrho|}{a_z} \Bigg]$$

---

[1]) P. A. M. DIRAC, Proc. Royal Soc. **114**, 243, 1927.

[2]) Die von OPPENHEIMER loc. cit. p. 350 gegebene Formel (2) stimmt mit unserem Ausdruck nicht überein.

und für die des Endzustandes:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi a_{He}^3}}\, exp\left\{\frac{2\pi i}{h}(\mathbf{p}_K\cdot \varrho_K + \mathbf{p}_{\alpha e}\cdot \varrho_{\alpha e}) - \frac{|R|}{a_{He}}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi a_{He}^3}}\, exp\left[\frac{2\pi i}{h}\mathbf{v}'\cdot\left(\mathbf{R}\left[-\frac{M^2 q (M+m)}{(\Sigma M)^2} - \frac{M^3 q^2}{(\Sigma M)^2}\right] + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \varrho\left[\frac{(M+m)^2 Mq}{(\Sigma M)^2} + \frac{M^2 q^2 (M+m)}{(\Sigma M)^2}\right]\right)\left\{ - \frac{|R|}{a_{H^e}}\right]$$

Hier bedeuten (vgl. Fig. 1):

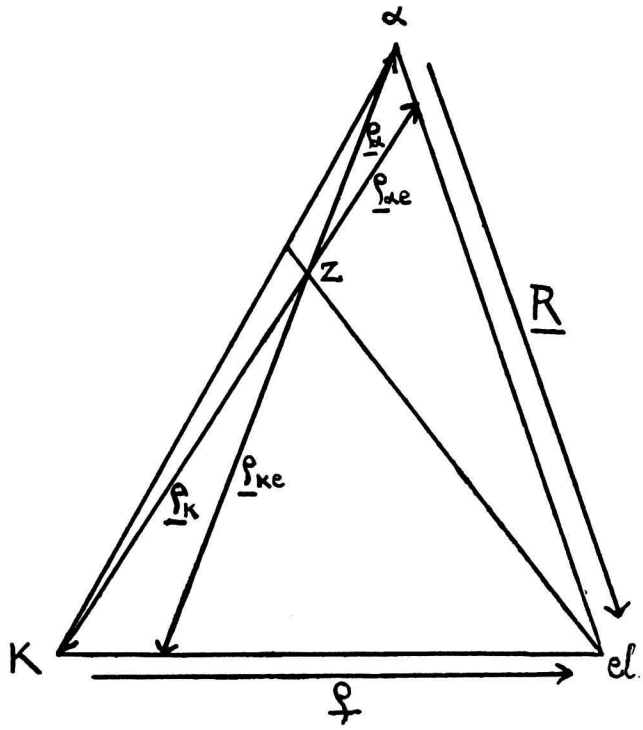

Fig. 1

ϱ_α bzw. $\mathbf{p}_\alpha$ Abstand bzw. Impuls des α-Teilchens relativ zum Schwerpunkt.
ϱ_K bzw. $\mathbf{p}_K$ „ „ „ „ Kernes „ „ „
ϱ_{Ke} bzw. $\mathbf{p}_{Ke}$ „ „ „ „ Schwerpunktes von Kern und Elektron relativ zum Schwerpunkt.

Ebenso $\varrho_{\alpha e}$ und $\mathbf{p}_{\alpha e}$.

a_z bzw. a_{He} = der Radius der erstens Bohrschen Bahn des am z-fach geladenen Kern bzw. α-Teilchen gebundenen Elektrons.

$\mathbf{R}$ = Abstand vom Kern zum Elektron.

ϱ = „ „ α-Teilchen zum Elektron.

Das Matrixelement H_{01} wird jetzt:

$$H_{01} = \frac{1}{\pi \sqrt{a_z^3 a_{He}^3}} \int d\mathbf{R} \int d\varrho \frac{2e^2}{R} exp \left\{ \frac{2\pi i}{h} (-\mathbf{R} \,.\, \mathbf{A} + \varrho \,.\, \mathbf{B}) - \frac{|R|}{a_{He}} - \frac{|\varrho|}{a_z} \right\}$$

wo:

$$\mathbf{A} = \mathbf{v} \frac{M(Mq + m)}{\Sigma M} - \mathbf{v}' \frac{M^2 q}{\Sigma M}$$

und:

$$\mathbf{B} = \mathbf{v} \frac{M^2 q}{\Sigma M} - \mathbf{v}' \frac{Mq(M + m)}{\Sigma M}.$$

Die Auswertung liefert:

$$H_{01} = \frac{2^6 \pi^2 e^2}{\pi a_z \sqrt{a_z^3 a_{He}^3}} \cdot \left(\frac{1}{a_{He}^2} + \frac{4\pi^2 A^2}{h^2} \right)^{-1} \left(\frac{1}{a_z^2} + \frac{4\pi^2 B^2}{h^2} \right)^{-2}.$$

Das Energieprinzip lässt sich auf die Form:

$$\left(\frac{1}{a_{He}^2} + \frac{4\pi^2 A^2}{h^2} \right) q(M + m) = \left(\frac{1}{a_z^2} + \frac{4\pi^2 B^2}{h^2} \right) (q M + m) \quad . \quad . \quad (2)$$

bringen, wodurch die weitere Rechnung sehr einfach verläuft.

Man findet nach Integration über den Winkel zwischen $\mathbf{v}$ und $\mathbf{v}'$ den Wirkungsquerschnitt Q, der sich im Grenzfall $M \to \infty$ unabhängig von q vereinfacht zu:

$$Q = \frac{2^{12} \pi^3 e^4}{5 a_z^5 a_{He}^3 h^2} \cdot v^{-2} \left[\frac{1}{2 a_{He}^2} + \frac{1}{2 a_z^2} + \frac{1}{4} \sigma^2 + \frac{1}{4} \frac{\left(\frac{1}{a_{He}^2} - \frac{1}{a_z^2} \right)^2}{\sigma^2} \right]^{-5} \quad . \quad (3)$$

wo: $\sigma = \frac{2\pi}{h} mv.$

Dieses Resultat erhält man, auch ohne den Übergang $M \to \infty$, als Annäherungsformel im Gebiet wo $v - v' \ll v$ gilt, was im experimentellen Geschwindigkeitsbereich der α-Teilchen immer erfüllt ist.

Wenn man einführt:

$$v = s \,.\, \frac{2\pi e^2}{h} = s \,.\, 2{,}19 \,.\, 10^8 \ {}^{cm}/_{sec}$$

d.h. wenn man als Einheit der Geschwindigkeit die Geschwindigkeit des Elektrons in der Grundbahn des Wasserstoffatoms wählt und wenn a_0 den Radius dieser Bahn bezeichnet, so wird der Wirkungsquerschnitt:

$$Q = a_0^2 \frac{2^{18} \pi}{5} z^5 z'^5 s^8 [s^2 + (z + z')^2]^{-5} [s^2 + (z - z')^2]^{-5} \quad . \quad . \quad (4)$$

Hier ist: z = die Anzahl Elementarladungen des Kernes.
z' = „ „ „ „ stossenden Teilchens.

Man sieht, dass für kleine Geschwindigkeiten Q wie v^8 zunimmt, ein Maximum erreicht und bei hohen Geschwindigkeiten wie v^{-12} abnimmt.

Eine Ausnahme bildet der Fall $z = z'$, wo nach unserer Formel Q für kleine Geschwindigkeiten wie v^{-2} unendlich wird, für hohe Geschwindigkeiten aber wieder wie v^{-12} abnimmt. Dieser Ausnahmefall wird sofort verständlich, wenn man bedenkt, dass für $z = z'$ bei kleiner Geschwindigkeit die Einfangung ohne Impulsumsatz verläuft.

§ 3. Wegen der grossen Masse des Kernes und α-Teilchens ist es möglich die Einfangung als Ein-körperproblem zu behandeln. Diese Methode hat gewisse Vorteile für die Diskussion der Resultate.

Man setzt also schon vor dem Anfang der Rechnung $M \to \infty$ und hat so ein ruhendes Kraftzentrum (den Kern), woran ein zweifach geladenes Kraftzentrum (das α-Teilchen) mit der Geschwindigkeit **v** vorbeifliegt.

Die Wellenfunktion vor dem Stosse ist jetzt gleich:

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi a_z^3}} \, exp \left(- \frac{\varrho}{a_z} - 2 \pi i \, \nu_0 \, t \right)$$

und nach dem Stosse:

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi a_{He}^3}} \, exp \left(- \frac{R}{a_{He}} - 2 \pi i \, \nu t + \frac{2 \pi i}{h} m \, (\mathbf{v} \varrho) - 2 \pi i \frac{m v^2}{2h} \, t \right)$$

Durch die zwei letzten Terme der e-Potenz ist dem Umstand Rechnung getragen, dass das Elektron mit dem α-Teilchen mitbewegt ist.

Als Ansatz für die Wellenfunktion zu einem beliebigen Zeitpunkt haben wir zu setzen:

$$\psi = b_0 \, \psi_0 + b_1 \, \psi_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Wir nehmen an, dass vor dem Stosse $b_0 = 1$, $b_1 = 0$ und dass b_0 sich während des Stosses nur wenig ändert.

Analog zu Formel (1) wird jetzt:

$$\frac{h}{2 \pi i} \dot{b}_1 = \int \psi_0 \frac{2 e^2}{R} \psi_1 \, d\tau$$

Man bedenke dass es sich jetzt um ein Einkörperproblem handelt. Man hat also **R** in ϱ auszudrücken und über ϱ zu integrieren.

Es ist (siehe Fig. 2):

$$\mathbf{R} = \varrho - \mathbf{l}$$

$$\mathbf{l} = \text{Abstand Kern} - \alpha\text{-Teilchen.}$$

Hier ist:

Durch Integration über die Zeit von $-\infty$ zu $+\infty$, wo bei man bedenke,

dass auch l von t abhängt, erhält man den Wert von b_1 nach dem Stosse. Es ist:

$$l^2 = p^2 + v^2 t^2,$$

wenn zur Zeit $t = 0$ das α-Teilchen die kürzeste Entfernung p vom Kerne besitzt.

Um den Wirkungsquerschnitt zu berechnen, muss man ausgehen von einem Strom α-Teilchen, so dass pro Sekunde ein Teilchen die Flächenein-

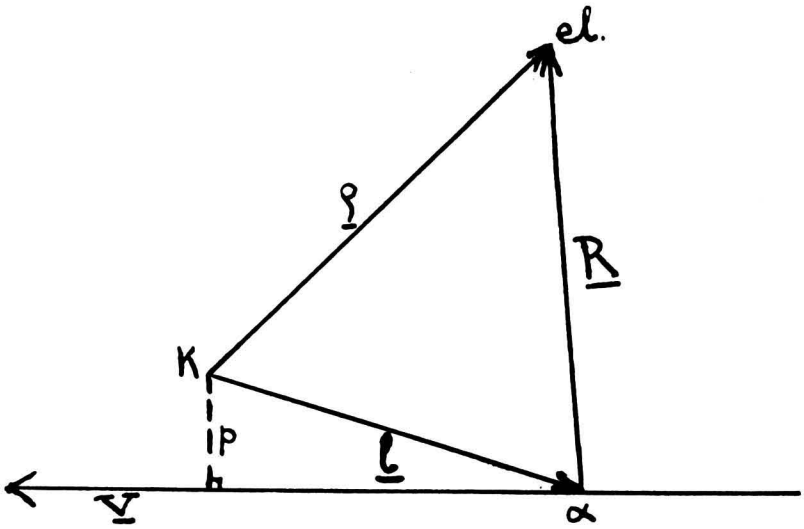

Fig. 2

heit senkrecht zur Bewegungsrichtung durchquert. Man muss also $|b_1|^2$ über p integrieren und erhält den Wirkungsquerschnitt zu:

$$Q = \int_0^\infty 2\pi p \mid b_1 \mid^2 dp.$$

Bei der Rechnung ist es bequem $\frac{1}{R} e^{-\frac{R}{a_{He}}}$ durch ein Fourierintegral in einem dreidimensionalen Raum zu ersetzen:

$$\frac{1}{R} e^{-\frac{R}{a_{He}}} = 4\pi a_{He}^2 \int exp\,\{2\pi i\,(\alpha\,.\,\mathbf{R})\} \frac{d\alpha}{(1 + 4\pi^2 \alpha^2 a_{He}^2)}$$

Nach Integration über ϱ und t erhält man für b_1:

$$\frac{h}{2\pi i} b_1 = 2 e^2 \frac{32\pi}{v\sqrt{a_{He}^3 a_z^5}} \times$$

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha_y \, d\alpha_z \, e^{-2\pi i (\mathbf{p} \cdot \alpha)}}{\left[\frac{1}{a_{He}^2} + 4\pi^2 \left(\frac{\beta^2}{v^2} + \alpha_y^2 + \alpha_z^2\right)\right] \left[\frac{1}{a_z^2} + 4\pi^2 \left\{\left(\sigma + \frac{\beta}{v}\right)^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2\right\}\right]^2}$$

Bei der Berechnung ist $(\mathbf{v} \cdot \alpha) = v \alpha_x$ gewählt.

Es ist:

$$\beta = \nu - \nu_0 + \frac{m v^2}{2h} \qquad \sigma = \frac{m\mathbf{v}}{h}$$

Wegen des Energieprinzips haben die beiden Faktoren im Nenner des Integrands denselben Wert (vgl. Formel (2)).

Die Rechnung verläuft am einfachsten wenn man jetzt das Quadrat des obigen Ausdrucks für b_1 zuerst über p integriert und nachträglich über α_y und α_z.

Als Endresultat gewinnt man so für Q wiederum den Ausdruck (3).

Man kann auch in obigem Ausdruck für b_1 die Integration über α_y und α_z sofort ausführen. Man erhält so die Einfangungswahrscheinlichkeit als Funktion von p.

Man findet, indem man $(\mathbf{p}\,\alpha) = p\,\alpha_y$ setzt, zunächst über α_z und nachher über α_y integriert [1]):

$$|b_1|^2 = \frac{2^6 \pi^2 e^4}{a_z^5 a_{He}^3 h^2 v^2} \left(\frac{1}{a_{He}^2} + \frac{4\pi^2 \beta^2}{v^2}\right)^{-4} \cdot \left| x^2 \frac{i\pi}{2} H_2^{(1)}(ix) \right|^2 \quad . \quad . \quad (6)$$

Hierin ist:

$$x = p \sqrt{\frac{1}{a_{He}^2} + \frac{4\pi^2 \beta^2}{v^2}}$$

und:

$H_2^{(1)}(ix)$ = die Hankelsche Funktion erster Gattung und zweiter Ordnung.

Nachträgliche Integration über p gibt wiederum (3).

§ 4. Die Berechnung der Einfangung in und aus höheren Bahnen verläuft nicht verschieden von den bisherigen Rechnungen. Es zeigt sich, dass für Geschwindigkeiten für die der Wert des Wirkungsquerschnitts nicht zu nahe am Maximum liegt sowohl die Einfangung aus einer ns Bahn in eine $1s$ Bahn, sowie die Einfangung aus einer $1s$ Bahn in eine ns Bahn durch:

$$Q_n = n^2 Q_1 \left(\frac{z}{n}, z'\right) \quad \text{bzw.} \quad Q_n = n^2 Q_1 \left(z, \frac{z'}{n}\right)$$

dargestellt wird, wo $Q_1(z, z')$ durch Formel (4) gegeben ist.

In der Nähe des Maximums wird Q_n durch ziemlich komplizierte Aus-

[1]) Vgl. JAHNKE—EMDE, Funktionentafeln, S. 170.

drücke dargestellt. Es hat aber keinen Sinn hier näher darauf ein zu gehen, da die erste Bornsche Näherung in diesem Gebiet ja doch nicht mehr zu richtigen Resultaten führt. (Vgl. Diskussion in § 6).

Die Einfangung in und aus p-Bahnen, d-Bahnen u.s.w. ist im allgemeinen viel kleiner und bei den Anwendungen zu vernachlässigen.

§ 5. In Figur 3 haben wir unsere Resultate zusammengestellt [1]). Betrachten wir zunächst die Einfangung aus einer $1s$ Bahn in eine $1s$ Bahn. Es sind angegeben die Thomasschen und Oppenheimerschen Kurven für $z = 1$ und

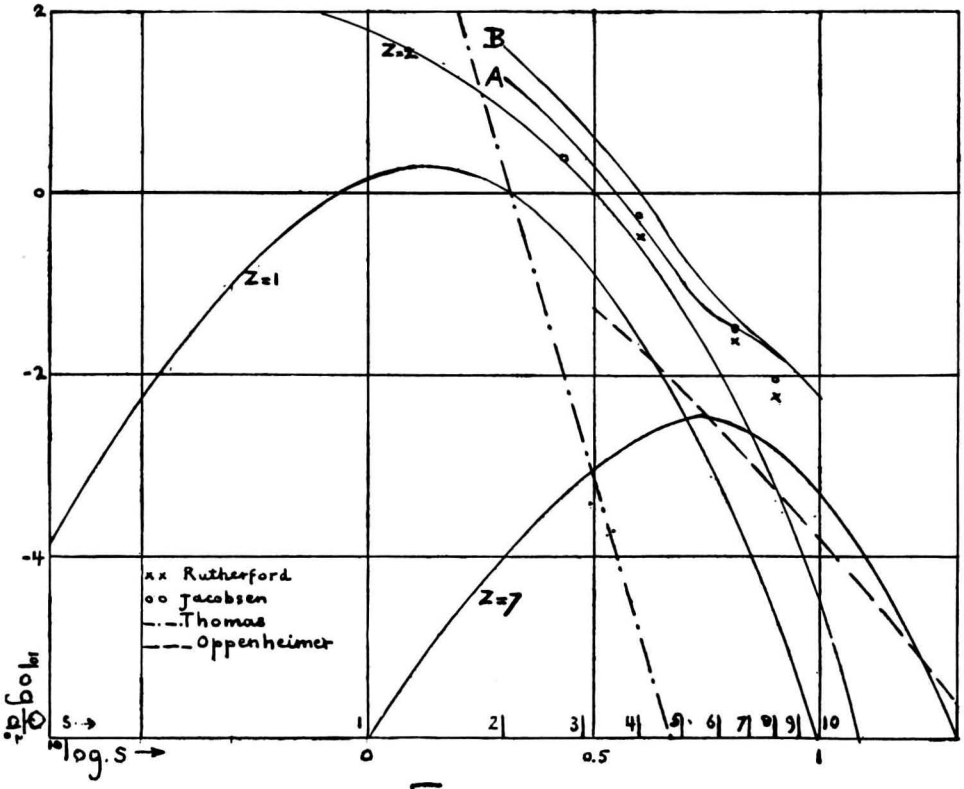

Fig. 3

unsere Resultate für $z = 1$, $z = 2$ und $z = 7$. Weiter sind die von RUTHERFORD (×) und von JACOBSEN [2]) (o) experimentell bestimmten Querschnitte für Luft angegeben.

Um zu einer theoretischen Abschätzung der Einfangung in Luft zu geraten haben wir den Wirkungsquerschnitt eines Stickstoffatoms berechnet,

[1]) Leider sind die Kurven $z = 1, 2, 7$ etwas ungenau gezeichnet. Im besonderen sind die Ordinaten von $z = 7$ etwa um $^{10}log\, 2$ zu klein.

[2]) Diese haben wir aus JACOBSEN's Messungen der freien Weglänge für den Prozess $H_e^{+} \rightarrow H_e^{++}$ hergeleitet, (Vgl. seine Dissertation S. 53). Der Punkt bei $s = 2{,}7$ ist sehr unsicher. (Vgl. § 1).

indem wir angenommen haben, dass ein N-Atom zwei $1s$-Bahnen in einem Coulombschen Felde mit $z = 7$ (K-Elektronen) und zwei $2s$-Bahnen in einem anderen Coulombschen Felde (L_I-Elektronen) besitzt. Für die effektive Kernladung dieses Feldes haben wir einmal den Wert $z = 2$ (Bindungsenergie 13.5 Volt), andermal $z = 2.4$ (Bindungsenergie 19.5 Volt) zugrunde gelegt.

Die Einfangung der p-Elektronen haben wir auf Grund der in § 4 erwähnten Rechnungen vernachlässigt. In der Figur bezeichnen die Kurven A ($z = 2$) und B ($z = 2.4$) das doppelte des so erhaltenen Querschnitts. Man sieht das bei $s = 4$ und $s = 6.5$ die theoretischen A-Werte sich den experimentellen nahe anschliessen; für $s = 7$ ist der theoretische Wert ungefähr zwei mal zu gross [1]).

§ 6. *Diskussion der Resultate.*

Die erste Bornsche Näherung gibt nur dann eine gute Approximation wenn die Geschwindigkeit des stossenden Teilchens gross ist verglichen mit der des Elektrons in seiner Bahn [2]). Man muss also darauf vorbereitet sein, dass die Rechnung in der Nähe des Maximums des Wirkungsquerschnitts zu falschen Werten führt.

Eine erste Möglichkeit zur Kontrole der Güte der Näherung gibt Formel (6), die $|b_1|^2$ als Funktion von p gibt. Es wäre nämlich denkbar, dass die Grösse $|b_1|^2$, die ihrer Bedeutung nach immer $\ll 1$ sein muss, für kleine Werte von p nach den Formeln zu gross, eventuell sogar grösser als eins ausfallen würde. Es zeigt sich aber, dass dies bei der Einfangung aus einer $1s$-Bahn in eine $1s$-Bahn praktisch nur der Fall ist, wenn z in der Nähe liegt von z' (Resonanzfall, vergl. S. 982). Als Beispiel haben wir für Wasserstoff ($z = 1$) $|b_1|^2$ als Funktion von p berechnet für zwei Geschwindigkeiten ($s = 1$ und 2) (Figur 4). Man sieht dass $|b_1|^2$ immer kleiner wie eins

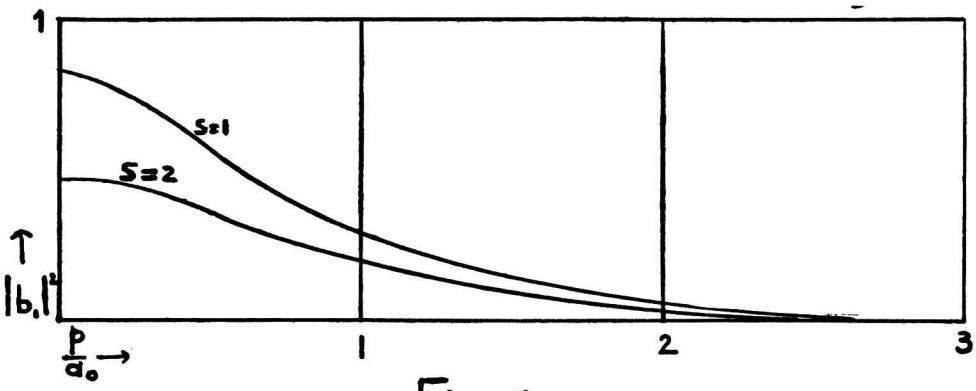

Fig. 4

[1]) Zieht man in Betracht, dass 20 % der Luft aus Sauerstoff besteht so wird die Uebereinstimmung etwas besser.

[2]) Vgl. z. B. H. BETHE, Ann. der Phys. 5, 327, 1930.

ist. Auch bei unserer Anwendung auf Stickstoff fällt die Schwierigkeit der zu grossen $|b_1|^2$ Werte nur wenig ins Gewicht.

Es sei noch daran erinnert, dass für kleine p auch der Umstand, dass die Orthogonalität von ψ_1 und ψ_0 in Formel (5) schlecht erfüllt ist, eine Fehlerquelle darstellt.

Es gibt aber eine Fehlerquelle, die viel wichtiger ist. Wir hatten ja angenommen, dass während der Wechselwirkung b_0 von eins auf einen nur wenig von eins verschiedenen Wert herabfällt. Dies wird für grosse Geschwindigkeiten annäherungsweise zutreffen. Für kleinere Geschwindigkeiten wird b_0 aber nicht nur abnehmen wegen der grösseren Zunahme von b_1 (Einfangung) sondern hauptsächlich dadurch, dass andere b, die sich auf Anregung und Ionisation[1]) beziehen „aufgeschaukelt" werden. Dieser Effekt wird dem Einfangungseffekt bei weitem überragen, lässt sich aber schwer berechnen. Man darf daraus den allgemeinen Schluss ziehen, dass die Einfangungswahrscheinlichkeit kleiner ausfallen wird, als sie sich nach unserer Rechnung ergeben würde. Hierin dürfen wir vielleicht die Erklärung dafür erblicken, dass für $s = 7$ unsere Rechnung einen zu grossen Wert des Wirkungsquerschnitts ergibt. Wie man aus der Figur 3 sieht, rührt die Einfangung hier hauptsächlich von den K-Elektronen her und eben für diese sind wir im Gebiet wo die Geschwindigkeit des α-Teilchens und die der Elektronen von derselben Grössenordnung sind.

Die rechnerischen Schwierigkeiten, die sich einer genaueren Behandlung des Problems entgegenstellen, scheinen sehr gross zu sein.

---

[1]) Vgl. die Versuche von BOTHE und FRÄNZ über die Anregung von K-Strahlung durch α-Teilchen; Zs. für Phys. **52**, 400. 1929.