

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN  
TE AMSTERDAM

---

PROCEEDINGS OF THE  
SECTION OF SCIENCES

VOLUME XL  
(Nos. 6—10)

PUBLISHED BY  
N.V. NOORD-HOLLANDSCHE UITGEVERSMAATSCHAPPIJ,  
AMSTERDAM, 1937

Proc. Kon. Akad. Wet., Vol. 40, Nos. 6—10 p. 463—905, Amsterdam 1937



## CONTENTS

Proceedings No. 6 . . . . .	463
" No. 7 . . . . .	563
" No. 8 . . . . .	649
" No. 9 . . . . .	745
" No. 10 . . . . .	813



# INDEX

## Anatomy.

- ARIËNS KAPPERS, C. U.: "The spread of primitive humanity and its links with the more differentiated races, as revealed by cephalic and cranial index curves", p. 29.  
DUBOIS, EUG.: "The osteone arrangement of the thigh-bone compacta of Man identical with that, first found, of Pithecanthropus", p. 864.  
WALKER, A. EARL: "Experimental Anatomical Studies of the Topical Localization within the Thalamus of the Chimpanzee", p. 198.  
WESTON, JEAN K.: "Notes on the telencephalon of *Mormyrus* and *Gnathonemus*", p. 894.

## Anthropology.

- JULIEN, PAUL: "Distribution of the bloodgroups in some peoples of Liberia and Sierra Leone", p. 631.  
JULIEN, PAUL: "Studies in bloodgroup correlations in some peoples of Liberia and Sierra Leone", p. 640.

## Astronomy.

- NIJLAND †, A. A.: "Mittlere Lichtkurven von langperiodischen Veränderlichen". XXVIII. Z Ceti, p. 391.  
NIJLAND †, A. A.: "Mittlere Lichtkurven von langperiodischen Veränderlichen". XXIX. U Persei, p. 395.  
NIJLAND †, A. A.: "Mittlere Lichtkurven von langperiodischen Veränderlichen". XXX. S Lyncis, p. 400.

## Botany.

- ADRIANI, M. J.: "Sur la transpiration de quelques halophytes cultivées dans des milieux différents en comparaison avec celle de quelques non-halophytes", p. 524.  
ANDREAS, CH. HANS: "Wuchsstoff und Wachstum der Luftwurzeln der *Vitis Gongyloides*", p. 174.  
ARISZ, W. H., and J. OUDMAN: "On the influence of aggregation on the transport of asparagine and caffeine in the tentacles of *Drosera capensis*. L.", p. 431.  
ARISZ, W. H., and J. OUDMAN: "On the transport of introduced nitrogenous substances in the leaves of *Vallisneria spiralis*", p. 440.  
BAAS BECKING, L. G. M., and E. A. HANSON: "Note on the mechanism of photosynthesis", p. 752.  
BEIJERINCK, W.: "De periodicité der bloemvorming bij *Calluna vulgaris* (L.) Hull", p. 273.  
BLAAUW, A. H., and HESTER G. KRONENBERG: "Het tijdstip der bloemvorming van Hyacinth en Darwintulp in Nederland en in Zuid-Frankrijk", p. 123.  
HANSON, E. A.: "Notes on some physical properties of Chlorophyll films", p. 281.

- HARDON, H. J.: "Padang soil, an example of podsol in the Tropical Lowlands", p. 530.  
 HERK, A. W. H. VAN: "Die chemischen Vorgänge im Sauromatum-Kolben". II. Mitteilung, p. 607.  
 HERK, A. W. H. VAN: "Die chemischen Vorgänge im Sauromatum-Kolben". III. Mitteilung, p. 709.  
 HILLE, J. C. VAN: "Influence of Magnesium on the Relation between Chlorophyll Content and Rate of Photosynthesis", p. 792.  
 POSTHUMUS, O.: "Some remarks on the vegetation on the sandy soil of the Padang Loewai (E. Koetai, E. Borneo)", p. 505.

#### **Botany-Palaeo.**

- FLORSCHÜTZ, F.: "Palaeobotanisch onderzoek in verband met een vermoede menschelijke nederzetting op het plateau van het Belgisch Hoogveen (Hautes Fagnes)". (Voorloopige mededeeling), p. 181.

#### **Chemistry.**

- BERG, J. TER, and F. M. JAEGER: "On the Possibility of Distinguishing Right- and Left-handed Structures in Crystals by means of their LAUE-Patterns", p. 406.  
 BÖESEKEN, J., and E. DE ROY VAN ZUYDEWIJN: "Some properties of unsaturated sulphones", p. 23.  
 BUNGENBERG DE JONG, H. G., and L. W. J. HOLLEMAN: "Examples of stable unmixing in binary systems: Salt + Water", p. 69.  
 COHEN, ERNST, W. A. T. COHEN—DE MEESTER und J. LANDSMAN: "Die akute Zianpest", p. 746.  
 GORTER, E., and L. MAAASKANT: "The spreading of Protamine Insulinate", p. 71.  
 GORTER, E., and L. MAAASKANT: "The spreading of urease and Bence-Jones protein", p. 73.  
 JAEGER, F. M.: "On the Relative and Absolute Spatial Configuration of Isomorphous, Optically-active Complex Salts of Trivalent Cobaltum and Rhodium". I. Comparison of the Triethylenediamine- and Tricyclohexanediamine-Salts, p. 2.  
 JAEGER, F. M.: "On the Relative and Absolute Spatial Configuration of Isomorphous, Optically active Complex Salts". II. Comparison of the Tri-diamino-Salts of Cobaltum, Rhodium and Chromium, p. 108.  
 JAEGER, F. M., and J. TER BERG: "On Pterotactic Derivatives of Bivalent Platinum with Optically-active, Cyclic trans-1-2-Diamines", p. 490.  
 JAEGER, F. M., J. TER BERG and P. TERPSTRA: "Optical Rotation and Rotatory Dispersion in Solution and in the Crystalline State", p. 574.  
 JAEGER, F. M., J. A. BOTTEMA and E. ROSENBOHM: "The Exact Measurement of the Specific Heats of Metals at High Temperatures". XXVIII. The Heat-Capacity and the Electrical Resistance of Didymium between 300° and 600° C., p. 481.  
 JAEGER, F. M., and L. BIJKERK: "Investigations on Complex Salts of racemic and optically-active Cyclohexane-1-2-diamines with Trivalent Cobaltum and Rhodium". I. On trans-Cyclohexane-1-2-diamine and its Fission into optically-active Antipodes, p. 12.  
 JAEGER, F. M., and L. BIJKERK: "Investigations on the Complex Salts of the Racemic and Optically active Cyclohexanediamines with trivalent Cobaltum and Rhodium". II. The Complex Tricyclohexanediamine-Rhodium-salts, p. 116.

- JAEGER, F. M., and L. BIJKERK: "Investigations on the Complex Salts of the Racemic and Optically active Cyclohexanediamines with trivalent Cobaltum and Rhodium". III. Tri-Cyclohexanediamine Salts of trivalent Cobaltum. p. 246.
- JAEGER, F. M., and L. BIJKERK: "Investigations on the Complex Salts of the Racemic and Optically-active Cyclohexanediamines with trivalent Cobaltum and Rhodium". IV. On the Crystallographic Properties of the Optically-active Tri-Cyclohexanediamine-Cobaltic Salts and on Ethylenediamine-Cyclohexanediamine-Cobaltic Salts of this Series", p. 316.
- KOLTHOFF, I. M.: "Aging of Fresh Precipitates in Contact with a Liquid Medium. The Irreversible Flocculation of Colloids", p. 82.
- KRUYT, H. R., and J. OOSTERMAN: "Flow potentials on platinum". (Preliminary communication), p. 404.
- MERCKEL, J. H. C.: "Beziehungen zwischen den Schmelzpunkten, Siedepunkten und kritischen Größen und der Zahl der Kohlenstoffatome in homologen Reihen", p. 164.
- MOESVELD, A. L. TH.: "On fundamentally wrong methods for establishing non-existence of polymorphy", p. 155.
- TERPSTRA, P., and J. TER BERG: "The Crystalforms of Some Complex Salts of Triaminopropane with trivalent Cobaltum and Rhodium", p. 602.
- VEEN, A. G. VAN, and J. K. BAARS: "The constitution of toxoflavin". (Provisional communication), p. 498.
- VEEN, A. G. VAN, and J. C. LANZING: "On the analysis of the provitamins A in blood serum", p. 779.
- VERKADE, P. E., und J. VAN DER LEE: "Synthesen von Glycero-phosphatidsäuren und Glycero-phosphatiden", p. 858.
- VERKADE, P. E., J. VAN DER LEE and A. J. S. VAN ALPHEN: "Researches on fat metabolism X. Feeding experiments on dogs with simple saturated triglycerides", p. 411.
- VERKADE, P. E., J. VAN DER LEE, A. J. S. VAN ALPHEN and M. ELZAS: "Researches on fat metabolism. VIII. Feeding experiments on dogs with sodium salts of normal saturated dicarboxylic acids", p. 771.
- VERKADE, P. E., J. VAN DER LEE, Fr. J. C. DE QUANT und E. DE ROY VAN ZUYDEWIJN: "Neue Methoden für die Synthese von Glyceriden". II, p. 580.
- ZANDEN, J. M. v. D.: "On polymerides of methylchavicol", p. 706.

#### Chemistry-Bio.

- DEYS, W. B., and M. J. DIJKMAN: "The splitting off of gallic acid from tannin, especially from theotannin, by Aspergillus niger", p. 518.

#### Crystallography.

- SCHMUTZER, J.: „Driehoekige suikerkristallen", p. 800.

#### Geology.

- BAGGELAAR, H.: "Tertiary rocks from the Misool-Archipelago (Dutch East Indies)", p. 285.

BROUWER, H. A.: "Über metamorphe Gesteine am Torneträsk (Lappland)", p. 414.

BURCK, H. D. M.: "Over de Fauna van het Bartonien in oostelijk Nederland", p. 185.

FLORSCHÜTZ, F., and I. M. VAN DER VLERK: „Fossiele cellenstructuur in jong-Pleistoceene Oost-Nederlandsche afzettingen". (Preliminary communication), p. 880.

- GEYN, WILHELMINA A. E. VAN DE: "The age of the Elsloo Beds", p. 796.  
 WIJKERSLOOTH, P. DE: "Sur la région métallifère de Moresnet—Bleyberg—Stolberg—Limbourg néerlandais", p. 292.

#### Histology.

- BRETSCHNEIDER, L. H., und J. J. DUYVENÉ DE WIT: "Ueber die Hormonkette: Wirksame Harnsubstanz → Ovar → Legeröhre bei *Rhodeus amarus*; bewiesen durch die histologische Stufenzählmethode". (Vorläufige Mitteilung), p. 624.  
 HIRSCH, GOTTWALT CHRISTIAN: "Grundlinien einer Theorie der Golgikörper". I. Die Golgikörper im Raum. (Vorläufige Mitteilung), p. 614.  
 HIRSCH, GOTTWALT CHRISTIAN: "Grundlinien einer Theorie der Golgikörper. II. Die Golgikörper in der Zeit". (Vorläufige Mitteilung), p. 725.  
 HIRSCH, GOTTWALT CHRISTIAN, und R. F. J. VAN PEEL: "Der Rhythmus des Glykogengehaltes der Leber der weissen Maus. dargestellt durch die Stufenzählmethode", p. 538.  
 ROBERTS, W. J.: "Goldnachweis im Gehirn und bei Feten Sanocrysin-injizierter Tiere", p. 207.

#### History of Science.

- COHEN, ERNST, und W. A. T. COHEN-DE MEESTER: "DANIEL GABRIEL FAHRENHEIT, geb. zu Danzig 24. Mai 1686, gest. im Haag 16. Sept. 1736", (Zweite Mitteilung), p. 682.

#### Hydrodynamics.

- BROERSMA, G.: "Preliminary records of the velocity fluctuations in a boundary layer before and after the transition to turbulent motion", p. 784.

#### Mathematics.

- ARONSZAJN, N.: "Sur les lacunes d'un polyèdre et leurs relations avec les groupes de BETTI", p. 61.  
 BARRAU, J. A.: "Self-Projective Point-Casts in Space", p. 150.  
 BREMEKAMP, H.: "Ueber die CARSONsche Integralgleichung", p. 689.  
 CORPUT, J. G. VAN DER: "Sur la méthode de WEYL dans la théorie des nombres", (Première communication), p. 668.  
 CORPUT, J. G. VAN DER: "Sur la méthode de WEYL dans la théorie des nombres", (Deuxième communication), p. 756.  
 CORPUT, J. G. VAN DER: "Sur la méthode de WEYL dans la théorie des nombres", (Troisième communication), p. 836.  
 CORPUT, J. G. VAN DER: "Sur deux, trois ou quatre nombres premiers". (Première communication), p. 846.  
 ERDŐS, P.: "On additive properties of squares of primes". I, p. 905.  
 FREUDENTHAL, HANS: "Ueber Mannigfaltigkeiten und ihre Abbildungen", p. 54.  
 HAANTJES, J.: "Conformal representations of an  $n$ -dimensional euclidean space with a non-definite fundamental form on itself", p. 700.  
 HWA-CHUNG LEE: "On the differential geometry of contact transformations", p. 695.

- KAWAGUCHI, A.: "Beziehung zwischen einer metrischen linearen Uebertragung und einer nicht-metrischen in einem allgemeinen metrischen Raume", p. 596.
- LEVIN, V.: "Two remarks on VAN DER CORPUT's generalisation of KNOPP's inequality", p. 429.
- MAHLER, KURT: "Arithmetische Eigenschaften einer Klasse von Dezimalbrüchen", p. 421.
- MEIJER, C. S.: "Ueber Produkte von WHITTAKERschen Funktionen". (Erste Mitteilung), p. 133.
- MEIJER, C. S.: "Ueber Produkte von WHITTAKERschen Funktionen". (Zweite Mitteilung), p. 259.
- MEIJER, C. S.: "Noch einige Integraldarstellungen für Produkte von WHITTAKERschen Funktionen", p. 871.
- POPKEN, J.: "Eine arithmetische Eigenschaft gewisser ganzer Funktionen". I, p. 142.
- POPKEN, J.: "Eine arithmetische Eigenschaft gewisser ganzer Funktionen". II, p. 263.
- POPKEN, J.: "Eine arithmetische Eigenschaft gewisser ganzer Funktionen". III, p. 348.
- SCHEPEL Kzn., D.: "Ueber die Gitterpunktzahl auf und in der Umgebung gewisser Kurven", p. 46.
- SCHOUTEN, J. A.: "Zur Differentialgeometrie der Gruppe der Berührungstransformationen". I. Doppelthomogene Behandlung von Berührungstransformationen, p. 100.
- SCHOUTEN, J. A.: "Zur Differentialgeometrie der Gruppe der Berührungstransformationen". II. Normalform und Haupttheorem der doppelthomogenen Berührungstransformationen, p. 236.
- SCHOUTEN, J. A.: "Zur Differentialgeometrie der Gruppe der Berührungstransformationen". III. Infinitesimale doppelthomogene Berührungstransformationen und ihre Beziehungen zur Mechanik und Elektrodynamik, p. 470.
- VISSE, CORNELIS: "On a certain class of conformal mappings", p. 223.
- VISSE, CORNELIS: "Note on linear operators", p. 270.
- VISSE, CORNELIS: "On certain infinite sequences", p. 358.
- WEITZENBÖCK, R.: "Bemerkungen über Trivektoren", p. 312.
- WEITZENBÖCK, R.: "Ueber Trivektoren". I, p. 676.
- WEITZENBÖCK, R.: "Ueber Trivektoren". II, p. 764.
- WEITZENBÖCK, R.: "Ueber Trivektoren". III, p. 851.

#### Medicine.

- BOER, S. DE, and A. BROUWER: "The action of medicines on auricular fibrillation". II. The action of hydroquinidine, quinidinum purissimum, hydroquinine and quininum purissimum on auricular fibrillation", p. 77.
- BUCK, A. DE: "Some observations on the salivary and stomach secretion of Anopheles and other mosquitoes", p. 217.
- HEUX, J. LE, und A. DE KLEYN: "Untersuchungen an den isolierten Augenmuskeln des Kaninchens während des Lagenstagus bei akuter Alkoholvergiftung", p. 326.
- SWELLENGREBEL, N. H., A. DE BUCK and H. KRAAN: "Further investigations on "healthy" human carriers of Plasmodium vivax in North-Holland)", p. 368.

#### Mineralogy.

- WILLEMS, H. W. V.: "On the relation between the optical properties and the chemical composition of glaucophane", p. 720.

**Morphology-Experimental.**

WIT, J. J. DUYVENÉ DE: "Biologischer Nachweis zweier neuer Hormone durch *Rhodeus amarus* als Eichungsobject". (Vorläufige Mitteilung), p. 559.

**Neurology.**

BERGGREN, SVEN: "Ueber eine direkte Verbindung von der Kleinhirnrinde nach dem Nucleus Deiters", p. 307.

**Palaeontology.**

BOUWMAN, L. A. H.: "Sur une espèce nouvelle du genre *Sabinia* (Caprininés)", p. 449.

KOENIGSWALD, G. H. R. VON: "Ein Unterkieferfragment des Pithecanthropus aus den Trinilschichten Mitteljavas", p. 883.

VOORWIJK, G. H.: "Foraminifera from the upper cretaceous of Habana, Cuba", p. 190.

**Pathology-Comparative**

FRETS, G. P.: "The relation of head-length and head-index of JOHANNSEN and the spurious correlation of PEARSON", p. 454.

**Physics.**

BRUIN, T. L. DE: "New terms in the spark spectra of Argon, A. II and A. III", p. 340.

BRUIN, T. L. DE, J. N. LIER and H. J. VAN DE VLIET: "The ZEEMAN-effect of doubly ionized Cerium, Ce III", p. 334.

CLAY, J.: "De energie en het doordringend vermogen van de kosmische stralen", p. 564.

CLAY, J.: "Ionization and conductivity in gases at high pressures", p. 824.

CLAY, J. and G. VAN KLEEF: "Conductivity of pure Gases at high pressures", p. 663.

EYMERS, JOHANNA G., and H. P. BOTTELLIER: "Protoplasmic Movement in the Avena Coleoptile as related to Oxygen Pressure and Age", p. 589.

HARINGHUIZEN, P. J., and D. A. WAS: "Research on thin layers of tin and other metals". III. The interaction between metals and lubricating oils, p. 39.

ITERSON, F. K. TH. VAN: "Separation of substances by flotation". I, p. 91.

ITERSON, F. K. TH. VAN: "Separation of substances by flotation". II, p. 228.

KEESOM, W. H., and A. BIJL: "Determination of the vapour pressures of liquid nitrogen below one atmosphere, and of solid nitrogen  $\beta$ . The boiling point and triple point of nitrogen", p. 235.

KEESOM, W. H., Miss H. VAN DER HORST and K. W. TACONIS: "Measurements concerning the volumes of mercury menisci", p. 389.

KEESOM, W. H., and P. H. VAN LAER: "Measurements of the latent heat of tin in passing from the superconductive to the non-superconductive state at constant temperature", p. 390.

KEESOM, W. H., and P. H. VAN LAER: "Relaxation phenomena in superconductivity", p. 390.

KRAMERS, H. A.: "The use of charge-conjugated wave-functions in the hole-theory of the electron", p. 814.

LUB, Mlle W. A.: "Le spectre optique de l'actinium", p. 584.

MATHIAS, E., C. A. CROMMELIN et J. J. MEIJHUIZEN: "La courbe des densités et le diamètre rectiligne du krypton", p. 259.

- ORNSTEIN, L. S.: "On the scattering of neutrons in matter". (V), p. 464.  
ORNSTEIN, L. S., namens J. F. SCHOUTEN: "De rol van electrische, photochemische en diffusie verschijnselen bij het zien", p. 376.  
VENING MEINESZ, F. A.: "The Gravity Expedition of Hr. Ms. Submarine O 16 in the North Atlantic, January 11 — March 16, 1937", p. 382.  
VENING MEINESZ, F. A.: "Second order disturbance terms in pendulum observations at sea", p. 650.  
VENING MEINESZ, F. A.: "The Determination of the Earth's plasticity from the post-glacial uplift of Scandinavia; Isostatic adjustment", p. 654.

**Physics-Geo.**

- VISSEER, S. W.: "On a Period of 27 Months in the Rainfall", p. 513.

**Physiology.**

- BUNGENBERG DE JONG, H. G., and G. G. P. SAUBERT: "Phosphatide auto-complex coacervates as ionic systems and their relation to the protoplasmic membrane". II, p. 295.  
BUNGENBERG DE JONG, H. G., and G. G. P. SAUBERT: "Models for the stimulation of the organ of smell", p. 302.  
DOLS, M. J. L., and B. C. P. JANSEN: "Studies on phosphorus metabolism in normal and rachitic rats with a radioactive phosphorus isotope", p. 547.  
KRÜGER, FRIEDRICH: "Cellophan an Stelle von Kymographionpapier", p. 216.  
ROOS, J., and C. ROMIJN: "The oxygen dissociation curve of the cow's blood during pregnancy and the dissociation curve of the blood of the New Born animal in the course of the first time after birth", p. 803.

**Zoology.**

- STIASNY, G.: "Parerythropodium maris-tenebrosi n. sp., eine neue Alcyonarie von der Küste Nordwest-Afrikas", p. 735.
-

## AUTHOR-INDEX

### A

- ADRIANI, M. J., 524.  
ALPHEN, A. J. S. VAN, 411, 771.  
ANDREAS, CH. HANS, 174.  
ARIËNS KAPPERS, C. LI., 29.  
ARISZ, W. H., 431, 440.  
ARONSZAJN, N., 61.

### B

- BAARS, J. K., 498.  
BAAS BECKING, L. G. M., 752.  
BAGGELAAR, H., 285.  
BARRAU, J. A., 150.  
BERG, J. TER, 406, 490, 574, 602.  
BERGGREN, SVEN, 307.  
BEIJERINCK, W., 273.  
BLAAUW, A. H., 123.  
BOER, S. DE, 77.  
BÖESEKEN, J., 23.  
BOTTELIER, H. P., 589.  
BOTTEMA, J. A., 481.  
BOUWMAN, L. A. H., 449.  
BREMELAMP, H., 689.  
BRETSCHNEIDER, L. H., 624.  
BROERSMA, G., 784.  
BROUWER, A., 77.  
BROUWER, H. A., 414.  
BRUIN, T. L. DE, 334, 340.  
BUCK, A. DE, 217, 368.  
BURCK, H. D. M., 185.  
BUNGENBERG DE JONG, H. G., 69, 295,  
302.  
BIJKERK, L., 12, 116, 246, 316.  
BIJL, A., 235.

### C

- CLAY, J., 564, 663, 824.

COHEN, ERNST, 682, 746.

- COHEN—DE MEESTER, W. A. T., 682,  
746.  
CORPUT, J. G. VAN DER, 668, 756, 836,  
846.  
CROMMELIN, C. A., 259.

### D

- DEYS, W. B., 518.  
DOLS, M. J. L., 547.  
DUBOIS, EUG., 864.  
DUYVENÉ DE WIT, J. J., 559, 624.  
DIJKMAN, M. J., 518.

### E

- ELZAS, M., 771.  
ERDÖS, P., 905.  
EYMERS, JOHANNA G., 589.

### F

- FLORSCHÜTZ, F., 181, 880.  
FRETS, G. P., 454.  
FREUDENTHAL, HANS, 54.

### G

- GEYN, WILHELMINA A. E. VAN DE, 796.  
GORTER, E., 71, 73.

### H

- HAANTJES, J., 700.  
HANSON, E. A., 281, 752.  
HARDON, H. J., 530.  
HARINGHUIZEN, P. J., 39.  
HERK, A. W. H. VAN, 607, 709.  
HEUX, J. LE, 326.  
HILLE, J. C. VAN, 792.

HIRSCH, GOTTWALT CHRISTIAN, 538, 614,  
725.  
HOLLEMAN, L. W. J., 69.  
HORST, H. VAN DER, 389.  
HWA-CHUNG LEE, 695.

**I**

ITERSON, F. K. TH. VAN, 93, 228.

**J**

JAEGER, F. M., 2, 12, 108, 116, 246, 316,  
481, 490, 574.  
JANSEN, B. C. P., 547.  
JULIEN, PAUL, 631, 640.

**K**

KAWAGUCHI, A., 596.  
KEESOM, W. H., 235, 389, 390.  
KLEEF, G. VAN, 663.  
KLEIJN, A. DE, 326.  
KOENIGSWALD, G. H. R. VON, 883.  
KOLTHOFF, I. M., 82.  
KRAAN, H., 368.  
KRAMERS, H. A., 814.  
KRONENBERG, H. G., 123.  
KRÜGER, FRIEDRICH, 216.  
KRUYT, H. R., 404.

**L**

LAER, P. H. VAN, 390.  
LANDSMAN, J., 746.  
LANZING, J. C., 779.  
LEE, J. VAN DER, 411, 580, 771, 858.  
LEVIN, V., 429.  
LIER, J. N., 334.  
LUB, W. A., 584.

**M**

MAASKANT, L., 71, 73.  
MAHLER, KURT, 421.  
MATHIAS, E., 259.

MEIHUIZEN, J. J., 259.  
MERCKEL, J. H. C., 164.  
MEIJER, C. S., 133, 259, 871.  
MOESVELD, A. L. TH., 155.

**N**

NIJLAND †, A. A., 391, 395, 400.

**O**

OOSTERMAN, J., 404.  
ORNSTEIN, L. S., 376, 464.  
OUDMAN, J., 431, 440.

**P**

PELT, R. F. J. VAN, 538.  
POPKEN, J., 142, 263, 348.  
POSTHUMUS, O., 505.

**Q**

QUANT, J. C. DE, 580.

**R**

ROBERTS, W. J., 207.  
ROMIJN, C., 803.  
ROOS, J., 803.  
ROSENBOHM, E., 481.  
ROY VAN ZUYDEWIJN, E. DE, 23, 580.

**S**

SAUBERT, G. G. P., 295, 302.  
SCHEPEN Kzn., D., 46.  
SCHMUTZER, J., 800.  
SCHOUTEN, J. A., 100, 236, 470.  
SCHOUTEN, J. F., 376.  
STIASNY, G., 735.  
SWELLENGREBEL, N. H., 368.

**T**

TACONIS, K. W., 389.  
TERPSTRA, P., 574, 602.

## V

- VEEN, A. G. VAN, 498, 779.  
VENING MEINESZ, F. A., 382, 650, 654.  
VERKADE, P. E., 411, 580, 771, 858.  
VLERK, I. M. VAN DER, 880.  
VLIET, H. J. VAN DER, 334.  
VISSER, CORNELIS, 223, 270, 358.  
VISSER, S. W., 513.  
VOORWIJK, G. H., 190.

## W

- WALKER, A. EARL, 198.  
WAS, D. A., 39.  
WEITZENBÖCK, R., 312, 676, 764, 851.  
WESTON, JEAN, K., 894.  
WILLEMS, H. W. V., 720.  
WIJKERSLOOTH, P. DE, 292.

## Z

- ZANDEN, J. M. V. D., 706.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN  
TE AMSTERDAM

---

PROCEEDINGS

VOLUME XL

No. 6

President: J. VAN DER HOEVE.

Acting-Secretary: H. R. KRUYT.

---

CONTENTS

- ORNSTEIN, L. S.: "On the scattering of neutrons in matter". (V), p. 464.  
SCHOUTEN, J. A.: "Zur Differentialgeometrie der Gruppe der Berührungstransformationen".  
III. Infinitesimale doppelhomogene Berührungstransformationen und ihre Beziehungen  
zur Mechanik und Elektrodynamik, p. 470.  
JAEGER, F. M., J. A. BOTTEMA and E. ROSENBOHM: "The Exact Measurement of the  
Specific Heats of Metals at High Temperatures". XXVIII. The Heat-Capacity and  
the Electrical Resistance of Didymium between 300° and 600° C., p. 481.  
JAEGER, F. M., and J. TER BERG: "On Pterotactic Derivatives of Bivalent Platinum with  
Optically-active, Cyclic trans-1-2-Diamines". (With one plate), p. 490.  
VEEN, A. G. VAN, and J. K. BAARS: "The constitution of toxoflavin". (Provisional com-  
munication), p. 498.  
POSTHUMUS, O.: "Some remarks on the vegetation on the sandy soil of the Padang  
Loewai (E. Koetai, E. Borneo)", p. 505.  
VISSER, S. W.: "On a Period of 27 Months in the Rainfall". (Communicated by Prof.  
E. VAN EVERDINGEN), p. 513.  
DEYS, W. B., and M. J. DIJKMAN: "The splitting off of gallic acid from tannin, especially  
from theotannin, by Aspergillus niger". (Communicated by Prof. G. VAN ITERSON Jr.),  
p. 518.  
ADRIANI, M. J.: "Sur la transpiration de quelques halophytes cultivées dans des milieux  
différents en comparaison avec celle de quelques non-halophytes". (Communicated by  
Prof. J. C. SCHOUTE), p. 524.  
HARDON, H. J.: "Padang soil, an example of podsol in the Tropical Lowlands". (Com-  
municated by Prof. L. G. M. BAAS BECKING), p. 530.  
HIRSCH, GOTTWALT CHRISTIAN, und R. F. J. VAN PEEL: "Der Rhythmus des Glykogen-  
gehaltes der Leber der weissen Maus, dargestellt durch die Stufenzählmethode".  
(Communicated by Prof. H. F. NIERSTRASZ), p. 538.  
DOLS, M. J. L., and B. C. P. JANSEN: "Studies on phosphorus metabolism in normal and  
rachitic rats with a radioactive phosphorus isotope". (Communicated by Prof. G.  
GRIJNS), p. 547.  
WIT, J. J. DUYVENÉ DE: "Biologischer Nachweis zweier neuer Hormone durch Rhodeus  
amarus als Eichungsobject". (Vorläufige Mitteilung). (Communicated by Prof. H. J.  
JORDAN), p. 559.
-

**Physics. — On the scattering of neutrons in matter. (V).** By L. S. ORNSTEIN. (Communication from the Physical Institute of the University of Utrecht).

(Communicated at the meeting of May 29, 1937.)

In this paper we will discuss the distribution in direction (of the velocity) of neutrons scattered by protons.

In the foregoing papers<sup>1)</sup> we have assumed that the probability of a direction  $\vartheta$  after one collision of the neutron with a proton is given by the formula

$$2 \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta . . . . . \quad (1)$$

where  $\vartheta$  is the direction of velocity for the scattered neutron.

In this paper we will use a more general law — viz. that the original direction of the group of neutrons is an axis of symmetry of the directions of the scattered neutron. We express this law by:

$$W(\vartheta) d\vartheta = f(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta^2 . . . . . \quad (2)$$

Integrated with respect to  $\vartheta$  from 0 to  $\pi$  the result ought to be unity.

Now it is possible to express the frequency law after  $n$  collisions by (2) in such a way that we introduce the mean values for  $\cos \vartheta$  defined by the relation

$$\overline{\cos \vartheta^n} = \int_0^\pi \cos^n \vartheta f(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta . . . . . \quad (3)$$

As one understands at once that the LEGENDRE polynomia  $P_n(\cos \vartheta)$  will play a part, we introduce the mean values of these polynomia by the definition

$$\overline{P_n(\cos \vartheta)} = \overline{P_n(\mu)} = \int_{-1}^{+1} P_n(\mu) f(\mu) d\mu . . . . . \quad (4)$$

We now proceed first to the calculation of  $\overline{\cos \vartheta_n}$  which represents the mean value of the cosinus after  $n$  collisions.

If  $\vartheta_{n-1}$  is the angle of the direction of the velocity after  $n-1$  collisions

<sup>1)</sup> Cf. These Proceedings 39, 810, 904, 1049, 1166, (1936).

<sup>2)</sup> In a remark to this paper we will treat the energy distribution when (2) is assumed.

with the original direction and  $\vartheta_n$  that after  $n$ , the last direction is originated from the first by a change of azimuth  $\varphi$  and by turning the direction over an angle  $\vartheta$  such that:

$$\cos \vartheta_n = \cos \vartheta_{n-1} \cos \vartheta + \sin \vartheta_{n-1} \sin \vartheta \cos \varphi. \dots \quad (5)$$

The probability of this change by a given value of  $\vartheta_{n-1}$  is given by (2) which must be multiplied by  $\frac{d\varphi}{2\pi}$ .

In order to get  $\overline{\cos \vartheta'_n}$  for a given value of  $\vartheta_{n-1}$  we must multiply by the probability and integrate over the range of  $\vartheta$  and with respect to  $\varphi$  from 0 to  $2\pi$ .

In this way we get for

$$\overline{\cos \vartheta'_n} = \overline{\cos \vartheta_{n-1} \cos \vartheta}$$

or taking the mean with respect to  $\vartheta_{n-1}$

$$\overline{\cos \vartheta_n} = \overline{\cos \vartheta_{n-1}} \overline{\cos \vartheta}$$

from which follows

$$\overline{\cos \vartheta_n} = \overline{\cos \vartheta^n} = P_1(\vartheta) \dots \quad (6^1)$$

In the same way we get for  $\overline{\cos^2 \vartheta_n}$

$$\begin{aligned} \overline{\cos^2 \vartheta_n} &= \overline{\cos^2 \vartheta_{n-1} \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta_{n-1} \sin^2 \vartheta} \frac{1}{2} \\ &= \overline{\cos^2 \vartheta_{n-1}} \frac{1}{2} \{3 \overline{\cos^2 \vartheta} - 1\} + \frac{1}{2} (1 - \overline{\cos^2 \vartheta}) \end{aligned}$$

from which we can deduce, introducing  $\overline{P_2(\cos \vartheta)}$ :

$$\overline{\cos^2 \vartheta_n} = \frac{1}{3} (1 + 2 \overline{P_2(\cos \vartheta)}^n) \dots \quad (6^2)$$

and for

$$\overline{\cos^3 \vartheta_n} = \frac{2}{5} \overline{P_3(\cos \vartheta)}^n + \frac{3}{5} \overline{P_1(\cos \vartheta)}^n \dots \quad (6^3)$$

$$\overline{\cos^4 \vartheta_n} = \frac{1}{5} (1 + \frac{8}{7} \overline{P_4(\cos \vartheta)}^n + \frac{20}{7} \overline{P_2(\cos \vartheta)}^n) \dots \quad (6^4)$$

The generalization of these formulae can be found, if we take into consideration that they originate from the development of  $\cos \vartheta$ ,  $\cos^2 \vartheta$ , etc. in LEGENDRE polynomia and replacing the first power of  $P_n(\vartheta)$  by the  $n$ th power of its mean value.

In this way we get, taking into consideration that

$$\left. \begin{aligned} \cos^{2p} \vartheta &= \sum_0^p a_{2k} P_{2k}(\cos \vartheta) \\ p a_{2k} &= \frac{4k+1}{2} \int_{-1}^{+1} \mu^{2p} P_{2k}(\mu) d\mu \end{aligned} \right\} \quad (7^1)$$

and

$$\left. \begin{aligned} \cos^{2p+1} \vartheta &= \sum_0^p a_{2k+1} P_{2k+1}(\cos \vartheta) \\ p a_{2k+1} &= \frac{4k+3}{2} \int_{-1}^{+1} \mu^{2p+1} P_{2k+1}(\mu) d\mu \end{aligned} \right\} \quad (7^2)$$

$$\overline{\cos^{2p} \vartheta_n} = \sum_0^p p a_{2k} \overline{P_{2k}(\cos \vartheta)}^n \quad (8^1)$$

and

$$\overline{\cos^{2p+1} \vartheta_n} = \sum_0^p p a_{2k+1} \overline{P_{2k+1}(\cos \vartheta)}^n \quad (8^2)$$

When  $n$  is infinite, the odd mean powers are zero and the even mean powers given by

$$\overline{\cos^{2p} \vartheta} = p a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \mu^{2p} d\mu = \frac{1}{2p+1}$$

to these values the mean even powers converge for large values of  $n$ .

The values mentioned correspond with a homogeneous distribution of the velocities. This distribution is already strongly approximated for rather, not very, great values of  $n$ , which means that after a not great number of collisions for any law of scattering the homogeneous distribution results.

If we assume the distribution (1), we get:

$$\overline{\cos^p \vartheta} = \frac{2}{p+2}$$

and we have:

$$\overline{\cos \vartheta_n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\overline{\cos^2 \vartheta_n} = \frac{1}{3} \left(1 + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

$$\overline{\cos^3 \vartheta_n} = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

In the second paper we have shown that the probability of  $n$  collisions, when the mean number in which the neutron is not captured is  $r_f$ ,  $p$  being the probability of capture, is given by:

$$\frac{r_f^n e^{-\frac{r_f}{1-p}}}{n!}$$

The mean value  $\overline{\cos \vartheta_r}$  in the case of  $v_f$  collisions free from capture, therefore, is given by:

$$\begin{aligned}\overline{\cos \vartheta_r} &= \sum_0^{\infty} \frac{v_f^n e^{-\frac{v_f}{1-p}}}{n!} \overline{\cos \vartheta_n} = \\ &= \sum_0^{\infty} \frac{v_f^n e^{-\frac{v_f}{1-p}}}{n!} \overline{P_1(\vartheta)}^n = \\ &= e^{-\frac{v_f}{1-p}} e^{v_f \overline{P_1(\vartheta)}}\end{aligned}$$

From the formula (8<sup>1</sup>) and (8<sup>2</sup>) we get in the analogous way

$$\left. \begin{aligned}\overline{\cos^{2p} \vartheta_r} &= e^{-\frac{v_f}{1-p}} \sum_0^p {}_p a_{2k} e^{v_f \overline{P_{2k}(\cos \vartheta)}} \\ \overline{\cos^{2p+1} \vartheta_r} &= e^{-\frac{v_f}{1-p}} \sum_0^p {}_p a_{2k+1} e^{v_f \overline{P_{2k+1}(\cos \vartheta)}}\end{aligned}\right\} . . . \quad (9)$$

and

We are now prepared to determine the probability law of  $\vartheta$  after  $n$  collisions, which we denote by  $W_n(\vartheta) \sin \vartheta$ . We develop this function in an infinite series of LEGENDRE polynomials, so that

$$W_n(\vartheta) = A_0 + A_1 P_1(\cos \vartheta) + \dots + A_{2p} P_{2p}(\cos \vartheta) + A_{2p+1} P_{2p+1}(\cos \vartheta) \quad (10)$$

Introducing again  $\cos \vartheta = \mu$  and integrating  $W_n(\mu) d\mu$  from  $-1$  to  $+1$ , we find for  $A_0 = \frac{1}{2}$  and, taking into account the condition that the mean values of  $\overline{\cos \vartheta^p} = \overline{\mu^p}$  are given by the relation mentioned above, we easily find

$$A_p = \frac{2p+1}{2} \overline{P_p(\cos \vartheta)}^n$$

so

$$W_n(\mu) = \sum_0^{\infty} \frac{2p+1}{2} \overline{P_p(\cos \vartheta)}^n P_p(\mu) . . . . . \quad (11)$$

From this equation we can deduce the value of the frequency law if in the mean  $v$  collisions without capture take place. We get

$$W_v(\mu) = e^{-\frac{v_f}{1-p}} \sum_0^{\infty} \frac{2p+1}{2} P_p(\mu) e^{v_f \overline{P_p(\cos \vartheta)}} . . . . . \quad (12)$$

The relations (11) and (12) can be used in order to deduce the mean

values of  $\cos \vartheta$  for the function which determines the scattering after one collision only from experimental data on the frequency law.

Using the frequency law (1), we find for  $W_n(\mu)$ ,

$$W_n(\mu) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^n \frac{3}{2} P_1(\mu) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{4p+1}{2} \left( \frac{(1-p)}{2^{2p}(p!)^2} \frac{1}{(p+2)(p-1)} \right)^n P_{2p}(\mu)$$

which for large values of  $n$  converges to a spherical distribution.

We will conclude this article with some remarks on paper (I).

In this first paper the law of distribution in energy for neutrons scattered by protons has been deduced, assuming that the probability of scattering under a certain angle is given by (1). It is possible to obtain this law under the much more general assumption (2).

Let us first deduce the mean values given at p. 811 of paper I.

The energy after  $n$  collisions is given by

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos^2 \vartheta_1 \cos^2 \vartheta_2 \dots \cos^2 \vartheta_n$$

where  $\vartheta_1 \dots \vartheta_n$  are the angles occurring at the successive collisions. Now for each collision the probability is given by (2) so that we get:

$$\bar{\varepsilon}_n = \varepsilon_0 \overline{\cos^2 \vartheta^n}$$

and in general

$$\bar{\varepsilon}_n^p = \varepsilon_0^p \overline{\cos^{2p} \vartheta^n},$$

When we go back to the formula (4) we get the relation given in paper (I).

For the mean  $p^{\text{th}}$  power, when the mean number of collisions is  $\nu$ , we find

$$\bar{\varepsilon}^\nu = \varepsilon_0^\nu e^{-\nu} e^{\overline{\cos 2p \vartheta}^\nu (1-p)}.$$

We can deduce the probability of an energy between  $\varepsilon$  and  $\varepsilon + d\varepsilon$  after a given number of collisions.

Let us take, for example,

$$W_2(\varepsilon).$$

This probability for the angles  $\vartheta_1$  and  $\vartheta_2$  is

$$W_2(\varepsilon) d\varepsilon = f(\vartheta_1) \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 f(\vartheta_2) \sin \vartheta_2 d\vartheta_2,$$

or putting us  $\vartheta = \mu$

$$f(\mu_1) d\mu_1 f(\mu_2) d\mu_2$$

which must be integrated with the conditions

$$\varepsilon < \varepsilon_0 \quad \mu_1^2 \mu_2^2 < \varepsilon + d\varepsilon$$

and

$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} \leq \mu_1 \leq 1$$

thus

$$W_2(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}} \int_{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}}^1 f(\mu_1) f\left(\frac{1}{\mu_1} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}\right) \frac{d\mu_1}{\mu_1} d\varepsilon.$$

Taking for  $f(\mu_1) 2\mu_1$  we get back the result obtained in (I).  
More generally we obtain the recurrent equation

$$W_n(\varepsilon) = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} W_{n-1}(\varepsilon') f\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}}\right) \frac{d\varepsilon'}{\sqrt{\varepsilon'}}$$

which for the probability (1) changes into (1) paper I.

In the first paper we have indicated that the energy after one collision for particles showing a direction  $\vartheta$  with the original directions for neutrons (mass  $m$ ) with particles of the mass  $M$  is

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_0 \left( 1 - \frac{4Mm}{(M+m)^2} \sin^2 \vartheta \right) = \\ &= \varepsilon_0 \left( \left( \frac{M-m}{M+m} \right)^2 + \frac{4mM}{(M+m)^2} \cos^2 \vartheta \right) = \\ &= \varepsilon_0 (\alpha + \beta \cos^2 \vartheta). \end{aligned}$$

Assuming the probability law (1) we obtain

$$\bar{\varepsilon}_1 = \varepsilon_0 \frac{M^2 + m^2}{(M+m)^2}$$

and

$$\bar{\varepsilon}_n = \varepsilon_0 \left( \frac{M^2 + m^2}{(M+m)^2} \right)^n.$$

For  $\bar{\varepsilon}_1^p$  we can easily indicate the value, taking into account that  $\overline{\cos^2 \vartheta} = \frac{1}{2p+2}$ . Using the frequency law (2) we get

$$\bar{\varepsilon}_n = \varepsilon_0 (\alpha + \beta \overline{\cos^2 \vartheta})^n$$

where  $\overline{\cos^2 \vartheta}$  has to be determined with the use of (2) higher mean values can be determined in analogous way.

For the frequency law of  $\varepsilon$  after one collision  $W_1(\varepsilon) d\varepsilon$  we get (using (1))

$$d\varepsilon W_1(\varepsilon) = \frac{d\varepsilon}{\beta \varepsilon_0}$$

the range of possible values for  $\varepsilon$  extending from  $\varepsilon = \varepsilon_0$  to  $\varepsilon = \alpha \varepsilon_0$ .

If we want to deduce the frequency law for two collisions  $W_2(\varepsilon)$  we ought to consider two cases, e.g.  $\varepsilon > \alpha \varepsilon_0$  and  $\alpha \varepsilon_0 > \varepsilon > \alpha^2 \varepsilon_0$ .

We thus find for  $W_2(\varepsilon)$

$$\varepsilon_0 > \varepsilon > \alpha \varepsilon_0$$

$$W_2(\varepsilon) = \frac{1}{\beta^2 \varepsilon_0} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{1}{\beta^2 \varepsilon_0} \lg \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}$$

$$\alpha \varepsilon_0 > \varepsilon > \alpha^2 \varepsilon_0$$

$$W_2(\varepsilon) = \frac{1}{\beta^2 \varepsilon_0} \int_{\alpha \varepsilon_0}^{\frac{\varepsilon}{\alpha}} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{1}{\beta^2 \varepsilon_0} \lg \frac{\varepsilon}{\alpha^2 \varepsilon_0}.$$

In the same way the probability of an energy  $\varepsilon$  after three and more collisions may be calculated.

**Mathematics.** — *Zur Differentialgeometrie der Gruppe der Berührungs-transformationen. III. Infinitesimale doppelthomogene Berührungs-transformationen und ihre Beziehungen zur Mechanik und Elektrodynamik.* Von J. A. SCHOUTEN.

(Communicated at the meeting of May 29, 1937.)

### 1. Einleitung.

In dieser Mitteilung sollen die infinitesimalen doppelthomogenen Berührungstransformationen und ihre Anwendungen zur Sprache kommen. Inzwischen hat mich Herr Prof. F. ENGEL nach der Veröffentlichung der beiden ersten Mitteilungen dieser Serie<sup>1)</sup> freundlichst darauf aufmerksam gemacht, dass schon Herr F. J. DOHMEN in seiner Greifswalder Dissertation des Jahres 1905<sup>2)</sup> doppelthomogene Berührungstransformationen

<sup>1)</sup> Zur Differentialgeometrie der Gruppe der Berührungstransformationen, Proceedings Royal Acad. Amsterdam, **40** (1937) S. 100—107, S. 236—245.

<sup>2)</sup> Darstellung der Berührungstransformationen in Konnexkoordinaten.

behandelt hat. Merkwürdigerweise haben weder seine nur in Dissertationsform publizierten Resultate noch die in Bd. III der Transformationsgruppen unter „Kritik einiger neuerer Untersuchungen“ versteckten Bemerkungen von LIE, die den Ausgangspunkt der Untersuchung bildeten, irgendwie in der Literatur nachgewirkt. Es soll daher hier kurz darüber berichtet werden was vor Veröffentlichung dieser Serie bekannt gewesen ist. Bei LIE<sup>1)</sup> findet sich zunächst eine klare Definition der doppelt-homogenen Objekttransformation. Zur doppelthomogenen Koordinatentransformation gelangte er, dem Geiste der damaligen Zeit entsprechend, natürlich nicht. Für die Objekttransformationen gibt er aber genau die n. u. h. Bedingungen an, die m. m. den Bedingungen I (25, 29, 30) entsprechen. Weiter gehen die Erörterungen von LIE, die eigentlich nur eine Kritik eines falschen Ansatzes von LINDEMANN darstellen, nicht. Bei DOHMHEN werden die vier Koeffizienten  $a, b, c, d$  (I S. 103), die bei LIE von vornherein die Werte 1, 0, 0, 1 hatten (dieselben Werte die sich bei mir aus der Forderung der Vertauschbarkeit mit der Gruppe  $\mathfrak{F}$  ergeben, eine Forderung die nur bei Betrachtung der Koordinatentransformationen aufkommen kann) frei gelassen und er gelangt zum Uebergang von gewöhnlichen zu doppelthomogenen Berührungstransformationen und umgekehrt. Statt von (I 14, 15) geht er aus von Gleichungen, die den Koordinatengleichungen

$$\begin{aligned} p_{\alpha'} dx^{\alpha'} &= L p_{\alpha} dx^{\alpha} + M x^{\lambda} dp_{\lambda} \\ x^{\alpha'} dp_{\alpha'} &= N x^{\lambda} dp_{\lambda} + P p_{\alpha} dx^{\alpha} \end{aligned}$$

entsprechen.

Seinem Ansatz entsprechend schaltet er von vornherein die Bedingung  $p_{\alpha} x^{\alpha} = 0$  aus und findet die Transformationen dementsprechend in der Form, die nicht von dieser zusätzlichen Bedingung Gebrauch macht. Der Hauptsatz (II S. 242), der gestattet jede beliebige doppelthomogene Berührungstransformationen mit Hilfe von  $q+1$  in  $x^{\alpha}, x^{\alpha'}$  homogenen Funktionen der Grade +1, -1 darzustellen, findet sich bei ihm noch nicht. Dagegen ist ihm die Herleitung einer infinitesimalen doppelthomogenen Berührungstransformation aus einer charakteristischen Funktion bekannt, sowie auch die Beziehung zwischen dieser Funktion und der charakteristischen Funktion der entsprechenden gewöhnlichen Berührungs-transformation.

## 2. Infinitesimale doppelthomogene Berührungstransformationen.

Die allgemeinste infinitesimale Berührungstransformation in  $\xi^h, \zeta_a$ :  $h, i, j = 1, \dots, n$ ;  $a, b, c = 2, \dots, n$  hat nach LIE<sup>2)</sup> die Form

$$\frac{d\xi^1}{dt} = \zeta_a \frac{\partial W}{\partial \zeta_a} - W; \quad \frac{d\xi^a}{dt} = \frac{\partial W}{\partial \zeta_a}; \quad \frac{d\zeta_b}{dt} = - \frac{\partial W}{\partial \xi^b} - \zeta_b \frac{\partial W}{\partial \xi^1}. \quad (1)$$

<sup>1)</sup> Transformationsgruppen, Bd. III, S. 530.

<sup>2)</sup> Transformationsgruppen II, S. 252.

Sie transformiert die Differentialform  $\frac{d}{\tau} \xi^1 - \zeta_a \frac{d}{\tau} \xi^a$  folgendermassen<sup>1)</sup>

$$\frac{d}{\tau} (\xi^1 - \zeta_a \frac{d}{\tau} \xi^a) = - \frac{\partial W}{\partial \xi^1} (\xi^1 - \zeta_a \frac{d}{\tau} \xi^a) \quad \dots \quad (2)$$

Gehen wir zu den Variablen  $\eta_i$  über vermöge der Gleichung

$$1 : -\zeta_2 : \dots : -\zeta_n = \eta_1 : \eta_2 : \dots : \eta_n \quad \dots \quad (3)$$

und nehmen wir als zusätzliche Bedingung hinzu dass

$$\frac{d}{\tau} (\eta_h \frac{d}{\tau} \xi^h) = 0 \quad \dots \quad (4)$$

sein soll, so ergibt sich eindeutig

$$\frac{d\xi^h}{d\tau} = \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial \eta_h}; \quad \frac{d\eta_i}{d\tau} = - \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial \xi^i} \quad \dots \quad (5)$$

wo

$$\mathfrak{W} = -\eta_1 W \left( \xi^h, \frac{-\eta_a}{\eta_1} \right) \quad \dots \quad (6)$$

ist. Die allgemeinste infinitesimale homogene Berührungs transformation hat also die Form (5), wo  $\mathfrak{W}$  ein beliebige Funktion von  $\xi^h, \eta_i$ , homogen ersten Grades in  $\eta_i$  ist. (LIE a.a.O. S. 263).

Wir gehen jetzt zu den Variablen  $x^\alpha, p_\alpha$  über vermöge

$$1 : \xi^1 : \dots : \xi^n = x^0 : x^1 : \dots : x^n \\ -\eta_j \xi^j; \eta_1 : \dots : \eta_n = p_0 : p_1 : \dots : p_n \quad \left. \right\} \quad \dots \quad (7)$$

und setzen zunächst mal

$$x^0 = 1; \quad x^h = \xi^h \\ p_0 = -\eta_j \xi^j; \quad p_i = \eta_i \quad \left. \right\} \quad \dots \quad (8)$$

Setzen wir dann

$$\mathfrak{T}(x^\alpha, p_\alpha) = -x^0 p_1 W \left( \frac{x^h}{x^0}, \frac{-p_a}{p_1} \right) \quad \dots \quad (9)$$

so ist  $\mathfrak{T}$  homogen ersten Grades sowohl in  $x^\alpha$  als in  $p_\alpha$  und enthält  $p_0$  nicht, sodass

$$\begin{aligned} \frac{dx^h}{d\tau} &= \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial p_h}; \quad \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial p_0} \\ \frac{dp_i}{d\tau} &= -\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x^i}; \quad \frac{dp_0}{d\tau} = -p_i \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial p_i} + x^h \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x^h} \\ &= -\mathfrak{T} + p_0 \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial p_0} + \mathfrak{T} - x^0 \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x^0} \\ &= -\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x^0} \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad \dots \quad (10)$$

<sup>1)</sup> Wir schreiben  $d$  zur Unterscheidung von dem Symbol  $d$ .

ist. Da

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}(p_z x^z) &= p_z \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial p_z} - x^z \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x^z} = 0, \\ \frac{d}{dt}(p_z d x^z) &= \frac{dp_z}{dt} dx^z + p_z d \frac{dx^z}{dt} = - \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x^z} dx^z + p_z d \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial p_z} \\ &= - \underset{!}{d}\mathfrak{T} + \underset{!}{d}\mathfrak{T} = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (11)$$

ist, ist die Differentialform  $p_z \underset{!}{d} x^z$  invariant und zwar *unabhängig von der Gleichung*  $p_z x^z = 0$ .

Wir gehen jetzt zu beliebigen homogenen Koordinaten über

$$'x^z = z x^z; 'p_\lambda = \lambda p_\lambda, \dots \quad (12)$$

wo die Koeffizienten  $z$  und  $\lambda$  beliebige homogene Funktionen nullten Grades in  $x^z$  und  $p_\lambda$  sind. Sodann ist

$$\frac{d'x^z}{dt} = \frac{d \log z}{dt} 'x^z + z \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial p_z}; \quad \frac{d'p_\lambda}{dt} = \frac{d \log \lambda}{dt} 'p_\lambda - \lambda \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x^z}. \quad (13)$$

Wir können aber diese infinitesimale Transformation ändern ohne die geometrische Bedeutung zu ändern, indem wir rechts einen Term  $a'x^z$  bzw.  $\beta'p_\lambda$  zufügen. (Denn die Transformation von  $\frac{'x^z}{x_0}$  und  $\frac{'p_\lambda}{p_0}$  ändert sich dabei nicht). Diese Zusatzerme wollen wir so wählen, dass wiederum sowohl  $'p_z 'x^z$  als  $'p_z d 'x^z$  invariant sind, unabhängig von der Gleichung  $'p_z 'x^z = 0$ . In anbetracht der Homogenität von  $\mathfrak{T}$  können wir schreiben

$$\left. \begin{aligned} \frac{d'x^z}{dt} &= \frac{d \log z}{dt} 'x^z + \frac{\partial \mathfrak{T}('x^z, 'p_\lambda)}{\partial 'p_z} + a'x^z \\ \frac{d'p_\lambda}{dt} &= \frac{d \log \lambda}{dt} 'p_\lambda - \frac{\partial \mathfrak{T}('x^z, 'p_\lambda)}{\partial 'x^z} + \beta'p_\lambda \end{aligned} \right\}. \quad (14)$$

Da

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}('p_z 'x^z) &= \frac{d \log z}{dt} 'x^z 'p_z + a'x^z 'p_z \\ &\quad + \frac{d \log \lambda}{dt} 'x^z 'p_\lambda + \beta'x^z 'p_\lambda \end{aligned} \right\}. \quad (15)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\tau} ({}'p_{\lambda} {}_1 d'x^{\lambda}) &= \frac{d \log \lambda}{d\tau} {}'p_{\lambda} {}_1 d'x^{\lambda} - {}_1 d'x^{\lambda} \frac{\partial \mathfrak{T}({}'x^{\lambda}, {}'p_{\lambda})}{\partial {}'x^{\lambda}} + \beta {}'p_{\lambda} {}_1 d'x^{\lambda} \\ &\quad + {}'p_{\lambda} {}_1 \left( \frac{d \log \lambda}{d\tau} {}'x^{\lambda} + \frac{\partial \mathfrak{T}({}'x^{\lambda}, {}'p_{\lambda})}{\partial {}'p_{\lambda}} + a {}'x^{\lambda} \right) \\ &= \left( \frac{d \log \lambda}{d\tau} + \beta \right) {}'p_{\lambda} {}_1 d'x^{\lambda} + \\ &\quad - \left( \frac{d \log \lambda}{d\tau} + a \right) {}'x^{\lambda} {}_1 d'p_{\lambda} + {}_1 d \left\{ \left( \frac{d \log \lambda}{d\tau} + a \right) {}'x^{\lambda} {}_1 p_{\lambda} \right\} \end{aligned} \right\} . \quad (16)$$

ist, werden diese beiden Ausdrücke unabhängig von der Gleichung  $p_{\lambda} {}_1 x^{\lambda} = 0$  und für jedes Differential  $d$  Null wenn

$$a = -\frac{d \log \lambda}{d\tau}; \quad \beta = -\frac{d \log \lambda}{d\tau} \quad \dots \quad (17)$$

ist, sodass die gewünschte infinitesimale Transformation lautet

$$\left. \begin{aligned} \frac{d'x^{\lambda}}{d\tau} &= \frac{\partial}{\partial {}'p_{\lambda}} \mathfrak{T}({}'x^{\lambda}, {}'p_{\lambda}) \\ \frac{d'p_{\lambda}}{d\tau} &= -\frac{\partial}{\partial {}'x^{\lambda}} \mathfrak{T}({}'x^{\lambda}, {}'p_{\lambda}) \end{aligned} \right\} . \quad \dots \quad (18)$$

Die Funktion  $\mathfrak{T}$  enthält  $p_0$  nicht. Bilden wir nun aber eine beliebige Funktion, die sich vermöge  $'p_{\lambda} {}_1 x^{\lambda} = 0$  in  $\mathfrak{T}$  überführen lässt, also

$$'\mathfrak{T}({}'x^{\lambda}, {}'p_{\lambda}) = \mathfrak{T}({}'x^{\lambda}, {}'p_{\lambda}) + ('p_{\lambda} {}_1 x^{\lambda}) F({}'x^{\lambda}, {}'p_{\lambda}), \quad \dots \quad (19)$$

so stellt

$$\left. \begin{aligned} \frac{d'x^{\lambda}}{d\tau} &= \frac{\partial '\mathfrak{T}}{\partial {}'p_{\lambda}} = \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial {}'p_{\lambda}} + {}'x^{\lambda} F + ('p_{\lambda} {}_1 x^{\lambda}) \frac{\partial F}{\partial {}'p_{\lambda}} \\ \frac{d'p_{\lambda}}{d\tau} &= -\frac{\partial '\mathfrak{T}}{\partial {}'x^{\lambda}} = -\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial {}'x^{\lambda}} - {}'p_{\lambda} F - ('p_{\lambda} {}_1 x^{\lambda}) \frac{\partial F}{\partial {}'x^{\lambda}} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (20)$$

eine infinitesimale Transformation dar, die infolge  $'p_{\lambda} {}_1 x^{\lambda} = 0$  dieselbe geometrische Bedeutung hat als (18). Da sich mit Hilfe von  $'p_{\lambda} {}_1 x^{\lambda} = 0$  aus jeder beliebigen homogenen Funktion ersten Grades in  $'x^{\lambda}$  und  $'p_{\lambda}$  in dieser Weise eine ebensolche Funktion herstellen lässt, die  $p_0$  nicht enthält, haben wir also den Satz erhalten:

*Hauptsatz.*

*Die allgemeinste infinitesimale doppelthomogene Berührungstransformation hat die Form*

$$\frac{dx^{\lambda}}{d\tau} = \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial p_{\lambda}}; \quad \frac{dp_{\lambda}}{d\tau} = -\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x^{\lambda}} \quad \dots \quad (21)$$

wo  $\mathfrak{L}$  eine beliebige homogene Funktion ersten Grades in  $x^a$  und  $p_a$  darstellt.

Ausserdem haben wir den Weg gefunden der von der Funktion  $W(\xi^a, \zeta_a)$  zur Funktion  $\mathfrak{L}$  führt, es darf für  $\mathfrak{L}$  eben jede in  $x^a$  und  $p_a$  homogene Funktion ersten Grades genommen werden, die sich vermöge  $p_a x^a = 0$  in

$$-x^0 p_1 W\left(\frac{x^a}{x^0}, \frac{-p_a}{p_1}\right) \quad \dots \quad (22)$$

überführen lässt<sup>1)</sup>.

### 3. Symmetrisierung eines mechanischen Problems i. b. auf t.<sup>2)</sup>

Es sei ein mechanisches (oder elektrodynamisches) Problem vorgelegt in den Koordinaten  $\xi^p; p, q, r = 1, \dots, n-1$  mit einer LAGRANGEfunktion  $L$ , die von  $\xi^p, \dot{\xi}^p$  und  $t$  abhängt und nicht identisch verschwindet. Die Bewegungsgleichungen lassen sich sowohl in der LAGRANGESchen Form

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\xi}^q} L - \frac{\partial L}{\partial \xi^q} = 0 \quad \dots \quad (23)$$

als in der HAMILTONschen Form

$$\left. \begin{aligned} \partial^p H &= \dot{\xi}^p; \quad \partial_q H = -\zeta_p; \quad \partial^p = \frac{\partial}{\partial \zeta_p}; \quad \partial_q = \frac{\partial}{\partial \xi^q} \\ H &= \zeta_p \dot{\xi}^p - L; \quad \zeta_q = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^q} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (24)$$

schreiben.

Wir schreiben jetzt  $t = \xi^n, H = -\zeta_n$  und führen eine neue infinitesimale Grösse  $d\tau$  ein um den Gebrauch von Differentialen zu vermeiden<sup>3)</sup>. Es sei dann

$$\mathfrak{L} = -H \frac{dt}{d\tau} + \zeta_p \dot{\xi}^p \frac{dt}{d\tau} = \zeta_a \dot{\xi}^a \frac{dt}{d\tau}; \quad a, b, c = 1, \dots, n \quad \dots \quad (25)$$

sodass

$$\mathfrak{L} d\tau = L dt \quad \dots \quad (26)$$

ist und es sei

$$\mathfrak{H}(\zeta_a, \dot{\xi}^a) = \frac{dt}{d\tau} (-L + \zeta_p \dot{\xi}^p + \zeta_n) = -\mathfrak{L} + \zeta_a \frac{d\xi^a}{dt}. \quad \dots \quad (27)$$

<sup>1)</sup> F. J. DOHMEN, a. a. O. S. 40.

<sup>2)</sup> In der Arbeit Homogeneous variables in classical dynamics von P. A. M. DIRAC (Proc. Cambr. Phil. Soc. 29 (1933) 389—400) tritt diese Symmetrisierung auf als erste Homogenisierung, bei welcher die LAGRANGESche Funktion homogen ersten Grades in den Geschwindigkeiten wird. Da die Kontakttransformation hier aber noch nicht homogen gemacht wird, ziehen wir den Ausdruck Symmetrisierung vor.

<sup>3)</sup> Man kann  $d\tau$  dem Probleme irgendwie angepasst wählen aber auch ohne Einführung von  $d\tau$  rein mit den Differentialen arbeiten.

$\mathfrak{L}$  ist die neue LAGRANGEsche Funktion homogen erster Ordnung in den Geschwindigkeiten, und man arbeitet mit der HAMILTONschen Gleichung  $\ddot{\mathfrak{H}}=0$  anstatt mit einer HAMILTONschen Funktion.

Die Bewegungsgleichungen lauten jetzt, wie man leicht verifiziert, in der LAGRANGEschen Form

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\xi}^b} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \xi^b} = 0. \quad \dots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

wo jetzt der Punkt Differentiation nach  $\tau$  darstellt.  $\mathfrak{L}$  ist als Funktion der  $\xi^a$  und  $\frac{d\xi^a}{d\tau}$  homogen ersten Grades in den „Geschwindigkeiten“  $\dot{\xi}^b$ .

In der HAMILTONschen Form lauten die Gleichungen

$$\partial^a \ddot{\mathfrak{H}} = \frac{d\xi^a}{d\tau}; \quad \partial_b \ddot{\mathfrak{H}} = -\frac{d\zeta_b}{d\tau}; \quad \partial_b = \frac{\partial}{\partial \xi^b}; \quad \partial^a = \frac{\partial}{\partial \zeta^a}. \quad \dots \quad (29)$$

Die Funktion  $\ddot{\mathfrak{H}}$  ist nicht die einzige Funktion, die den HAMILTONschen Gleichungen genügt. Ist  $\mathfrak{F}(\ddot{\mathfrak{H}})$  eine Funktion von  $\ddot{\mathfrak{H}}$ , die für  $\ddot{\mathfrak{H}}=0$  verschwindet, so ist

$$\partial^a \mathfrak{F} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \ddot{\mathfrak{H}}} \frac{d\xi^a}{d\tau}; \quad \partial_b \mathfrak{F} = -\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \ddot{\mathfrak{H}}} \frac{d\zeta_b}{d\tau} \quad \dots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

und die Gleichung  $\mathfrak{F}=0$  ist also ebenfalls als HAMILTONsche Gleichung zu verwenden, wenn man  $d\tau$  ersetzt durch  $d\tau' = d\tau / \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \ddot{\mathfrak{H}}}$ .

#### 4. Die erste Homogenisierung.<sup>1)</sup>

Die Gleichungen (29) stellen eine infinitesimale Kontakttransformation in den Variablen  $\xi^{n+1}, \xi^a, \zeta_a$  dar, vorausgesetzt, dass man sie erzängt durch eine Gleichung für  $\xi^{n+1}$  von der Form

$$\frac{d\xi^{n+1}}{d\tau} = \zeta_a \partial^a \ddot{\mathfrak{H}} - \ddot{\mathfrak{H}}. \quad \dots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Sie haben die besondere Eigenschaft, dass  $\ddot{\mathfrak{H}}$  nicht von  $\xi^{n+1}$  abhängt. Infolgedessen ist  $d\xi^{n+1} - \zeta_a d\xi^a$  invariant:

$$\begin{aligned} d(d\xi^{n+1} - \zeta_a d\xi^a) &= d_d\xi^{n+1} - d_d\zeta_a d\xi^a - \zeta_a d_d\xi^a \\ &= \left\{ d\left(\zeta_a \partial^a \ddot{\mathfrak{H}} - \ddot{\mathfrak{H}}\right) + (d\xi^a) \partial_a \ddot{\mathfrak{H}} - \zeta_a d \partial^a \ddot{\mathfrak{H}} \right\} d\tau \quad \left. \right\} \\ &= \left\{ (d\zeta_a) \partial^a \ddot{\mathfrak{H}} - d \ddot{\mathfrak{H}} + (d\xi^a) \partial_a \ddot{\mathfrak{H}} + \zeta_a d \partial^a \ddot{\mathfrak{H}} - \zeta_a d \partial^a \ddot{\mathfrak{H}} \right\} d\tau = 0. \quad \left. \right\} \end{aligned} \quad (32)$$

<sup>1)</sup> Diese erste Homogenisierung tritt bei DIRAC a.a.O. auf als zweite Homogenisierung, nämlich Homogenisierung der Momente.

Aus (31) folgt

$$\frac{d\xi^{n+1}}{dt} = \zeta_a \frac{d\xi^a}{dt} - \tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{L} \quad . . . . . \quad (33)$$

und das Differential  $d\xi^{n+1}$  der Hilfsvariablen  $\xi^{n+1}$  hat also die Bedeutung von  $\mathcal{L} dt = L dt$ . Wir gehen jetzt zu den homogenen Momenten  $\eta_i; h, i = 1, \dots, n+1$  über und definieren

$$\zeta_a = -\frac{\eta_a}{\eta_{n+1}} \quad . . . . . \quad (34)$$

Dann geht aus (33) hervor

$$\tilde{\mathcal{H}} = -\frac{\eta_a}{\eta_{n+1}} \dot{\xi}^a - \mathcal{L} = -\frac{\eta_h}{\eta_{n+1}} \dot{\xi}^h \quad . . . . . \quad (35)$$

Führen wir jetzt statt  $\tilde{\mathcal{H}}$  die Funktion

$$H = -\eta_{n+1} \tilde{\mathcal{H}} \left( \dot{\xi}^h, \frac{-\eta_a}{\eta_{n+1}} \right) = \eta_h \dot{\xi}^h \quad . . . . . \quad (36)$$

ein, homogen ersten Grades in  $\eta_i$ , so ist (vgl. 5)

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial \eta_h} = \dot{\xi}^h \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial \dot{\xi}^i} = -\dot{\eta}_i} \quad . . . . . \quad (37)$$

und dies sind die Bewegungsgleichungen in der HAMILTONSchen Form nach der ersten Homogenisierung. Sie stellen eine homogene infinitesimale Kontakttransformation dar. Zu Ihnen gesellt sich die Gleichung

$$\boxed{H = 0} \quad . . . . . \quad (38)$$

Auch hier gelingt es die Gleichungen in der LAGRANGESchen Form zu schreiben<sup>1)</sup>.

### 5. Die zweite Homogenisierung.

Wir gehen jetzt zu den Koordinaten  $x^i$  und den Momenten  $p_i$  über definiert durch

$$\begin{aligned} x^0 : x^1 : \dots : x^{n+1} &= 1 : \xi^1 : \dots : \xi^{n+1} \\ p_0 : p_1 : \dots : p_{n+1} &= -\eta_i \xi^i : \eta_1 : \dots : \eta_{n+1} \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad . . . . . \quad (39)$$

und führen statt  $\tilde{\mathcal{H}}$  die Funktion

$$H = -x^0 p_{n+1} \tilde{\mathcal{H}} \left( \frac{x^h}{x^0}; \frac{-p_a}{p_{n+1}} \right) \quad . . . . . \quad (40)$$

<sup>1)</sup> DIRAC a.a.O. S. 394.

ein, homogen ersten Grades in  $x^i$  und in  $p_i$ . Sodann ist (vgl. 10)

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_i} = \dot{x}^i; \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x^i} = -\dot{p}_i \quad \dots \quad (41)$$

und dies sind die Bewegungsgleichungen in der HAMILTONSchen Form nach der zweiten Homogenisierung. Sie stellen eine doppelthomogene Kontakttransformation dar. Zu Ihnen gesellt sich die Gleichung

$$\mathbf{H} = 0. \quad \dots \quad (42)$$

und es liessen sich natürlich auch hier Gleichungen in der LAGRANGESchen Form finden.

### 6. Die elektrodynamischen Bewegungsgleichungen in der gewöhnlichen allgemeinen Relativitätstheorie.

Die Symmetrisierung der elektrodynamischen Bewegungsgleichungen führt bekanntlich zu einer Funktion  $\tilde{\mathcal{H}}$  von der Form

$$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} m c^2 - \frac{1}{2m} g^{hi} \left( \eta_h - \frac{e}{c} \varphi_h \right) \left( \eta_i - \frac{e}{c} \varphi_i \right) \quad \dots \quad (43)$$

wenn  $d\tau$  gemäss

$$d\tau^2 = g_{hi} d\xi^h d\xi^i \quad \dots \quad (44)$$

gewählt wird (Signatur  $-- +$ ).

Die erste Homogenisierung führt zu<sup>1)</sup>

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{2} m c^2 \eta_5 + \frac{1}{2m} \eta_5 g^{hi} \left( -\frac{\eta_h}{\eta_5} - \frac{e}{c} \varphi_h \right) \left( -\frac{\eta_i}{\eta_5} - \frac{e}{c} \varphi_i \right) \quad (45)$$

und die zweite zu

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{2} m c^2 p_5 x_0 + \frac{1}{2m} p_5 x^0 g^{hi} \left( -\frac{p_h}{p_5} - \frac{e}{c} \varphi_h \right) \left( -\frac{p_i}{p_5} - \frac{e}{c} \varphi_i \right). \quad (46)$$

Die Homogenisierungen führen also nicht zu Formen, symmetrisch in  $\xi^h, \eta_i$  bzw.  $x^i, p_i$ . Wir wollen nun aber zeigen, dass dies nur an der besonderen Methode liegt, die hier verwendet wird um Homogenisierungen zu erzwingen, und dass sich auf anderem Wege eine vollkommen symmetrische doppelthomogene Darstellung finden lässt.

### 7. Die elektrodynamischen Bewegungsgleichungen in der projektiven Feldtheorie.

In der projektiven Feldtheorie<sup>2)</sup> haben wir von vornherein homogene Koordinaten  $x^i, z, \dots, \tau = 0, 1, \dots, 4$ .

<sup>1)</sup> Vgl. DIRAC a.a.O. S. 400.

<sup>2)</sup> J. A. SCHOUTEN, La théorie projective de la relativité; Annales de l'Institut HENRI POINCARÉ, 5 (1935) 51—88.

Dementsprechend ist der Lokalraum zunächst ein projektiver Raum. Die Metrik wird eingeführt mittels einer Grösse  $G_{\lambda z}$  für welche gilt

$$G_{\lambda z} x^{\lambda} x^z = -\chi^2 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (47)$$

wo  $G_{\lambda z}$  homogen vom Grade  $-2$  in  $x^{\lambda}$  und  $\chi^2$  eine positive Konstante ist, die die Dimension  $[L^2]$  hat. Die Beziehungen zwischen dem gewöhnlichen Fundamentaltensor  $g_{\lambda h}$  und  $G_{\lambda z}$  lauten

$$g_{\lambda h} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial \xi^h}{\partial x^z} - q_{\lambda} q_z = G_{\lambda z} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (48)$$

wo

$$q_{\lambda} = G_{\lambda z} q^z; q^z = \chi^{-1} x^z \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (49)$$

ist. Es gibt eine (projektive) Uebertragung, die  $G_{\lambda z}$  invariant lässt und für deren Parameter  $\Pi_{\mu \lambda}^z$  gilt

$$\left. \begin{aligned} \Pi_{\mu \lambda}^z &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{z}{\mu \lambda} \\ \mu \lambda \end{array} \right\} + (q-1) q_{\mu \lambda} q^z + (1-p) q_{\mu} q_{\lambda}^z + (1-q) q_{\lambda} q_{\mu}^z \\ x^{\mu} \Pi_{\mu \lambda}^z &= -\chi p q_{\lambda}^z - \mathcal{R}_{\lambda}^z; q_{\mu \lambda} = \partial_{[\mu} q_{\lambda]} \\ x^{\lambda} \Pi_{\mu \lambda}^z &= -\chi q q_{\mu}^z - \mathcal{R}_{\mu}^z \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

wo das CHRISTOFFEL-symbol  $\{\}$  sich auf  $G_{\lambda z}$  bezieht,  $p$  und  $q$  Konstanten sind und  $q_{\mu \lambda}$  folgendermassen mit dem Bivektor  $F_{ji}$  des elektromagnetischen Feldes zusammenhängt

$$\left. \begin{aligned} q_{\mu \lambda} &= \frac{1}{2} \frac{k}{c} \frac{\partial \xi^j}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^{\lambda}} F_{ji}; \\ k &= \frac{q}{\sqrt{q^2 - 2pq + p}} \sqrt{\frac{\kappa}{2}}; \kappa = \text{Gravitationskonstante} = 1,87 \cdot 10^{-27} [M^{-1} L]. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Der Vektor der Viergeschwindigkeit ist

$$i^z = \frac{1}{c} \left( \frac{dx^z}{d\tau} + q^z q_{\lambda} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} \right) = i^{\mu} \partial_{\mu} x^z \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (52)$$

und es ist also  $i^z q_{\lambda} = 0$  und  $i^z i_{\lambda} = +1$ .

Der totale (potentielle + kinetische) Impuls wird dargestellt durch einen Punkt in dem projektiven Lokalraum, den *Impulsenergiepunkt*

$$p^z = mc i^z + \frac{e}{k} q^z \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (53)$$

Die Forderung, dass die autogeodätischen Linien der Uebertragung definiert durch

$$p^{\mu} \nabla_{\mu} p^z = 0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (54)$$

die Bahnkurven der geladenen Teilchen sind, führt zur Bedingung

$$p + q = 2 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (55)$$

und zur Gleichung

$$i^\mu \partial_\mu p_\lambda = \frac{1}{mc} \Pi_{\tau\lambda}^{\rho} p^\sigma p_\rho + \frac{e}{\chi mc k} p_\lambda \quad \dots \quad (56)$$

Aus (53) folgt

$$\left. \begin{aligned} G^{\lambda\mu} p_\lambda p_\mu &= +m^2 c^2 - \frac{e^2}{k^2} \\ p_\lambda q^\lambda &= -\frac{e}{k} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (57)$$

woraus hervorgeht, dass

$$\mathbf{F}(p, q) = \frac{1}{2mc} \left\{ G^{\lambda\mu} p_\lambda p_\mu - \frac{2e}{\chi k} p_\lambda x^\lambda + \chi^{-2} \left( \frac{e^2}{k^2} + m^2 c^2 \right) G_{\lambda\mu} x^\lambda x^\mu \right\} = 0. \quad (58)$$

ist. Nun ist unter Berücksichtigung von (53) und  $p + q = 2$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p_\lambda} &= \frac{1}{mc} \left( p^\mu - \frac{e}{k} q^\mu \right) = i^\mu = \frac{d' x^\mu}{d\tau}; \frac{d'}{d\tau} = i^\mu \partial_\mu \\ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x^\lambda} &= \frac{1}{2mc} \left( p_\rho p_\lambda \partial_\lambda G^{\rho\sigma} - \frac{2e}{\chi k} p_\lambda \right) \\ &= \frac{1}{mc} \left( -\Pi_{\rho\lambda}^{\tau} p^\rho p_\tau - \frac{e}{\chi k} p_\lambda \right) = -\frac{d' p_\lambda}{d\tau} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (59)$$

sodass sich  $\mathbf{F}$  als HAMILTONsche Funktion bewährt. Nur ist  $\mathbf{F}$  nicht homogen in  $p_\lambda$  und  $x^\mu$ . Nun ist aber  $p_\lambda x^\lambda = -\frac{\chi e}{k}$ . Setzt man

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2mc} \left\{ -\frac{\chi e}{k} \frac{G^{\lambda\mu} p_\lambda p_\mu}{p_\rho x^\rho} - \frac{e}{\chi k} p_\lambda x^\lambda + \frac{m^2 c^2}{\chi^2} \frac{k}{e\chi} G_{\lambda\mu} x^\lambda x^\mu p_\rho x^\rho \right\}, \quad \dots \quad (60)$$

so folgt bei Differentiation nach einigen Umrechnungen

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_\lambda} = \frac{d' x^\lambda}{d\tau}; \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x^\lambda} = -\frac{d' p_\lambda}{d\tau} \quad \dots \quad (61)$$

womit die gewünschte doppelte Homogenisierung mit homogenem  $\mathbf{H}$  erreicht ist.

Es ist zu beachten, dass  $\mathbf{H}$  nicht verschwindet und statt dessen die aus (58) und (60) folgende Gleichung

$$\mathbf{H} = mc \quad \dots \quad (62)$$

gilt.

**Chemistry. — The Exact Measurement of the Specific Heats of Metals at High Temperatures. XXVIII. The Heat-Capacity and the Electrical Resistance of Didymium between 300° and 600° C.** By F. M. JAEGER, J. A. BOTTEMA and E. ROSENBOHM.

(Communicated at the meeting of May 29, 1937.)

§ 1. In the course of the determination of the heat-capacity curves of *didymium*, the rather sharp melting-point of the latter was found to be 678° C. From the RÖNTGEN-spectrogram the apparent "molecular weight" of *didymium* could, by direct comparison with the dimensions of the elementary cell of pure *praseo-* and *neodymium*<sup>1)</sup>, not be estimated with sufficient accuracy so as to establish in this way the exact composition of the mixture of the two metals, because of the too small differences between the parameters of the latter. The mean composition of *didymium*, as given in the literature, is nearly always: 1 at. of *praseodymium* and 2 at. of *neodymium*<sup>2)</sup>. As the melting-points of *praseodymium*: 940° C. and of *neodymium*: 840° C. are known, the melting-point curve of the binary system evidently has a *minimum* at or about at 678° C., — this minimum being situated more closely to the side of the lower melting *neodymium*, as beforehand could have been expected. The other possibility: that of the occurrence of an "eutectic" temperature, is most improbable, as the two very similar metals certainly form an *uninterrupted* series of mixed crystals. In connection with the fact that the two components themselves have several transition-points, we will afterwards still return to the question as to the exact form of the diagram of this binary system.

§ 2. *The Heat-capacity curves of Didymium.* By means of SALADIN-LE CHATELIER's method, the heat-capacity of *didymium* at different temperatures was compared with that of copper. The curve obtained is

<sup>1)</sup> The  $\beta$ -modifications of both *praseodymium* and *neodymium* are hexagonal with:  $a_0 = 3.657 \pm 0.010$  Å.U.,  $c_0 = 5,924 \pm 0.020$  Å.U. and  $a_0 = 3,657 \pm 0.007$  Å.U.,  $c_0 = 5,880 \pm 0.020$  Å.U. respectively; the elementary cell contains 2 atoms. The densities of the two metals at 18° C. are 6,770 and 6,984 respectively. Cf.: M. C. NEUBURGER, *Die Allotropie der Chemischen Elemente*, Stuttgart, (1936), 45, 46, where all references about the literature are given. For the *didymium* investigated, Dr. BEINTEMA even found slightly greater parameters for the elementary cell:  $a_0 = 3,683$  Å.U.  $\pm 0.007$  and  $c_0 = 5,929$  Å.U.  $\pm 0.012$ . No certain conclusions could, therefore, be drawn from these data. According to F. TROMBE (Compt. rend. Paris, 198, (1934), 1592) *neodymium* also manifests a magnetic transition-point at —164° C.; for this reason the hexagonal form is here discerned as the  $\beta$ -modification, in agreement with the case of cerium and lanthanum, and the cubic modification is indicated as the  $\gamma$ -form. Most probably *praseodymium* shows the same sequence of allotropic modifications, as certainly the  $\beta$ - and  $\gamma$ -forms are already actually observed.

<sup>2)</sup> W. MUTHMANN and L. STÜTZEL, Ber. d. d. Chem. Ges., 32, (1899), 2676.

represented in Fig. 1. From this figure it is seen that between  $560^{\circ}$  and

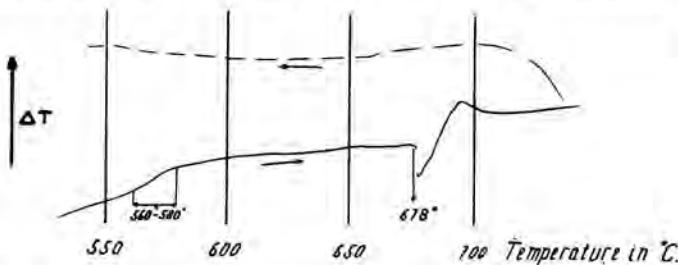


Fig. 1. *Differential heat-capacity curve of Didymium compared with Copper.*

$580^{\circ}$  C. evidently a new state of the metal ( $\delta$ ) makes its appearance, perhaps corresponding to the analogous transformation  $\gamma \rightleftarrows \delta$ , which also is observed in the case of pure *neodymium* between  $694^{\circ}$  and  $713^{\circ}$  C. The shift of the transition-interval towards lower temperatures here observed is in agreement with the fact that, in the case of the formation of solid solutions, the transition-points of one or both components of a binary system are always changed, — either in positive or negative direction, — by the admixture of the other component and to an extent depending on the momentary concentration of the binary mixture. As we shall see, the field of existence of the mixed crystals in the  $\delta$ -state is situated above  $567^{\circ}$  C.

§ 3. These facts are still more clearly illustrated by the study of the change of the electrical resistance of *didymium* with the temperature. For this purpose an U-shaped piece of the metal was prepared from a disc cut from a massive lump of the metal at our disposal (99 % *Di*; traces of *iron*, *magnesium*, *aluminium* and *silicon*). The terminals of this flat piece of metal had a length of about 50 mm.; the almost quadratic cross-section measured  $2 \times 2$  mm. The two terminals were perforated and two thick *copper* wires of 3 mm. diameter fixed to them by clinching. The apparatus used was the same as previously described in the case of *titanium*. As the resistance of the metal at  $20^{\circ}$  C. proved to be only 0,00710 Ohm, the change of the resistance of the *copper* wires with the temperature could not be neglected in these measurements and had, therefore, afterwards to be determined by separate measurements between  $20^{\circ}$  and  $1000^{\circ}$  C. The latter resistances were found to be: 0,01930 Ohm at  $100^{\circ}$  C.; 0,02106 Ohm at  $500^{\circ}$  and 0,02344 Ohm at  $1000^{\circ}$  C. The change of the electrical resistance of *copper* with the temperature proved, therefore, to be perfectly linear. The current in the WHEATSTONE-bridge and the sensitivity of the vertically recording galvanometer were arranged in such a way, that a difference in the resistance of 0,010 Ohm proved to correspond to a deviation of 100 mm. on the photographic plate; thus a variation of 0,0001 Ohm could be measured with perfect certainty and 0,00001 Ohm could be estimated with a fair degree of accuracy, — as was corroborated

by a series of measurements with copper between 20° and 1000° C., under repeatedly reversing of the bridge-current. Carefully calibrated resistances of comparison of 0.0200 and of 0.0400 Ohm, made of copper wires of suitable diameters, were used in these experiments as standards. The results obtained in this way are collected in the following table and are graphically represented in Fig. 2.

TABLE I.  
Change of the Electrical Resistance of Didymium with the Temperature  
between 20° and 600° C.

Temperature in ° Cent.:	Resistance in Ohms:	Temperature in ° Cent.:	Resistance in Ohms:
20	0.00710	500	0.01007
100	0.00763	508	0.01008*
150	0.00795	520	0.00988 (min.)
200	0.00825	550	0.00982
250	0.00863	577	0.00995
300	0.00894	600	0.01009
350	0.00932		
400	0.00951		
450	0.00981		

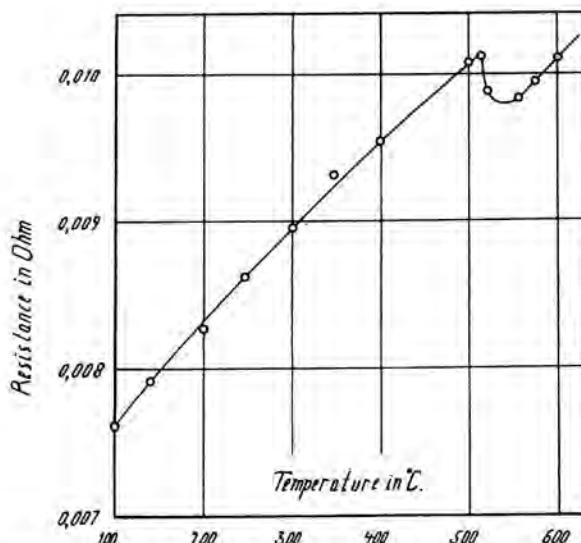


Fig. 2. The Dependency of the Electrical Resistance of Didymium on the Temperature between 20° and 600° C.

From these data and Fig. 2 it may be concluded that there is a transformation  $\gamma \rightleftharpoons \delta$  apparently beginning at about  $508^\circ$  C. and being completed at about  $540^\circ$  C., where a rather deep *minimum* in the curve occurs. The inclination of the curve above  $550^\circ$  C. seems to be about the same as between  $400^\circ$  and  $508^\circ$  C. As we soon shall see from the results of the calorimetical measurements, the transition truly seems to occur in the interval of  $550^\circ$ — $567^\circ$  C.

§ 4. *The Calorimetical Measurements.* The determination of the specific heats of *didymium* presented many difficulties, because of the persistent retardation-phenomena manifesting themselves. We only could finally get rid of them after a very great number of heatings at higher temperatures and subsequent coolings and then preserving the sample at ordinary temperatures during several weeks. The metal was enclosed within a platinum vacuum crucible of the usual shape. The data obtained are collected in table II and the graphical representation is given in Fig. 3.

In connection with these data (see Fig. 3) the following remarks can be made: the weight of the massive block of *didymium* was 16,6132 grammes, that of the *platinum* used 28,5355 grammes; the accuracy of the measurements was about 0.2 %. As long as the sample is not completely "stabilized", — which only occurs after *very numerous* heatings and after the metal has subsequently been preserved during several weeks, — the data of  $\bar{c}_p$  show irreproducible and strongly scattered values, whilst also the time  $\tau$  in which the total amount of heat of the sample is given off to the calorimeter-block proves to be variable within wide limits. There can be no doubt about the fact that all the experiments, Nos. 1—56, relate to *non-stabilized* inner conditions of the metal: the dotted curves, — all situated above that corresponding to the finally reached *stabilized* state, — *in general* show the trend more and more to approach on subsequent heatings and coolings to the lowest, fully-drawn curve *FBCDE*, exactly as previously was observed with *zirconium* on heating and cooling its single crystals<sup>1)</sup>. The complex of scattered points, moreover, clearly allows a subdivision into *three* separate fields, thus beforehand indicating the presence of discontinuities in the vicinity of *L*, *Q* and *X* and of *Y* at about  $435^\circ$ — $440^\circ$  C. to  $470^\circ$  C. and at  $565^\circ$  C. respectively. Indeed, in the finally reached stable condition of the metal, the said transitions (*BC*) and *D* were determined more exactly to occur at  $442^\circ$ — $467^\circ$  (interval) and  $567^\circ$  C. respectively. The scattering of the data concerning the non-stabilized states is most conspicuous in the temperature-intervals *LQXRS* ( $430^\circ$  to  $515^\circ$  C.) and *YWE* ( $565^\circ$  to  $590^\circ$  C.), i.e. immediately after having passed the two transition-temperatures mentioned; moreover, the occurrence of a maximum *R* in one of the curves relating to those metastable conditions

<sup>1)</sup> F. M. JAEGER and W. A. VEENSTRA, Rec. d. Trav. d. Chim. d. Pays-Bas, **53**, (1934), 922.

TABLE II.  
The mean Specific Heats  $\bar{c}_p$  of Didymium between 20° and 600° C.

Sequence-number of the Experi- ments:	Tempe- rature $t$ in °Cent.:	Final tem- perature $t'$ of the Calori- meter:	Increase of the tempera- ture $\Delta t$ in $\mu V$ :	Quantity of Heat $Q$ de- livered be- tween $t^{\circ}$ and $t'$ by 1 Gr. of the substance in Calories:	Quantity of Heat $Q_{20}$ given off between $t^{\circ}$ and 20° C. by 1 Gr. of the substance in Calories:	Time $\tau$ in Minutes, ne- cessary for reaching the maximum Calorimeter temp.:	Mean Specific Heats $\bar{c}_p$ between $t^{\circ}$ and $t'$ in Calories:
1	323.63	20.96	718.0	17.67	(Here only the values of $Q_{20}$ are mentioned, which are used in the calculation of $\bar{c}_p$ ).	6	0.05839
2	352.17	20.89	792.3	19.59		6	0.05913
3	382.57	20.89	870.1	21.56		6	0.05961
4	422.4	20.90	970.1	24.04		6	0.05986
5	454.06	21.04	1061.5	26.60		20	0.06143
6	481.15	21.14	1149.2	29.23		10	0.06354
7	441.80	20.80	1020.2	25.32		20	0.06014
8	433.07	20.93	1004.5	25.08		15	0.06085
9	441.30	21.00	1017.1	25.21		20	0.05998
10	434.25	21.28	1008.9	25.24		20	0.06113
11	438.66	21.52	1019.4	25.50		19	0.06113
12	437.30	21.20	1013.1	25.26		19	0.06070
13	468.20	20.96	1117.2	28.45		10	0.06361
14	468.10	21.28	1123.0	28.75		10	0.06434
15	467.9	21.20	1112.4	28.24		9	0.06323
16	454.90	20.80	1068.9	26.90		20	0.06197
17	454.50	21.10	1067.6	26.87		19	0.06200
18	405.30	21.00	935.2	23.37		20	0.06082
19	367.20	21.20	835.0	20.79		17	0.06009
20	520.70	21.10	1273.4	32.88		2 $\frac{1}{2}$	0.06581
21	455.10	21.40	1073.1	27.12		2 $\frac{1}{2}$	0.06252
22	351.40	20.95	798.8	19.95		4	0.06037
23	382.90	21.20	884.6	22.26		4 $\frac{1}{2}$	0.06154
24	382.90	20.90	876.0	21.83		5	0.06029
25	426.10	21.20	983.2	24.47		5	0.06043
26	425.70	20.95	981.9	24.41		5	0.06032
27	542.10	21.10	1335.3	34.59		1	0.06639
28	491.50	21.40	1193.8	30.78		1 $\frac{1}{2}$	0.06548
29	475.36	21.11	1131.3	28.71		1 $\frac{1}{2}$	0.06319
30	486.8	21.40	1173.2	30.07		1 $\frac{1}{2}$	0.06462
31	488.80	21.10	1174.5	30.00		1 $\frac{1}{2}$	0.06414
32	486.80	20.90	1169.2	29.85		1	0.06407
33	492.20	20.80	1188.0	30.43		1 $\frac{1}{2}$	0.06456
34	495.20	20.70	1193.1	30.49		1	0.06425
35	500.05	21.21	1207.4	30.92		1 $\frac{1}{2}$	0.06458
36	570.54	21.04	1421.1	37.00		1 $\frac{1}{2}$	0.06733
37	505.10	20.90	1220.6	31.24		1	0.06452

TABLE II. (Continued).  
The mean Specific Heats  $\bar{c}_p$  of Didymium between 20° and 600° C.

Sequence-number of the Experiments:	Temper-ature $t$ in °Cent.:	Final tem-perature $t'$ of the Calori-meter:	Increase of the tempera-ture $\Delta t$ in $\mu V$ :	Quantity of Heat $Q$ de-livered be-tween $t^{\circ}$ and $t'$ by 1 Gr. of the substance in Calories:	Quantity of Heat $Q_{20}$ given off between $t^{\circ}$ and 20° C. by 1 Gr. of the substance in Calories:	Time $\tau$ in Minutes, ne-cessary for reaching the maximum Calorimeter temp.:	Mean Specific Heats $\bar{c}_p$ between $t^{\circ}$ and $t'$ in Calories:
38	591.00	21.30	1496.5	39.42	—	1	0.06919
39	492.5	21.00	1179.7	30.02	—	1	0.06368
40	492.34	20.74	1180.7	30.07	—	1	0.06376
41	585.30	20.95	1477.8	38.84	—	1	0.06883
42	557.07	21.01	1379.2	35.80	—	1	0.06678
43	580.08	21.05	1458.6	38.25	—	1	0.06842
44	575.27	21.05	1441.9	37.73	—	1	0.06808
45	570.25	21.05	1422.5	37.09	—	1	0.06753
46	572.4	21.20	1431.0	37.37	—	1	0.06780
47	567.7	21.10	1412.9	36.78	—	1	0.06729
48	564.93	21.05	1403.2	36.48	—	1	0.06707
49	510.63	20.96	1233.6	31.54	—	1	0.06440
50	515.28	20.94	1245.0	31.81	—	1	0.06434
51	512.61	21.14	1236.5	31.57	—	1	0.06423
52	525.1	21.00	1272.9	32.57	—	1	0.06461
53	540.17	20.99	1315.9	33.75	—	1	0.06500
54	559.95	20.99	1394.2	36.35	—	1½	0.06743
55	582.54	20.96	1457.0	38.01	—	1	0.06769
56	592.3	21.00	1499.5	39.47	—	1	0.06909
57	582.47	21.06	1459.5	38.14	—	1	0.06793
58	351.76	20.79	793.7	19.68	19.72	1½	0.05945
59	408.7	20.7	934.3	23.11	23.16	1½	0.05957
60	433.0	20.80	995.0	24.61	24.66	1½	0.05970
61	457.7	20.80	1063.2	26.46	—	1½	0.06055
62	480.0	20.80	1017.2	28.66	28.71	1	0.06242
63	385.16	20.69	876.8	21.72	21.77	1½	0.05960
64	448.00	20.74	1034.0	25.62	—	1½	0.05995
65	492.5	20.80	1171.9	29.64	29.69	1½	0.06283
66	510.36	21.06	1223.7	31.07	31.14	1½	0.06350
67	540.0	21.00	1310.8	33.51	33.57	1½	0.06457
68	560.0	21.0	1371.8	35.26	35.32	1½	0.06541
69	572.57	20.97	1416.9	36.67	—	1½	0.06649
70	467.75	20.80	1101.5	27.71	—	1½	0.06198
71	452.9	20.80	1049.6	26.08	—	1½	0.06036
72	462.2	20.80	1079.2	26.95	—	2	0.06107
73	321.4	20.60	718.0	17.78	—	2	0.05909

and its subsequent disappearance on further heating, is completely analogous to what was previously observed by us in the case of zirconium. As to the separate measurements, attention must be drawn to the following facts. From figure 3 it appears that the points 1—4 initially obtained are situated upon a regular curve  $P F Q$ ; the time  $\tau$  in these experiments never

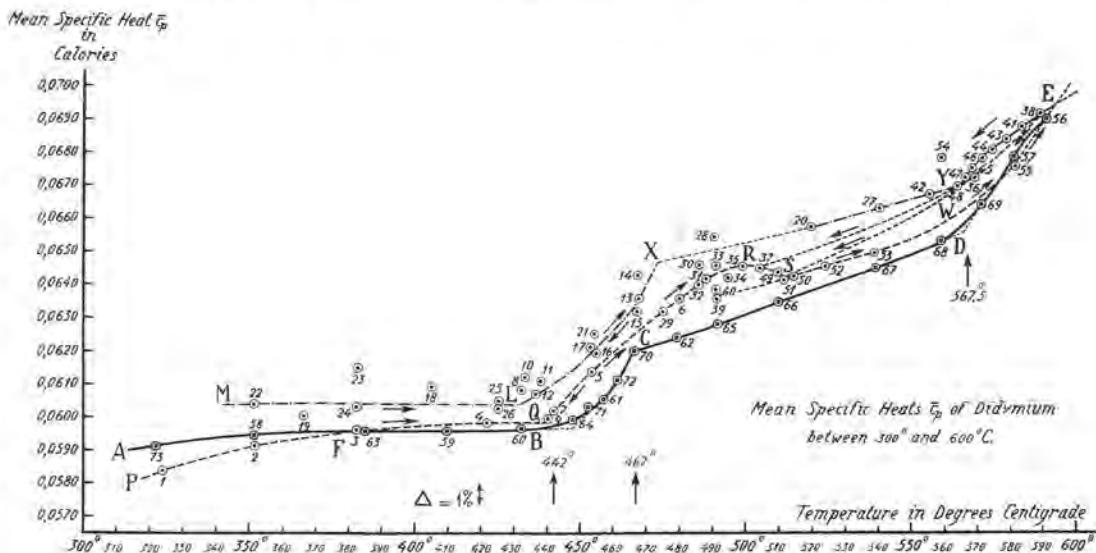


Fig. 3. The Mean Specific Heats of Didymium between  $300^\circ$  and  $600^\circ$  C.

exceeded 6 minutes. At about  $440^\circ$  (Q) evidently a thorough change of the inner state of the metal sets in, as is illustrated not only by the sudden change in the inclination of the curve 5—7 with respect to  $P F$ , but also by  $\tau$  now having been changed from 6 to no less than 15—20 minutes. This time  $\tau$  subsequently shows the trend to augment to 20 minutes maximally. Endeavouring to fix the transition-point Q more accurately, we thus found that point 7 was equally situated on the curve; therefore, now the measurements were continued at temperatures below  $440^\circ$  C. The points 8, 10, 11 and 12, however, all proved to be situated about 2 % higher than was expected, whilst  $\tau$  still remained 20 minutes, instead of falling back to the initial value of 6 minutes. After these heatings, therefore, neither the points 8—12, nor 5—7 could any longer be reproduced, — as may be seen from the data 13—17: in the measurements 13—15,  $\tau$  decreased to 10 minutes, but in the experiments 16—19 it again was found to be always 20 minutes. However, as soon as the sample once was heated at  $520^\circ$  C. (N<sup>o</sup>. 20),  $\tau$  suddenly proved to drop to 2.5 minutes, and this small value of the time  $\tau$  remained, — with a tendency slightly to increase, — also in the experiments Nos 21—26, the results of which evidently are scattered in a quite irregular way. We now tried to "stabilize" the inner condition of the metal by heating it at  $545^\circ$  C. (N<sup>o</sup>. 27). Although, as we shall see, also this time no complete stabilization occurred at this

temperature, yet a most curious phenomenon here manifested itself in so far as the time  $\tau$  suddenly appeared to drop to the *extremely low* value of 1 minute. This value is lower than ever was met with before, even in the case of a lump of *silver*, in which  $\tau$  never was less than 2 minutes under the same circumstances, although the thermal conductivity of *Ag* is appreciably greater than that of (*Pt + Di*). This fact once more clearly demonstrates that the speed of heat-delivery to the calorimeter-block depends predominantly upon some still undefined peculiarity of the inner state of the heated metal, much more than upon its thermal conductivity. It corroborates our long-fostered idea that the variations of  $\tau$  are, indeed, a most trustworthy indication of inner changes occurring in the metals studied, as we have already repeatedly emphasized. Most remarkable is the fact that this very small value of  $\tau$  now remained preserved in *all* subsequent experiments, — even in those made at the lower temperatures. However, the scattering of the values of  $c_p$  still present, proves that *no complete* inner stabilization really yet had taken place: the data subsequently obtained: Nos 28—35 are, indeed, still distributed in a quite irregular way. Therefore, the sample was once more heated at still higher temperatures (Nos 36—38); after the latter heating (Nº. 38) the points 38—48 subsequently obtained now proved to be situated on a perfectly smooth curve, but afterwards it was stated that the points 49—54 were not situated on the curve: 20—27—42—48. After heating at 515° C. (Nº. 50), the substance was accidentally left at 18° C. during four weeks: now again some inner transformation proved to have occurred in the metal, for, — although point 51 was located quite near to 49 and 50, — the curve *YE* could *not* be reproduced, the points 52 and 53 now being situated on a curve *W*, which lies appreciably lower. However, after having heated the sample at 590° C. (Nº. 56), the metal suddenly proved to have reached a perfectly *stable* condition: now all points subsequently determined were really found to be quite reproducible and to fit in the fully-drawn curve *FBCE* in Fig. 3, with its typical transition-interval between 440° and 467° C. and its rather sharp transition-point at 567,5° C. These values remained always the same, even after heating at a constant temperature for a very long time. The phenomena described are, most probably, connected with the establishment of equilibria between the different kinds of mixed crystals at their transition-temperatures, which, of course, are always accompanied by changes in their stoichiometrical compositions.

§ 5. The parts of the curve between 340° and 440° C., between 467° and 560° and between 575° and 595° C. may be considered as practically linear; within the first interval mentioned  $\bar{c}_p$  almost imperceptibly changes with the temperature. In the said temperature-intervals the *true* specific and "atomic" heats (apparent atomic weight = 141,9) can, therefore, be calculated with a fair degree of accuracy: between 340° and 440° C.  $c_p$  and  $C_p$  evidently are almost *constant*.

The results obtained are as follows:

1. Between  $340^{\circ}$  and  $440^{\circ}$  C.  $c_p$  can readily be expressed by the formula:

$$c_p = 0.05941 + 0.16 \cdot 10^{-5} \cdot (t - 340), \text{ and } C_p, \text{ therefore, by:}$$

$$C_p = 8.430 + 0.227 \cdot 10^{-3} \cdot (t - 340),$$

so that in this interval  $C_p$  only changes from 8,430 to 8,453 calories.

2. Between  $467^{\circ}$  and  $560^{\circ}$  C.,  $c_p$  may be calculated from:

$$c_p = 0.06200 + 0.366 \cdot 10^{-4} \cdot (t - 467)$$

and  $C_p$ , therefore, from:

$$C_p = 8.798 + 0.5193 \cdot 10^{-2} \cdot (t - 467), \text{ which yields}$$

for  $C_p$  the value: 8,798 at  $467^{\circ}$  C. and 9,281 at  $560^{\circ}$  C.

3. Between  $575^{\circ}$  and  $600^{\circ}$  C.,  $c_p$  can, with a good approximation, readily be represented by:

$$c_p = 0.0665 + 0.14 \cdot 10^{-3} \cdot (t - 575), \text{ and } C_p, \text{ therefore, by:}$$

$$C_p = 9.460 + 0.01986 \cdot (t - 575).$$

Thus for  $575^{\circ}$   $C_p$  has the value: 9,460 and for  $600^{\circ}$  C.: 9,956.

It must, however, be emphasized that during our experiments suspicion arose that the  $c_p$ - $t$ -curve above  $600^{\circ}$  C. probably once more will change its direction, so that the interval of  $575^{\circ}$ — $595^{\circ}$  C. here considered perhaps may have the character of a "transition"-interval. In that case the high "apparent" values of  $C_p$  could readily be explained and no real physical significance could be attributed to them, because they would relate only to quite indetermined inner conditions of the metal within this interval.

Evidently *didymium*, — and the same is true for its components: *praseodymium* and *neodymium*, — shows values of its atomic heats which, even at moderate temperatures, appreciably surpass the theoretical limit of  $3R$  calories. In this respect they behave just like *cerium* and *lanthanum*.

*Groningen, Laboratory for Inorganic and Physical Chemistry of the University.*

---

**Chemistry. — On Pterotactic Derivatives of Bivalent Platinum with Optically-active, Cyclic trans-1-2-Diamines.** By F. M. JAEGER and J. TER BERG.

(Communicated at the meeting of May 29, 1937.)

§ 1. In this paper a series of complex salts of bivalent platinum with racemic and optically active *cyclopentane-trans-1-2-diamines* and *cyclohexane-trans-1-2-diamines* are described, which probably present some structural peculiarities hitherto not met with in such compounds.

For the preparation of these salts of bivalent platinum, 12 grammes of  $K_2PtCl_4$  are dissolved on the water-bath in as little hot water as possible and then 6 grammes of the base are added to the solution. After some moments the red colour of the latter disappears and a heavy, orange-yellowish precipitate is formed; this is the very sparingly soluble compound containing only 1 molecule of the base. When adding to the solution still 3 grammes of the base, the precipitate is, after heating the solution in a closed flask on the water-bath during many hours, finally dissolved to a yellowish coloured liquor. This is filtered and left standing for some time; then the cooled solution is mixed with about 800 cc of alcohol. The salt is slowly precipitated as a white crystalline powder; after 24 hours it is filtered off and recrystallized from as little boiling water as possible. The alcoholic mother-liquor, after being neutralized with  $HCl$ , is evaporated on the water-bath and, besides  $KCl$  and the hydrochloride of the base present in excess, still yields a certain quantity of the impure compound, which can be purified by repeated crystallizations from boiling water. In the reactions with the *optically active* bases only one salt is generated, with a yield about equal to the calculated quantity. The pure salts thus obtained are perfectly colourless; the derivatives of the optically active bases, in general, prove better to crystallize than those obtained from the racemic bases. The latter platinum-compounds originally appear to be deposited as opaque, small spherolithes, which under the microscope appear as aggregates of ten or twelve round-edged individuals without definite forms and only weakly birefracting. Often the rounded lumps have a more flattened, more or less irregularly tabular aspect.

§ 2. On the other hand the salts containing two molecules of the optically-active bases immediately crystallize from their aqueous solutions in the shape of small, lustrous, colourless, apparently quadratic plates. A more detailed study revealed that they are not tetragonal, but truly *rhombic*-

F. M. JAEGER AND J. TER BERG: ON PTEROTACTIC DERIVATIVES OF  
BIVALENT PLATINUM WITH OPTICALLY-ACTIVE, CYCLIC TRANS-1-2-  
DIAMINES.



Fig. 1a. *X-ray Pattern of  $D\text{-}\{\text{Pt (l-Cptn)}_2\}\text{Cl}_2$  perpendicular to  $\{001\}$ ;*  
*(tungsten- $K\text{-}\alpha$ -radiation) 35 K.V.*

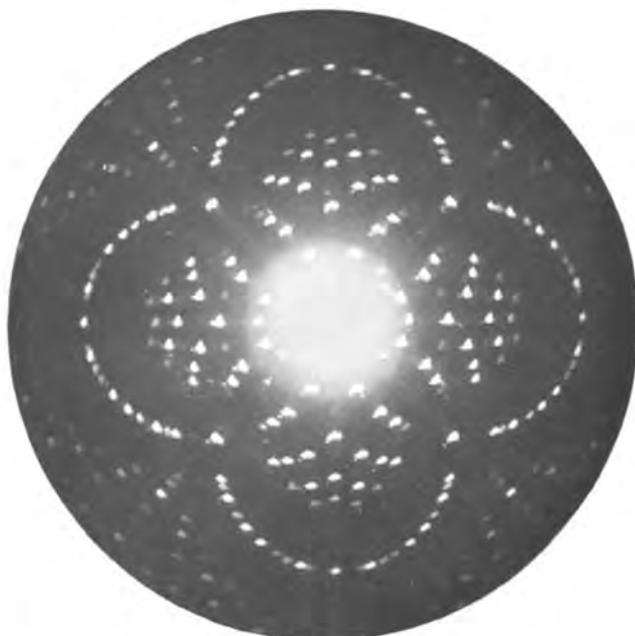


Fig. 1b. *X-ray Pattern of  $D\text{-}\{\text{Pt (l-Chxn)}_2\}\text{Cl}_2$  perpendicular to  $\{001\}$ ;*  
*(tungsten- $K\text{-}\alpha$ -radiation) 35 K.V.*

*bisphenoidal* and *pseudo-tetragonal* to such a degree that their axial ratio:  $a:b$  cannot be distinguished from *unity* and that their deviation from true tetragonal symmetry is, in their LAUE-ray patterns perpendicular to {001}, either not at all, or only manifested by the mere presence or absence of a few diffraction-spots in the zones closely situated round the central spot. The two diffraction-patterns of this kind reproduced in Figs. 1a and 1b of the Plate clearly demonstrate the only small deviations from a perfectly tetragonal symmetry and also the close analogy in the architecture of these crystals, which evidently must be considered as truly *isomorphous*, — as also had already been deduced from the crystallographical measurements. The patterns were obtained with tungsten-radiation (35 Kilovolts); they here appear on the same scale (distance of film to crystal = 5 c.M.). Evidently the first pattern does *not* manifest any observable deviation at all from true tetragonal symmetry.

The salts crystallize in the form of Fig. 2.

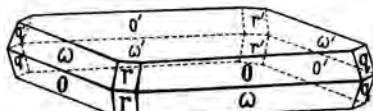


Fig. 2. Crystalform of  $D\text{-}\{Pt(l\text{-}Cptn)_2\}Cl_2$  and of  $D\text{-}\{Pt(l\text{-}Chxn)_2\}Cl_2$ .

$D\text{-}\{Pt(l\text{-}Cptn)_2\}Cl_2$  has the axial ratio:  $a:b:c = 1:1:2,937$ .

The forms observed are:  $c = \{001\}$ , large and lustrous;

$\sigma = \{111\}$  and  $\omega = \{\bar{1}\bar{1}\bar{1}\}$ , narrow, about equally developed;

$r = \{101\}$  and  $q = \{011\}$ , both small, equally developed and well measurable.

#### Angular Values:

$$c:r = (001):(101) = 71^\circ 12'$$

$$c:r = (001):(111) = 76^\circ 28'$$

The crystals are optically biaxial, but  $D\text{-}\{Pt(l\text{-}Cptn)_2\}Cl_2$  is almost uniaxial: the plane of the optical axes is {100}, with the  $c$ -axis as the first bisectrix of positive character. The apparent angle of the axes is very small.

A perfect cleavability occurs parallel to {001}. By means of oscillation-spectrograms, the parameters of the elementary cell were determined to be:  $a_0 = b_0 = 8,10 \text{ \AA.U.}$ ;  $c_0 = 23,5 \text{ \AA.U.}$  The cell contains 4 times the molecular mass; the specific gravity of the crystals is: 2,061.

$D\text{-}\{Pt(l\text{-}Chxn)_2\}Cl_2$  has the axial ratio:  $a:b:c = 1:1:3,163$ , with the same limiting faces as the former salt. The angular values are:  $(001):(111) = 77^\circ 24'$  and  $(001):(1\bar{1}\bar{1}) = 87^\circ 16\frac{1}{2}'$ . The plane of the optical axes is {100}; the angle of the axes is small, but greater than in the first case. The  $c$ -axis is the first bisectrix; the double-refraction is positive, the

dispersion of rhombic character:  $\varrho < \nu$ . The crystals are perfectly cleavable parallel to {001}.

From X-ray spectrograms round the principal axes, the parameters of the elementary cell, which contains 4 molecules of the salt, were calculated to be:  $a_0 = b_0 = 8.10 \text{ \AA.U.}$ ;  $c_0 = 25.2 \text{ \AA.U.}$  The density is: 1.952.

§ 3. In solution the two salts are strongly *dextrogyratory* for all wavelengths between 4200 and 7000 Å.U.; i.e. their rotation is *opposite* to that of the bases present in their complex ions.

The molecular rotations  $[M] \cdot 10^{-2}$  of these salts, together with those of the free bases of *opposite* rotation<sup>1)</sup>, are graphically represented in Fig. 3.

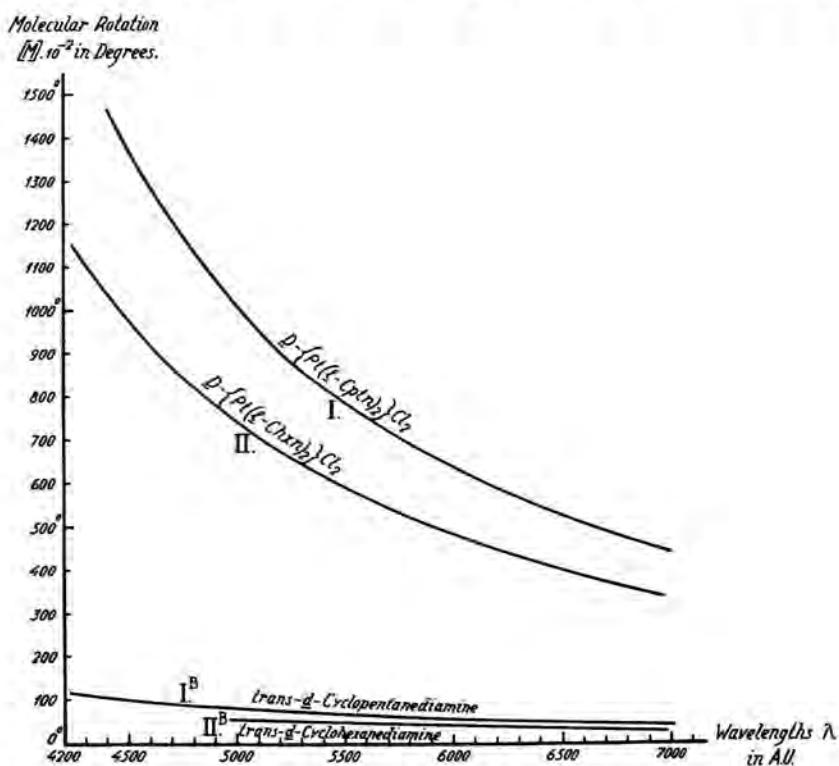


Fig. 3. The Molecular Rotations  $[M] \cdot 10^{-2}$  of  $D\text{-}\{\text{Pt}(\text{l-Cptn})_2\}\text{Cl}_2$  and  $D\text{-}\{\text{Pt}(\text{l-Chxn})_2\}\text{Cl}_2$  and of *d*-Cyclopentane- and *d*-Cyclohexane-diamines.

§ 4. From these data it at once becomes clear that the rotation of these salts is not only opposite to that of the bases contained in them, but that this opposite rotation is also *appreciably* greater than that of the free diamines themselves; their rotatory influence in the complex ion appears at different wavelengths to be enlarged in a ratio of at least about 13 to 15

1) F. M. JAEGER and L. BIJKERK, these Proceed., 40, 12, 22, (1937); F. M. JAEGER and H. B. BLUMENDAL, Zeits. f. anorg. Chemie, 175, 168, 169, (1928).

Rotatory Dispersion of Di-*I*-Cyclopentanediamine- and of Di-*I*-Cyclohexanediamine-  
 Plato-Chlorides in Aqueous Solution.

Wavelength <i>λ</i> in A.U.:	Specific Rotation [α] of <i>D</i> -{ <i>Pt</i> ( <i>I</i> - <i>Cptn</i> ) <sub>2</sub> } <i>Cl</i> <sub>2</sub> :	Molecular Rotation [M].10 <sup>-2</sup> of <i>D</i> -{ <i>Pt</i> ( <i>I</i> - <i>Cptn</i> ) <sub>2</sub> } <i>Cl</i> <sub>2</sub> :	Specific Rotation [α] of <i>D</i> -{ <i>Pt</i> ( <i>I</i> - <i>Chxn</i> ) <sub>2</sub> } <i>Cl</i> <sub>2</sub> :	Molecular Rotation [M].10 <sup>-2</sup> of <i>D</i> -{ <i>Pt</i> ( <i>I</i> - <i>Chxn</i> ) <sub>2</sub> } <i>Cl</i> <sub>2</sub> :
6980	+88.3	+443	+68.3	+337
6730	97.7	490	75.3	372
6480	107.0	532	82.4	407
6262	115.0	577	89.3	441
6074	124.0	622	95.8	473
5893	133.6	667	102.1	504
5735	142.1	712	109.1	539
5592	150.3	757	115.9	573
5463	159.8	802	122.8	607
5340	169.4	850	129.2	638
5224	179.6	899	135.9	671
5126	189.0	948	142.6	705
5036	199.2	996	149.2	737
4950	208.7	1045	155.7	769
4862	218.3	1094	161.6	798
4793	227.8	1142	167.7	828
4724	236.4	1188	173.7	858
4658	245.9	1232	181.3	896
4596	254.9	1280	186.9	923
4537	264.4	1328	193.3	955
4483	276.1	1377	200.1	988
4430	283.4	1426	205.9	1017
4380	—	—	212.3	1048
4335	—	—	216.7	1070
4290	—	—	223.3	1103
4248	—	—	232.4	1148

The salts: *L*-{*Pt*(*d*-*Cptn*)<sub>2</sub>} *Cl*<sub>2</sub> and *L*-{*Pt*(*d*-*Chxn*)<sub>2</sub>} *Cl*<sub>2</sub> show the same rotations,  
 but with opposite algebraic signs.

times by the linkage of these bases into the atomic cycles including the central *platinum* atom.

Now the two bases are *trans*-substitution-products, as is proved by their resolvability into optical antipodes: this means that the two  $NH_2$ -groups are situated at *opposite* sides of the mean plane of the carbon-rings. In the case of the *cyclohexanediamine* with its *puckered* carbon-cycle, there are at least two ways in which the molecule can be attached to the central atom; but *cyclopentanediamine*, having a *flat* carbon-cycle, can only be linked to it in a single way. Even if the four valencies of the bivalent *platinum*-atom, according to WERNER's original hypothesis, are supposed to be situated *in the same plane*, — the two molecules of the *cyclopentanediamine* must be inserted into the complex ion in an *oblique* position, twisted with respect to each other like the wings of a stirrer or propeller; and the ion as such will thus have a single binary axis of symmetry perpendicular to the plane of the four valencies of the *platinum*-atom and two binary axes in that plane, bisecting the right angles between those four *Pt*-valencies. This is exactly the symmetry of the rhombic-bisphenoidal class.

The special way of linkage here described of the two cyclic systems to the central metallic atom, may be indicated as a *pterotactic*<sup>1)</sup> one and has to be distinguished from the "spiran" like structures, as observed in carbon-compounds. Such a pterotactic arrangement lowers the degree of symmetry of the complex ion in such a way that all planes of symmetry necessarily must disappear and the whole architecture only can preserve an *axial* symmetry. This axial symmetry is in full agreement with the strong optical activity exhibited by the ion and with the *exclusive* generation of only a single, optically active compound in the evidently "dissymmetrical" reaction between  $K_2PtCl_4$  and the dextro- or levogyratory bases used. Taking into account the fact of the complete analogy, of the crystal forms of the *dicyclopentanediamine*- and *dicyclohexanediamine-plato*-derivatives as well as of their *X-ray* patterns, — it is evident that the two kinds of complex salts also possess *the same* structural character of their cations; i.e. it can be considered as certain that the way of insertion of the two cyclic bases into each of those complex ions has occurred in exactly the same way. Thus the *dicyclohexanediamine-plato-chloride* also must be considered to be a typical "pterotactic" compound and its rotatory properties are, therefore, quite analogous to those of the *dicyclopentanediamine* salt previously dealt with.

§ 5. The salts of this pterotactic type:  $D\{-Pt(l\text{-Base})_2\}Cl_2$  and  $L\{-Pt(d\text{-Base})_2\}Cl_2$ , if combined in equimolar quantities, will yield a *racemic* compound of the constitution:

$[D\{-Pt(l\text{-Base})_2\}Cl_2 + L\{-Pt(d\text{-Base})_2\}Cl_2]$ ; this true racemate will, of course, by appropriate means, be resolvable into its optical antipodes.

<sup>1)</sup> From: *pteron* = wing and *tattein* = arrange.

By means of X-ray experiments it could, moreover, be proved beyond any doubt that this "racemate" and the optically *inactive* product, which was obtained by the direct interaction between  $K_2PtCl_4$  and the *racemic* base, are indeed rigorously *identical*. These racemates obtained from the *inactive cyclohexane-* and the *cyclopentanediamines*, — just like the optically active salts of the two bases with respect to each other, — also proved to be quite isomorphous.

Their *d-tartrates* could be obtained as crystalline products which, however, hitherto could not be separated into fractions of different solubility and specific rotation, so as to lead to a direct fission into their antipodes.

The *d-tartrate* obtained is very soluble; but on slow evaporation of the solution it readily crystallizes. Small, opaque crystals, which soon loose their water of crystallization.

*Monoclinic-sphenoïdal.*

$$a : b : c = 0.688 : 1 : 1.528;$$

$$\beta = 46^\circ 12'.$$

*Forms observed:*  $m = \{110\}$  and  $p = \{1\bar{1}0\}$ , also  $c = \{001\}$ , about equally large;  $q = \{011\}$  and  $r' = \{\bar{1}01\}$  well developed;  $\omega' = \{\bar{1}11\}$ , smaller than  $q$ ;  $t = \{0\bar{1}1\}$ , often absent or small;  $s' = \{\bar{1}03\}$ , small;  $x' = \{\bar{1}\bar{1}3\}$ , somewhat larger than  $s'$ ;  $o = \{\bar{1}\bar{1}\bar{1}\}$ , mostly absent, small. (Fig. 4).

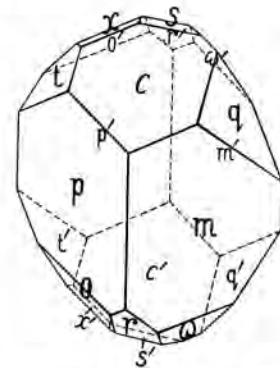


Fig. 4. Crystalform of  $\{Pt(r. Chxn)_2\}d-C_4H_4O_6 + \frac{1}{2}H_2O$

<i>Angular Values:</i>	<i>Observed:</i>	<i>Calculated:</i>
$c : s' = (001) : (\bar{1}03) = *47^\circ 38'$		—
$s' : r' = (\bar{1}03) : (\bar{1}01) = *60^\circ 54'$		—
$m : p = (110) : (1\bar{1}0) = *52^\circ 50'$		—
$m : c = (110) : (001) = 51^\circ 32'$		$51^\circ 18'$
$m : s' = (110) : (\bar{1}03) = 93^\circ 50'$		$93^\circ 26'$
$s' : x' = (\bar{1}03) : (\bar{1}\bar{1}3) = 26^\circ 55'$		$26^\circ 57'$
$c : q = (001) : (011) = 47^\circ 24'$		$47^\circ 48'$
$c : \omega' = (001) : (\bar{1}11) = 105^\circ 22'$		$105^\circ 26'$
$r' : o' = (\bar{1}01) : (\bar{1}\bar{1}\bar{1}) = 33^\circ 0'$		$33^\circ 7'$

The angular values oscillate considerably, often about  $0^\circ 5$ . No distinct cleavability was observed.

§ 6. However, still another optically *inactive* compound has, — from the theoretical point of view, — to be expected, in which one molecule of the *dextro-* and one molecule of the *levogyrotatory* base simultaneously may be

present: then the planes of the two pterotactically linked molecules necessarily would be *equally* inclined and directed with respect to the plane of the four *Pt*-valencies and, therefore, this time within the complex ions will be inclined in *the same* sense. This ion thus should possess a plane of symmetry  $\Sigma$  perpendicular to the plane of the four *Pt*-valencies and, therefore, it could by no means ever be resolved into optically active components. The new inactive salt in this respect thus would completely behave like *meso*- (or *anti*-) *tartaric acid* in comparison to the resolvable *racemic acid*. One could expect that perhaps it might be generated, if the *racemic* bases were made to react with  $K_2PtCl_4$ , — at least when it is supposed that there is no particular reason of stability, which presumably would exclude the possibility of simultaneous introduction of a dextro- and a levogyratory molecule into one and the same complex ion, — as such a hindrance certainly was stated by us<sup>1)</sup> to exist in the case of the *tri-diamino-cobaltic* salts of the optically active diamines under consideration. In the latter case such kind of "mixed" ions, — if generated at all, — proved in solution always to be decomposed into a mixture of the corresponding salts containing three molecules of only the bases with *the same* direction of rotation. In this case the resolvable *inactive* compounds could be demonstrated also to be built up from the *D*- and *L*-antipodes when combined in equal number of molecules. As, however, at least in principle, there is *no* such opposite tendency to a simultaneous introduction of two molecules of oppositely rotating bases into the same complex ion present, — we must conclude that, in the case of the pterotactical linkage of such diamines, the possible existence of *four* isomerides must be taken into account: namely the *D*- and *L*-salts already described, the resolvable *racemate* of the latter und the *unresolvable meso*-form just mentioned.

Because the inactive reaction-product of the racemic base with  $K_2PtCl_4$  proved to be identical with the true racemate generated by mixing equimolar quantities of the *D*- and *L*-compounds, evidently there was no chance of catching this expected *meso*-form in the two ways described.

§ 7. The only way still possible for trying the preparation of  $\left\{ Pt \begin{pmatrix} d\text{-}Chxn \\ l\text{-}Chxn \end{pmatrix} \right\} Cl_2$  was heating  $K_2PtCl_4$  with half the calculated quantity of *d-cyclohexanediamine* and separating this product from the reaction-mixture, then subsequently heating this purified product with exactly the calculated quantity of *l-cyclohexanediamine* in aqueous solution and precipitating the product now generated by means of an excess of absolute alcohol. Thus a white, crystalline salt was obtained, which was recrystallized from as little water of  $80^\circ C.$  as possible, by slow evaporation of the saturated solution at room-temperature. First crystallized the typical

<sup>1)</sup> F. M. JAEGER and L. BIJKERK, these Proceed., **40**, 256, 325, (1937).

spherolithes and flat, rounded aggregations already described, which evidently represented the anhydrous racemic salt previously mentioned: its identity with the racemate, as well as with the  $\{Pt(rac.\text{Chxn})_2\}Cl_2$  obtained from the racemic base, was, moreover, demonstrated by means of its X-ray spectrogram. After some days another colourless salt started to crystallize from the mother-liquor in small, parallelogram-shaped tables and in well-developed thicker crystals. They were separated from the solution and found to be optically inactive in solution. On analysis they proved to yield:

$Pt: 32.76-32.80\%$ ;  $N: 9.52-9.62\%$ ;  $H_2O: 17.82\%$ ;  $Cl: 11.73\%$ .

Evidently, the composition of this salt is:  $\{Pt(rac.\text{Chxn}_2\}Cl_2 + 6H_2O$ ; calculated: 32.42 %  $Pt$ ; 9.30 %  $N$ ; 17.94 %  $H_2O$  and 11.79 %. In solution it does not manifest any optical rotation.

The compound, on measurement with the theodolite-goniometer, proved to be *triclinic-pinacoidal*.

The compound crystallizes in small colourless and lustrous crystals which usually are tabular parallel to {001}.

*Triclinic-pinacoidal.*

$$a:b:c = 0.891 : 1 : 0.987.$$

$$A = 84^\circ 48' \quad ; \quad a = 98^\circ 26'$$

$$B = 77^\circ 15' \quad ; \quad \beta = 104^\circ 21'$$

$$C = 102^\circ 42' \quad ; \quad \gamma = 75^\circ 41'$$

*Forms observed:*

$$a = \{100\}; b = \{010\}; c = \{001\}, \quad \text{Rac. } \{Pt(\text{Chxn})_2\}Cl_2 + 6H_2O.$$

the latter form often predominant, so that the crystals are parallelogram-shaped;  $r = \{101\}$ ;  $s = \{101\}$ ;  $q = \{011\}$ ;  $t = \{011\}$ ;  $m = \{110\}$ ;  $M = \{\bar{1}10\}$ ; all about equally broad.

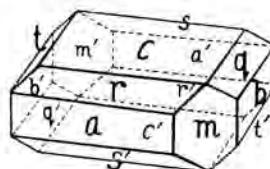


Fig. 5.

<i>Angular Values:</i>	<i>Observed:</i>	<i>Calculated:</i>
$b:m = (010):(110) = *56^\circ 10'$	—	—
$m:a = (110):(100) = *46^\circ 32'$	—	—
$a:c = (100):(001) = *77^\circ 15'$	—	—
$c:b = (001):(010) = *84^\circ 48'$	—	—
$b':t = (0\bar{1}0):(0\bar{1}1) = *47^\circ 59'$	—	—
$a:M = (100):(1\bar{1}0) = 35^\circ 34'$	$35^\circ 34'$	—
$a:r = (100):(101) = 35^\circ 43'$	$35^\circ 50'$	—
$c:m = (001):(110) = 75^\circ 18'$	$75^\circ 12'$	—
$c:M = (001):(1\bar{1}0) = 84^\circ 31'$	$84^\circ 26'$	—
$c:s = (001):(101) = 55^\circ 52'$	$55^\circ 47'$	—
$b':q = (010):(011) = 42^\circ 40'$	$42^\circ 43'$	—
$b:s = (010):(101) = 75^\circ 24'$	$75^\circ 15'$	—

No distinct cleavability was observed.

On {001} the extinction is oblique: about  $40^{\circ}$ — $42^{\circ}$  with respect to the direction of the *b*-axis; one dark hyperbola is eccentrically visible.

After carefully dehydrating the salt, an X-ray spectrogram was made of the remaining white anhydrous powder: this proved to be *completely identical* with the spectrograms obtained with the two optically inactive salts previously prepared. From this the conclusion must be drawn that, beyond any doubt, the triclinic salt described solely represents an *hexahydrate of the racemic compound* and consequently *is not the meso-salt* here looked for.

Evidently, therefore, also in this case the simultaneous introduction of two molecules of the oppositely rotating bases into the complex ion seems to be impossible under the circumstances mentioned: in solution two molecules of the salt obtained immediately prove to be changed into an equimolecular mixture of the corresponding salts with two dextro- and two levogyratory molecules of the base respectively.

*Physical Chemistry of the University.  
Groningen, Laboratory for Inorganic and*

**Chemistry.—The constitution of toxoflavin. (Provisional communication.)**

By A. G. VAN VEEN and J. K. BAARS.

(Communicated at the meeting of May 29, 1937.)

Some years ago we described the isolation and properties of toxoflavin<sup>1)</sup>, one of the two very violent poisons that can be formed by the action of *Bacterium cocovenenans*. This bacterium, which was discovered by MERTENS and VAN VEEN, is the cause of the well-known bongrek- and semaji-poisonings met with in Java.

Toxoflavin crystallises in yellow needles, melts at  $171^{\circ}$  and gives an intensely yellow-coloured solution in water. The aqueous solution has a neutral reaction and is stable only between pH<sub>3</sub> and pH<sub>8</sub>. By the action of sulphite and other reducing agents, toxoflavin is reduced to a colourless compound; after shaking with air the yellow colour returns. The substance is very stable to bromine, nitric acid, nitrous acid, and other oxidants and possesses no NH<sub>2</sub>- or other reactive groups.

The pharmacological investigation on rabbits was made by DARWIS AMAR and A. GREVENSTUK<sup>2)</sup> who showed that toxoflavin is a violent

<sup>1)</sup> A. G. VAN VEEN and W. K. MERTENS, Proceedings Royal Acad. Amsterdam **36**, 666, (1933); Rec. Trav. Chim. **53**, 257, 398 (1934).

<sup>2)</sup> Geneesk. Tijdschr. v. N. I. **75**, 104 (1935).

heart poison, 0.4 to 0.5 mg. of the substance injected subcutaneously being a fatal dose for a rabbit of 1.5 to 2.0 K<sup>0</sup>. The heart becomes strongly congested with blood and very much resembles the beri-beri heart described by WENCKEBACH.

Struck by its intensive yellow colour, green fluorescence, (which actually in the purest preparations is extremely weak), reversible reducibility, absorption spectrum and stability to various oxidising reagents, we considered at the time that toxoflavin, C<sub>6</sub>H<sub>6</sub>N<sub>4</sub>O<sub>2</sub>, belonged to the lyochromes, a class of substances discovered at about the same time and to which belongs lactoflavin, a component of vitamine-B<sub>2</sub>.

Toxoflavin shows great similarity in properties with lumi-lacto-flavin, the irradiation-product of lactoflavin, and like this substance possesses a substituted alloxan nucleus and a methylimid group, but when treated with baryta does not split off urea.

When it was subsequently shown that lumi-lactoflavin was actually an iso-alloxazine derivative, it was at once clear that toxoflavin, which does not possess a benzene nucleus, could not be regarded as a lower homologue of lumi-lactoflavin.

As the result of a series of experiments, we concluded that toxoflavin (in connection with its property of great reversible reducibility) fulfilled the function of oxygen-conveyor for the bacteria. At the same time we communicated some details on the original toxoflavin-albumen complex. We shall return later to the results obtained by the catalytic reduction of toxoflavin and to the product formed by its reaction with hydrochloric acid.

A welcome contribution to our knowledge of the subject was made as a result of the investigations of K. G. STERN<sup>1)</sup> to whom we had forwarded some material. He investigated the oxidation-reduction potentials of toxoflavin, and found that the normal potential (compared with a normal hydrogen-electrode) at pH<sub>7</sub> amounted to -0.49 volt; toxoflavin forms with its reduction-product between pH<sub>4</sub> and pH<sub>8</sub> a completely reversible system. STERN is also of the opinion that after the complete elucidation of the structure of lumi-lactoflavin, the similarity of this substance with toxoflavin is not so great as appeared to be the case three years ago.

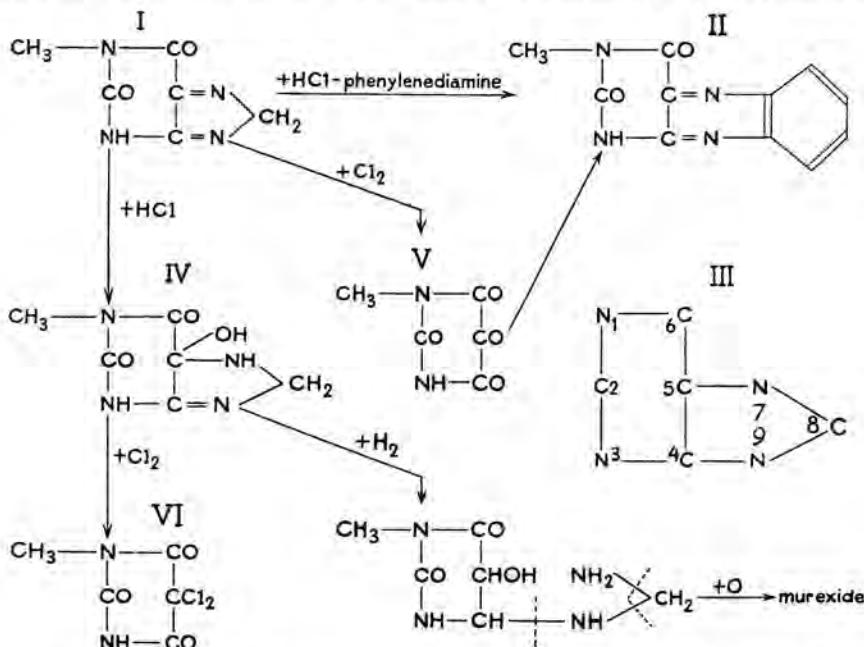
Owing to the small amount of toxoflavin available and to the difficulties of obtaining larger quantities, we have been able to make only slow progress with the investigation of the constitution of this interesting substance.

In our attempts at a systematic degradation of the molecule we were always met by the difficulty, which is not encountered in the case of lactoflavin, that no definite stable grouping, such as a benzene nucleus, is met with in the products. The chief degradation products were always oxalic acid, ammonia, methylamine and mixtures of substances which, owing to the small amounts available and to their tendency to oxidation

<sup>1)</sup> Bioch. J. 21, 500 (1935).

in the air, could not be purified. We were thus forced to limit ourselves to a relatively small number of reactions for the purpose of clearing up the constitution. We found that toxoflavin in many cases reacted quite remarkably. In our previous work (l.c.) we gave the analysis for toxoflavin and also for a substance  $C_6H_8N_4O_3$  obtained from it by the action of hydrochloric acid and to which we gave the name toxoflavin hydrate. This substance is colourless, crystalline and can be sublimed. It is sparingly soluble in almost all solvents and melts at  $250^\circ$ . In our previous publication we also stated that toxoflavin gave the murexide reaction when treated with potassium chlorate and hydrochloric acid (contrary to our previous statement, toxoflavin hydrate also gives this reaction), which led us to the supposition that a close relationship existed to the purines. The small molecular weight of toxoflavin excluded any relationship to the pterins.

In the following we shall briefly summarise the reactions that led us to the structural formula (I) for toxoflavin. When toxoflavin is slowly oxidised at  $50^\circ$  with potassium chlorate and hydrochloric acid, methylalloxan is formed. Analyses were made of the N-methyl-alloxazine, obtained by the condensation of this methylalloxan with ortho-phenylenediamine hydrochloride. Toxoflavin hydrate, in spite of its poor solubility, may also be oxidised in this way but yields (N)-methyl-5,5'-dichloro-barbituric acid which was identified as such and also by its reduction to (N)-methyl-



barbituric acid. Both these reactions show that 5 of the 6 carbon atoms are in the pyrimidine nucleus in which are also the two oxygen atoms of the toxoflavin molecule. For, according to E. FISCHER<sup>1)</sup>, purine derivatives

<sup>1)</sup> Untersuchungen in der Puringruppe (1882—1906), Berlin, 1907.

with a methine group in the pyrimidine ring, such as hypoxanthine, when oxidised do not give a murexide reaction, or if at all, only with difficulty.

This conclusion was further established by a very remarkable reaction. When concentrated aqueous solutions of toxoflavin and o-phenylenediamine hydrochloride are mixed and warmed gently for a short time, a precipitate of N-methyl-alloxazine is formed in good yield (II). This alloxazine is identical with the analogous condensation product, obtained by the oxidation of theobromine, and also with the above-mentioned methylalloxazine. From this smooth condensation, it appears that the oxygen atoms in the alloxan ring were originally present as such, and it is clear that the methylimid group found in toxoflavin and toxoflavin hydrate has not been formed by a re-arrangement from a methoxyl group but is actually present as such in the molecule. Toxoflavin does not indeed possess a methoxyl, as is also shown when reacted on with ZEISEL's reagent. There are still to be accounted for 2 N-atoms, 1 C-atom and 2 H-atoms. As appears from the above-mentioned reactions, these must be connected with the carbon chain of the pyrimidine ring. As we have seen, these residual N-atoms are very easily split off. This would suggest that both N-atoms are attached to the C-atoms of the alloxan ring. A carbon atom on C<sub>4</sub> or C<sub>5</sub> (see purine-skeleton III) would not be so easily split off, even though under certain circumstances a carbinol- or aminomethyl-group on C<sub>5</sub> can be split off<sup>1</sup>). Actually we were able by degradation to obtain uramil derivatives from toxoflavin-hydrogenation products, which indicates that a nitrogen atom must be attached to C<sub>5</sub>. Taking the available valencies into account, there is no other possibility than to assume that these two N-atoms have united to form a ring with the remaining C-atom. In other words, toxoflavin has a purine-skeleton (III) and is an isomer of methylxanthine. If it is assumed to be isomeric with methylxanthine, then the positions of the two double bonds are also established. Purine derivatives usually have one double bond between C<sub>4</sub> and C<sub>5</sub> and a second on C<sub>8</sub> (see III). In the iso-xanthines and iso-uric acids described by BILTZ<sup>2</sup>), one double bond is between atoms 3 and 4 or 4 and 9 or 5 and 7, the second double bond is always attached to atom 8. All these compounds, however, are colourless and do not react (so far as we have been able to determine) with o-phenylenediamine with the formation of alloxazine.

In our opinion the only plausible possibility is the structure represented by formula I. From this we see that toxoflavin is a di-imine in which the two imino-groups are connected to a CH<sub>2</sub> group. In this way toxoflavin exhibits properties reminiscent of alloxan. On the other hand the 5-membered ring has an aromatic character, which explains the great stability towards oxidation. The splitting off of the =N—CH<sub>2</sub>—N=

<sup>1)</sup> Treat. B. JOHNSON and A. LITZINGER. Am. Soc. 58, 1940 (1936).

<sup>2)</sup> H. BILTZ. Die neuere Harnsäurechemie, Leipzig, 1936.

ring by phenylenediamine, with the formation of the much more stable pyrazine system, is easily understandable but is none the less remarkable. Methylenediamine is evidently split off during this reaction and this being a very labile substance decomposes easily into ammonia, formaldehyde (which reacts with more phenylenediamine) and other products. It is thus not surprising that we were unable to identify methylenediamine as being present itself.

The other reactions of toxoflavin are also in agreement with what one would expect from a substance possessing formula I. When an aqueous solution of toxoflavin is treated at  $30^{\circ}$  with an aqueous  $\text{SO}_2$  solution, it becomes almost colourless. If this solution is warmed to  $100^{\circ}$  with exclusion of air, the original yellow colour of toxoflavin is almost completely restored, but again disappears if the solution is cooled to  $0^{\circ}$ . This phenomenon is entirely reversible and analogous to the reaction of  $\text{H}_2\text{SO}_3$  on alloxan, in which addition (at  $C_5$ ) occurs, the resulting alloxan sulphite decomposing when warmed with the liberation of  $\text{H}_2\text{SO}_3$ . If the substance is treated with a weak alkaline solution of sodium sulphite, at first addition takes place, followed by reduction (the solution remains colourless when warm). Addition of  $\text{H}_2\text{O}_2$  causes the yellow colour to return. When toxoflavin is treated in aqueous or alcoholic solution with o-phenylenediamine, instead of its hydrochloride, a black-coloured, poorly soluble complex compound is obtained, as is also the case with alloxan.

Under the influence of hydrochloric acid, toxoflavin adds on water easily, forming toxoflavin hydrate (IV); this is analogous to the formation of alloxan hydrate. The ring system remains intact; the murexide reaction remains positive, and there are no amino-groups present, capable of being benzoylated or of reacting with  $\text{HNO}_2$ , which might have been formed as the result of a possible splitting open of the five-membered ring. Furthermore, any derivatives that could have been formed would have a formamino-side chain which would readily split off formaldehyde; actually however, toxoflavin hydrate is stable to boiling hydrochloric acid. We assume, therefore, that this substance is represented by the configuration IV which agrees with what might be expected to take place during water addition on an alloxan derivative of this type. This also explains the formation of the final product of oxidation obtained by the action of potassium chlorate, namely N-methyl-5,5'-dichlorbarbituric acid (VI), while toxoflavin, when oxidised by this method, yields methylalloxan. All efforts to obtain N-methylxanthine from toxoflavin by isomerising agents, as heat, irradiation, acids, etc., or by dehydration of the hydrate (with shifting of the double bond to  $C_8$ ) were unsuccessful. This is indeed not surprising, when one realises that in toxoflavin two double bonds instead of one must alter their positions. Moreover, BILTZ (l.c.) has found that, in the case of 4-hydroxy-4-5-dihydro-uric acid (probably due to the transposition of H and OH) and other hydroxy-compounds, it was not possible to split off water, and in these compounds it was not even necessary to effect a

primary migration of the double bond to C<sub>8</sub>, as would be necessary in our case with toxoflavin hydrate. There is another great difference between toxoflavin and purine- and iso-purine derivatives so far as they are known.

When toxoflavin is hydrogenated catalytically (in water or acetic acid) in the presence of platinum oxide, two molecules of hydrogen are quickly absorbed. Besides the addition of hydrogen, secondary reactions take place, the five-membered ring also being split open. The opening of this ring is indeed not surprising, as a fully hydrogenated glyoxaline ring is first formed which readily splits off formaldehyde under the influence of acids.

Judging from the course of the slow decoloration of the solution during the addition of hydrogen, one double bond is not reduced before the other (as is the case in sulphite reduction) but the whole molecule is directly and completely hydrogenated. Amongst other products we obtained a substance that could be well sublimed and which gave an analysis agreeing with that required for tetrahydro-toxoflavin. If this is warmed with aqueous hydrochloric acid and evaporated to dryness, a murexide derivative is formed. This is what one would expect after the destruction of a five-membered ring and the subsequent oxidation by air of the resultant uramil derivatives in the presence of ammonia. The same phenomenon is obtained when the hydrogenation product of toxoflavin in water is shaken with air in the presence of the used catalyst.

When toxoflavin hydrate is catalytically hydrogenated in acetic acid, only substances are obtained which in air spontaneously give murexide derivatives. The complex reactions that take place during these hydrogenations may possibly be partly due to the condensation of toxoflavin with its decomposed products of hydrogenation. These hardly soluble condensation products, that are formed during the actual hydrogenation, we hope to discuss fully in a subsequent publication. Their formation also indicates the labile nature of the fully hydrogenated five-ring (especially in the hydrogenated toxoflavin hydrate, which in this respect may be compared with the very labile 5-hydroxy-pseudo-uric acid) and that the substituted alloxan ring has remained intact.

If toxoflavin is treated with concentrated hydro-iodic acid, reduction occurs with separation of iodine. If the resultant solution is evaporated to dryness in a vacuum desiccator, a mixture of substances is obtained which, when exposed to the air in neutral aqueous solution, assumes an intensive purple colour. The partially reduced five-ring is thus destroyed by the action of the strong acid. The five-ring is also easily destroyed when toxoflavin is reduced by sulphite or some other reducing agent, quickly oxidisable uramil derivatives resulting from these reductions.

The alkaline degradation of toxoflavin did not yield useful results, nor did the alkaline oxidation with permanganate. The latter operation, however, yielded a product in good quantity, crystallising in small white needles, which begin to sublime at 120° and melt at 220°. The substance

has the formula  $C_6N_5H_7O$ , possesses no methylimid and does not give a murexide reaction. Taking into account the high nitrogen content, it must have been formed as a result of the condensation of degradation products from two molecules of toxoflavin, accompanied by the opening of the alloxan ring and the splitting off of the methylimid or methylurea group, etc. In any case this remarkable substance, which is stable to concentrated hydrochloric acid, nitric acid and  $KMnO_4$ , represents only a secondary reaction product, and is of no direct use as a means to elucidating the constitution of toxoflavin.

The attachment of the methyl group on N-atom I is arbitrary; we hope to decide this point by subsequent work. Finally the question: does the configuration represented by I serve to explain satisfactorily the intensive yellow colour? We believe that it does. Anhydrous alloxan itself has also an intensive yellow colour. In this respect BILTZ refers to the fact that aliphatic  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ -triketones have intensive yellow colours, which disappear during easy hydrate formation. It must also be borne in mind that 1,2-diketones and ortho-quinones frequently have intensive colours<sup>1)</sup>. Our opinion is that the colour of toxoflavin may be explained by the fact that this substance is to be regarded as the cyclic di-imine of a triketo-compound. One can, of course, endeavour to explain the colour by assuming that the double bonds in the alloxan ring, caused for example by the enolisation of one of the carbonyls, are in conjugation with the keto-imino groups, or by a 5-valent nitrogen atom, or finally by assuming that the methylimid group was originally present as 2- or 6-methoxyl, in which case one could give the alloxan ring a quinonoid structure. We have already referred to the fact that no  $OCH_3$  group can be detected in toxoflavin, while the final product, resulting from the smooth condensation between toxoflavin and o-phenylenediamine, possesses a methylimid group; consequently methoxyl is quite certainly absent. Of the other possibilities there remains little to be said. The same questions, when applied to uric acid, also open up many possibilities<sup>2)</sup>. A 5-valent nitrogen atom is not present in the molecule because toxoflavin shows a neutral reaction and does not form a pseudo-base<sup>3)</sup>. These considerations of colour call to mind the blue-red murexide, which is also an alloxan derivative, its colour very often being explained by assuming a quinonoid structure. In the case of murexoin (a murexide in which all 4 nitrogen atoms in the ring have been methylated) such a quinonoid structure is not possible. It occurs to us that one could here usefully apply the betaine-structures proposed by KUHN<sup>4)</sup> which explain better the coloration of various substances, such as quinoline yellow and indigo; the other

<sup>1)</sup> H. BILTZ, B. 45, 3659 (1913).

<sup>2)</sup> Compare for example H. FROMHERZ and A. HARTMANN B. 69, 2440 (1936) and H. BILTZ, ibidem 2750.

<sup>3)</sup> J. TAFEL, B. 32, 3194 (1899).

<sup>4)</sup> R. KUHN, Naturwiss. 20, 618 (1932).

explanation, of the colour only being due to the polyketonic character of the murexide, appears to us to be doubtful. In the case of toxoflavin, however, the polyketonic nature is in our view a sufficient explanation of the yellow colour.

Finally we wish to take this opportunity of expressing our thanks to the Kon. Wilhelmina Jub. Stichting and the Instituut voor Volksvoeding for the financial assistance given for this investigation.

*Central Medical Laboratory, Batavia-C., April 1937.*

**Botany. — Some remarks on the vegetation on the sandy soil of the Padang Loewai (E. Koetai, E. Borneo).** By O. POSTHUMUS.

(Communicated at the meeting of May 29, 1937.)

The vegetation of the Padang Loewai resembles very much the flora of other regions with a soil, consisting of white, loose sand, as have been described already for the Dutch East Indies by TEYSMANN, POLAK, VAN STEENIS<sup>1)</sup> and others.

Nevertheless the following short notes on the vegetation of the Padang Loewai may be of some interest, because the soil of this „Padang”<sup>2)</sup> was studied in details by HARDON<sup>3)</sup> after some samples, taken by the author on his trip, together with Mr. H. WITKAMP, in October 1930.

The Padang Loewai is situated south of Melak, at the Mahakam river, on a terrace of this river, about 80—90 M above sea-level. Behind Melak the road to the Padang rises rather abruptly to the terrace; along the road the original vegetation has been destroyed by the shifting cultivation (ladangs) of the Dayaks. The vegetation shows here all transitions from that of a newly burned field to a secundary forest. At first *Pteridium aquilinum* KUHN (2079)<sup>4)</sup> is abundant; afterwards the land is covered by *Imperata cylindrica* BEAUV., in which *Nephrolepis exaltata* SCHOTT (2071), *Gleichenia linearis* CLARKE (2080), *Gl. laevigata* HK. (2059), *Lygodium flexuosum* Sw. (2076), *L. scandens* Sw. (2077), *Lycopodium cernuum* L. (2078), are numerous. In a further stage brushwood develops with *Melastoma*, *Breynia*, *Ficus hirsuta* VAHL, *Rhodomyrtus tomentosa* WIGHT, etc. Some scattered big trees of *Schima bancana* MIQ. (2081) are purposely left standing from the original vegetation.

<sup>1)</sup> VAN STEENIS (1935), p. 177—180.

<sup>2)</sup> Padang is the Malay name for plain.

<sup>3)</sup> HARDON, Padang soil, an example of podsol in the Tropical Lowlands. These Proceedings, p. 530. This article will be published shortly in the "Natuurkundig Tijdschrift voor Ned.-Indië".

<sup>4)</sup> These are the numbers of my collection; most of them are in the Buitenzorg herbarium.

The secondary forest, which appears afterwards, when left to itself, will procure the cover of shade in which the true forest trees can germinate and develop, so that gradually the primary forest vegetation can be restored. This is, however, hardly the case here; in regard to the use of the land the country may already be called rather overpopulated, though the density of population is low. The kampong Sekolah darat between Melak and the Padang Loewai therefore was split up a couple of years ago, because all older forest in the neighbourhood had been cut down and the secondary forest had to be left to itself for many years to give the soil its necessary rest. In this secondary forest the following plants can be mentioned: *Schima bancana* Miq. (2081), *Homalanthus populneus* O. K. (2130), *Trema orientalis* Bl. (2131), *Commersonia Bartramia* MERR. (2132), *Eugenia lineata* DUTHIE (2133), *Glochidion rubrum* Bl. (2134), *Ficus hirsuta* VAHL (2135), *Rhodomyrtus tomentosa* WIGHT (2121), *Ormosia bancana* PRAIN (2120), *Daphniphyllum laurinum* BAILL. (2140), *Anisophyllea disticha* BAILL. (2191). The small rivers flow through rather broad valleys, 10—20 meter below the level of the terrace; they are mostly rather broad, with a flat swampy bottom. The ferns found here are characteristic for such localities: *Dryopteris prolifera* C. CHR. (2105), *Dr. gongyloides* O. K. (2104), *Asplenium longissimum* Bl. (2107), *Nephrolepis radicans* KUHN (2106), *Helminthostachys zeylanica* Hk. (2096).

These few details regard the route from Melak to the village Sekolah darat. From this place to the Padang Loewai the landscape is at first of the same kind, until the primary forest is reached.

Here the soil, which along the route is sandy, but usually grey coloured, becomes lighter, more yellowish. The fields, according to our Dayaks guides, become poorer and the forest further on the way towards the real padang has not been cut down, because the soil is considered by the population to be too infertile and thence not worth while. This was expressly stated.

The primary forest here is of another type than the primeval forest, which can be used for cultivation after cutting down and burning. Instead of consisting of huge trees intermixed with lower ones and with undergrowth, this forest is much lower, and consists, except a scanty developed undergrowth, of trees of one size only. On the soil mosses occur, which form at first a thin layer equally distributed. More into the interior the layer becomes thicker and more concentrated towards the base of the trees. The forest becomes lighter, the trees shorter; the distances between the trees become gradually larger, or better, the trees are now not evenly distributed, but more or less segregated into groups, with open places between. These open places become larger and may ultimately fuse together, so that the forest becomes a more or less open landscape with scattered groups of small trees, which groups may be sometimes more or less connected. In the open places the mossy layer, which is of considerable thickness below the trees, becomes thinner, and ultimately may disappear;

than only a thin layer of Lichens, much resembling *Cladonia*, is present, which may be broken up, so that the white sand comes bare. Under the trees, below the moss, a layer of loose peat, mostly 5—15 cm thick, is found.

Thus there is a gradual transition from a typical tropical rain forest to the typical padang-flora: an open landscape with groups of trees, which landscape resembles some types of the heather vegetation, as found e.g. on the high sandy soils of Gelderland and Utrecht<sup>1)</sup>. As will be discussed afterwards this resemblance is not an accidental one only.

The study of the elements of the vegetation was handicapped by the circumstance that our visit was a short one only and that many plants did not flower at that time. The following details can be mentioned.

In the transitional forest the most common trees are *Tristania obovata* R. BR. (2182) and *Vaccinium bancanum* MIQ. (2148) with some *Podocarpus neriifolia* DON (2188).

The bushes, because they are richer in species, give a more varied appearance. *Vaccinium bancanum* MIQ. (2148) is most frequent here also, with *Tristania obovata* R. BR. (2182), but other elements are *Eugenia spicata* LAMK (2164), *Cratoxylon glaucum* KORTH. (2210), and *C. ligustrinum* Bl. (2229); less frequent are *Glochidion rubrum* Bl. (2209), *Arthrophyllum diversifolium* Bl. (2163), *Rhodomyrtus tomentosa* WIGHT (2178), *Rapanaea* species (2215), *Dacrydium elatum* WALL. (2175), *Daphniphyllum laurinum* BAILL. (2213), *Choriophyllum malayanum* BTH. and in one place *Ixora* cf. *linggensis* BREM. (2166). Because of the open character crown epiphytes are frequent; they do not occur only on the trees, but also on the soil. Here may be named *Cyclophorus lanceolatus* ALSTON (2183), *Drynaria sparsisora* MOORE (2174), *Davallia denticulata* METT. (2180), *Humata* species (2147); further *Dischidia Rafflesiana* WALL (2149); *Myrmecodia* Spec. and *Hydnophytum* Spec. Ants are frequent, as shown by the occurrence of *Dischidia*, *Myrmecodia* and *Hydnophytum*, but they occur also in nests on the branches, especially of *Cratoxylon glaucum* KORTH. The parasite *Henslowia buxifolia* Bl. (2159) is also frequent and causes much havoc in the crowns of the trees.

The number of Orchids is considerable too; species of *Dendrobium*, *Thrixspermum* and *Grammatophyllum* (anggrek teboe) were observed; they have not been named yet. *Nepenthes Reinwardtiana* MIQ. (2146) is also rather common in the shade of the bushes.

In the open places but a few species are found; except the Cladonialike lichens, *Xyris complanata* R. BR. (2162), which is conspicuous by its yellow flowers is found here with *Schizaea dichotoma* Sw. (2185). In

<sup>1)</sup> In the same way as mentioned for the flora of Mandor (POLAK (1933), p. 24; SCHUIJTEMAKER (1936), fig. 11); the vegetation there is, at least locally, not so specialised, as shown by the occurrence of *Gleichenia linearis* CLARKE, *Pteridium aquilinum* KUHN, and *Lycopodium cernuum* L.

one place near the margin of the area further *Dianella* species (2165), *Nephrolepis hirsutula* PR. (2216) and *Digitaria longiflora* PERS. (2179) were found. This short sketch may suffice to give an idea of the character of this vegetation.

If we analyse the components, we see that the epiphytes are common ones, which, because their growth is influenced by conditions of light and humidity only, are also found on suitable places, as crown epiphytes, in the surroundings. This holds true both for the ferns and for the antplants; the latter are usually frequent in open forest, e.g. on tree-groups, which may be found on mountains slopes, regularly grazed by cattle.

For the other plants, however, there is no doubt that here too the peculiar character of the vegetation is due to edaphic conditions, as has been shown already by former authors on this subject for other localities and which is evident at once if we study the data given by HARDON on the samples from the Padang Loewai.

The plants, except the epiphytes, mentioned above must be able to live on soil of high acidity and poor in mineral plant food. Of this type are in the open places: the herbs *Schizaea dichotoma* Sw. and *Xyris complanata* R. BR. and of the trees and bushes: *Vaccinium bancanum* MIQ., *Cratoxylon glaucum* KORTH. C. *ligustrinum* Bl., *Dacrydium elatum* WALL. *Eugenia spicata* LAM., *Tristania obovata* R. BR. *Rapanea* species; further *Rhodomyrtus tomentosa* WIGHT, *Ixora*, *Daphniphyllum laurinum* HK., *Nephrolepis hirsutula* PR. and *Digitaria longiflora* PERS., which may also occur in the bloekar, on more fertile soil of this type. *Pteridium aquilinum* KUNTH, which is very frequent elsewhere, was not found here.

When we study the localities of these plants on Java, we see that, of a number of those mentioned above, either the same species or other species of the same genus, are typical mountain plants. *Vaccinium bancanum* MIQ. does not occur on Java below 1500 M. From the genus *Rapanea* the Java species *R. avenis* MEZ occurs there from 1400—3000 M., and *R. Hasseltii* MEZ from 2700—3000 M. *Podocarpus neriifolia* DON occurs on Java usually above 1000 M., but rarely descending to 400 M. *Dacrydium elatum* WALlich occurs on Celebes and N. Sumatra between 900—3000 M.

In other similar vegetations plants of the same type have been found e.g. *Leptospermum flavescens* SM.<sup>1)</sup> which occurs on Java between 1700 and 3300 M. and *Styphelia malayana* J. J. SM.<sup>2)</sup> (*Styphelia pungens* KDS is found on Java between 2100 and 3300 M.).

Herein is an analogy to the solfatara flora, in which it was observed, that alpine mountains plants may be found 1000—1500 M. below their usual altitude. VON FABER<sup>3)</sup> gives as explanation that the climate has no direct influence, but that in both localities, the alpine region and the

<sup>1)</sup> VAN STEENIS (1933), p. 38.

<sup>2)</sup> VAN STEENIS (1932), p. 182.

<sup>3)</sup> VON FABER (1927), p. 65, 69; VON FABER—SCHIMPER (1935), p. 552, 1294.

solfatara's, the soil is of a high acidity and poor in mineral plant food and in nitrogenous matter. In such vegetations Ericaceae play the first role and also epiphytes of the surrounding forests may penetrate into it. Though many details remain to be observed, we may explain the occurrence in this padang flora of plants, known elsewhere as mountains plants only, on the same grounds.

That the peculiar character of the flora of the Padang Loewai on the flat watershed is due to edaphic factors becomes also clear by a comparison with the flora on the valley slope of the Soenget Loewai, N. of the Padang. As soon as the surface slopes down to the river, which is situated about 20 M. below the Padang, the vegetation becomes at once more abundant; the common forest of large trees, intermixed with smaller ones and of undergrowth, though not a dense one, so characteristic for this type of forest, appears. From the plants collected may be named *Nepenthes gracilis* KRTH. (2192), *Trichomanes singaporianum* V. A. v. R. (2194), *Cyathea brunonis* WALL. (2196), *Alsophila commutata* METT. (2200), *Syngramma quinata* CARR. (2197), *S. alismaefolia* J. Sm., var. *Wallichii* (2198), *Elaphoglossum melanostictum* MOORE (2204), *Barclaya Motleyi* Hk. (2202) (in the river), which show at once that here again occurs the type of forest of the Sunda land at low altitude, with many elements, which do not occur on Java or have been found there but rarely in its W. part only. The soil on the slopes is not leached out yet so far, though it is not a rich soil; the water in the river is brown coloured by humic acid.

Because this type of vegetation, except in the last few years, has been relatively rarely discussed in botanical literature, it might be supposed that it is but rarely found. There is reason to believe, however, that it is of a rather widespread occurrence in the Outer Possessions of the Netherlands East Indies, especially on Sumatra, Borneo and the neighbouring islands on the Sunda-shelf and also on New Guinea in places with an old soil often built up of material, poor in plant-food, and not rejuvenated by recent volcanic action, where a climate with abundant rainfall with no well marked dry season occurs. The fact that these regions are at least until at present, not suitable for intensive agriculture and for European estates, may explain that relatively few details have been described about them, except in the last few years. The leaching out, though not so intensive as in the highly podsolised soil of the Padang Loewai already went rather far in big surfaces of the Outer Possessions, especially in E. Sumatra, Banka, Borneo and N. New Guinea; in this regions the soil is rather poor and can sustain but a scattered population, by shifting cultivation only. Ironwood (*Eusideroxylon Schwageri* T. et B.) is typical for this type of soil. Only in few cases such poor soils can be used for more intensive cultivation (e.g. for pepper), but in that case it needs high manuring, in the same way as the diluvial sandy soil of the

Netherlands had to be improved by compost or artificial manure. The good physical conditions of these soils is than an advantage.

Analogous vegetations, dependent on the leaching, and perhaps even podsolisation of the soil, are found also in other parts of the tropics, at low altitudes, in regions with no recent volcanic action and a large, evenly distributed rainfall. Their occurrence in other parts of Dutch Borneo and in British Borneo<sup>1)</sup> is hardly surprising. From the data of the literature the savanna's near the coast in Surinam were already by IJZERMAN<sup>1)</sup> and VAN STEENIS<sup>2)</sup> considered to be of the same type. The sketch given recently by LANJOUW<sup>3)</sup>, confirms this. This type of forest, and that described by RICHARDS<sup>4)</sup> from British Borneo is not so extreme as that of the Padang Loewai. The upland savanna's may be influenced by different factors.

The agricultural value of the leached soils, described from Surinam by STAHEL and MULLER, may be about the same as the Borneo soils in the neighbourhood of the Padang Loewai, mentioned above.

I agree with VAN STEENIS in considering this and similar padang flora, e.g. of Mandor, as original ones. When sometimes, and usually in more fertile parts, the vegetation is influenced by men, especially by burning. *Pteridium*, *Gleichenia*, *Nephrolepis* and *Lycopodium* are mentioned; these plants are also typical for newly left ladangs on unfertile soils.

The formation of this peculiar vegetation is possible only on elevated well drained localities in a humid climate, with the rains equally distributed over the year, so that the soil is continuously leached and no ascending ground water, which transports mineral substance to the surface, can occur. These conditions are essentially the same as for the poor heather vegetation in higher places in Holland.

I do not agree with LANJOUW on his interpretation of the Surinam-savanna. He ascribes the xeromorphic appearance of the flora to the influence of the dry season and the leaching of the soil to the heavy rains during the wet season. The padang-vegetation of Borneo proves, once more, that xeromorphic structure is not necessarily an indication of a dry climate; it is neither in the mangrove vegetation<sup>5)</sup>. Moreover, leaching is not so much dependent on heavy rainfall in one season, but more by a rather continuous rainfall throughout the year, which needs not to be very heavy. In the Dutch East Indies some parts e.g. the Western slope of the Mt. Moeria (the stations Petjangaan and Keling) and the country near

<sup>1)</sup> WINKLER (1914), p. 202, pl. 4; RICHARDS (1936), p. 23—25, pl. 3, fig. 4; this type of forest is not so extreme.

<sup>2)</sup> VAN STEENIS (1932), p. 186.

<sup>3)</sup> LANJOUW (1936), a, p. 405; (1936), c, p. 826—846; see also EMANUELS (1936), p. 118.

<sup>4)</sup> RICHARDS (1936), p. 23—25.

<sup>5)</sup> The typical plants of the high moor flora are also xeromorphic; see VON FABER-SCHIMPER (1935), p. 1164.

Macassar in S.W. Celebes have very heavy rains during the wet season, and a well marked dry season, with ascending ground water.

If we distinguish with MOHR<sup>1)</sup> the months with a rainfall higher than 100 mM. as wet months, and with less than 65 mM. as dry months, we see, as shown in the following tables, that the type of rainfall both in Paramaribo and Republiek resembles that of Melak near the Padang Loewai in having no dry months; ten months of the year are in the Surinam localities wet months. The maximum monthly rainfall in both places in Surinam does not exceed 300 mM. In Macassar, Petjangaan and Keling, however, there are 4 dry months and only 6.6 and 7 wet months, but with a heavy rainfall, to about 700—900 mM.; this maximum is about three times as much as in Surinam! In such regions we can find a monsoon forest, which, as WINKLER pointed out already, is quite different; also the savanna's which develop there after cutting and burning. The soil has a high pH, may be even slightly alkaline and usually contains sufficient mineral plant-

Rainfall of the localities mentioned.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	total.	number wet months	number dry months
Melak	332	271	259	370	332	246	116	144	152	227	354	353	3156	12	0
Paramaribo	255	170	204	288	298	280	209	154	72	71	135	223	2159	10	0
Republiek	172	118	144	226	291	290	215	154	77	64	107	210	2069	10	0
Macassar	688	541	426	158	89	70	34	10	13	42	174	611	2856	6	4
Petjangaan	697	537	440	175	95	46	44	35	39	105	213	502	2928	6	4
Keling	871	707	476	201	124	74	22	19	35	61	149	513	3252	7	4

food, though the structure is often rather bad to bad; sandy soils of the Padang type have not been found.

Moreover it may be remarked here that coriaceous leaves as in the Ericaceae are scarce in the vegetation of savanna's in regions with a strongly marked dry season; most of the trees are thorny and drop their herbaceous leaves during the dry season.

Leguminosae, often in symbiosis with bacteria, are frequent in these dry savanna's, instead of Coniferae and Ericaceae with mycorrhiza, characteristic for acid soils in a humid climate as in the Padang Loewai.

We thus see that this acid soil enables a number of plants, which otherwise occur on the mountains of Malaysia, and which are not stenotherm, to descend here in the lowlands, even nearly to sea-level. In these respects this flora resembles that of the solfatara's. Podsolised soils, as found on the Padang Loewai may be of more widespread occurrence in the tropics,

<sup>1)</sup> MOHR (1933), p. 100.

than hitherto supposed but in the economically less developed and therefore not intensively studied regions.

Finally I wish to express my sincere thanks to Ir. H. WITKAMP for his great hospitality during my stay in Koetai and to Dr. C. G. G. J. VAN STEENIS who made most of the identifications.

#### LIST OF LITERATURE.

- D. H. EMANUELS. Op bezoek bij de Indianen van Zanderij I. Natuur en Mensch, dl. 56, 1936, p. 118—120, 2 fig.
- F. C. VON FABER. Die Kraterpflanzen Java's. Buitenzorg, 1927, 119 p., 18 pl.  
Pflanzengeographie see SCHIMPER.
- H. J. HARDON. Padang soil, an example of podsol in the Tropical Lowlands. These Proceedings, p. 530.
- J. LANJOUW. De vegetaties van de Surinaamsche savannen en Zwampen. Nederlandsch Kruidkundig Archief, dl. 46, 1936, p. 405—407; Natuurwetenschappelijk tijdschrift, dl. 18, 1936, afl. 3—6, p. 181—182.  
Studies of the Vegetation of the Surinam Savannahs and Swamps. Nederlandsch Kruidkundig Archief, dl. 46, 1936, p. 823—852.
- B. POLAK. Een tocht in het Zandsteengebied bij Mandor (West Borneo). De Tropische Natuur, jrg. 22, 1933, p. 23—23, 8 fig.
- P. W. RICHARDS. Ecological Observations on the Rain Forest of Mt. Dulit. Journal of Ecology, vol. 24, 1936, p. 1—37; (p. 23—25).
- A. F. W. SCHIMPER. Pflanzengeographie auf physiologischer Grundlage. Dritte Auflage, bearbeitet von F. C. VON FABER, 2 vols., 1935, 161 p., 2 maps, 614 figs.
- J. P. SCHUITEMAKER. Aanteekeningen betreffende het Natuurmonument Mandor (West Borneo). Tiende Verslag N. I. Vereeniging voor Natuurbescherming, Buitenzorg, 1936, p. 124—129, fig. 10—14.
- G. STAHEL en H. J. MULLER. Gegevens over de vruchtbaarheid van de Surinaamsche binnenlanden. Bulletin no. 52 van het Landbouwproefstation in Suriname, 1933, 34 p.
- C. G. J. J. VAN STEENIS. Botanical Results of a trip to the Anambas and the Natoena islands. Bulletin Jardin Botanique de Buitenzorg, (III) vol. 12, 1932, p. 152—211.  
Report of a Botanical trip to the Ranau region, South Sumatra. Bulletin Jardin Botanique de Buitenzorg, (III) vol. 13, 1933, p. 1—56.  
Maleische Vegetatieschetsen. Tijdschr. Kon. Ned. Aardr. Gen., vol. 52, 1935, p. 177—180.
- H. WINKLER. Die Pflanzendecke Südost Borneo. Beiträge zur Kenntniss der Flora und Pflanzengeographie von Borneo, IV, Engler Bot. Jahrb., vol. 50, 1914, p. 188—208.
- J. W. IJZERMAN. Dwars door Sumatra. Haarlem, Batavia, 1895, 532 p.
- R. IJZERMAN. Outline of the geology and petrology of Surinam (Dutch Guyana). Utrecht, 1931.

**Geophysics.** — *On a Period of 27 Months in the Rainfall.* By S.  
W. VISSER. (Communicated by Prof. E. VAN EVERDINGEN).

(Communicated at the meeting of May 29, 1937.)

A research into the possibility of long range weather forecasting in the Netherlands led to the investigation of a period of 27 months in the weather of different regions. We found clear indications of this period in Eastern America, on Iceland and in Western Europe. It shows close connections with the warm currents of the North Atlantic Ocean.

The data, upon which the following considerations have been based, were taken from "World Weather Records"<sup>1)</sup> and different publications of De Bilt<sup>2)</sup>. We have restricted ourselves in this paper to the rainfall. The process applied was as follows. In the first place seasonal totals of rainfall were calculated from the available data, then averages and the deviations therefrom were deduced. These deviations were arranged in nine columns, representing the whole period of 27 months, and the average values representing the character of the oscillation were determined.

The curves obtained are generally very complicated and we have surely not to do with a simple phenomenon. Fig. 1 represents the features of the period for four stations. In Western Europe it is characterized by a well

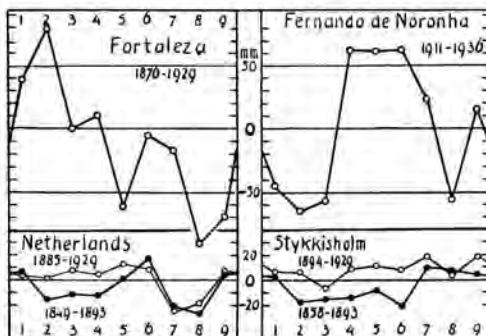


Fig. 1.

developed minimum during the 7th and the 8th season of the period, as is obvious in the curve of the Netherlands. We state very high amplitudes at Fortaleza (Ceará, Brazil) and on Fernando de Noronha. As a rule the

<sup>1)</sup> World Weather Records, Smiths. Misc. Coll. **79**, 1927; **90**, 1934.

<sup>2)</sup> C. BRAAK, The climate of the Netherlands, Precipitation. Meded. en Verh. **34 a**; C. BRAAK, The climate of the Netherlands West Indies, Meded. en Verh. **36**; Annuaire Inst. royal des P.B.; Maandel. Overzichten der Weersgesteldheid in Nederland; Overzichten Met. Waarn. in Ned. West-Indië.

stability is remarkably good, as appears when comparing the curves for two parts of the interval investigated (Netherlands and Stykkisholm). Even during cycles of nine years duration, containing four periods of 27 months, the stability in the precipitation in the Netherlands is fairly constant (Table 1).

TABLE I. Stability of 27-Month Period in the Rainfall of the Netherlands.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1849—1857	— 2.2	—18.7	—20.9	—12.9	—22.7	— 2.7	+39.8	—49.3	—26.7
1858—1866	—16.6	—23.9	—17.2	—32.0	—35.6	+ 4.9	—22.6	— 4.4	+ 0.9
1867—1875	+39.2	—32.3	+22.2	—34.4	— 2.2	+30.9	—43.0	—28.3	+23.3
1876—1884	+28.8	+24.1	— 2.5	+16.0	+41.0	+26.0	—15.4	—18.7	+ 2.2
1885—1893	— 3.7	—26.5	— 4.5	+ 0.3	+22.4	+25.8	—64.7	—32.2	+18.5
1894—1902	—24.4	—35.6	+48.9	—18.5	—19.8	+ 1.1	+ 3.8	— 9.7	— 7.6
1903—1911	— 4.5	+37.2	+19.6	+37.7	+ 3.0	—38.7	—47.2	—36.2	+13.0
1912—1920	+36.0	+ 0.0	+15.2	+28.3	+19.9	+37.2	— 2.2	+ 3.4	—28.8
1921—1929	— 9.3	+ 5.4	+ 6.0	—35.3	+ 9.5	— 5.8	—23.2	—16.1	+41.2

The severest exception is that of the cycle 1894—1902. About the end of the century an important change in the weather elements of Europe has been stated<sup>3)</sup> and this fact influences evidently the character of the period.

It seemed worth while to investigate the character of this period on and round about the Northern Atlantic Ocean. Though it is open to question, whether we may apply harmonic analysis, we have done so in order to detect some general features of this period. The calculations have been restricted to the first two terms of the series.

For most of the stations investigated the rainfall between 1876 and 1929, being 54 years or 6 nine-years cycles, has been studied. The successive cycles started, with the winters of 1876 (December 1st, 1875), 1885 etc. (See Table 1). The present period of 27 months started with the autumn of 1936.

We found in the first place that we could subdivide the stations in two groups, 1°, a group with its maximum about the 5th to the 7th month: Fortaleza and Charleston in America and a number of stations in Europe: the Netherlands, Great Britain, Oslo, Breslau and Paris; 2°, a group with its maximum during the 14th month or later, Fernando de Noronha, Barbados, Bermuda, Stykkisholm, Thorshavn (Faroer).

The first group contains continental stations, the other group principally oceanic ones. Therefore we may presume an action at sea differing greatly

<sup>3)</sup> A. SCHMAUSS, Beitr. z. Phys. d. fr. Atm. **14**, 1932.

from that on land. Even at relatively small distances the character differs considerably: Fernando de Noronha and Fortaleza, Aberdeen and Thors-havn, Oslo and Bodö (See Table 4).

The second feature revealed is a retardation combined with a decrease of the amplitude on the Atlantic Ocean in the direction of the Gulfstream, as shown by the following harmonic formulae.

TABLE 2. Harmonic Analysis of 27-Month Period on the Atlantic Ocean.

							Maximum
F. de Noronha	3.8° S 33.5° W	53.9 sin (x + 265.3°) + 40.9 sin (2x + 146.5°)					13.8 month
Barbados	13.1 N 59.6 W	13.2	262.1	8.9	108.0		14.1
Bermuda	32.3 N 64.8 W	24.1	226.1	13.7	120.1		16.8
Ponta Delgada	37.7 N 25.7 W	2.2	209.6	8.5	206.6		18.0
Stykkisholm	65.5 N 22.8 W	8.6	187.2	0.4	204.8		19.7
Thorshavn	62.0 N 6.8 W	9.0	158.1	7.3	68.3		21.9
Bodö	67.3 N 14.4 E	15.1	184.9	11.5	281.2		19.9

N.B. Fernando de Noronha 1911—1936; Barbados 1883—1930; Thorshavn 1873—1925.

The large amplitude on Fernando de Noronha shows that probably here or in the neighbourhood the disturbance takes its origin and the table teaches that the wave needs six or seven months to cross the Ocean; it depends probably on changes in the Gulfstream under the influence of the trade winds or other meteorological factors. This result corresponds with that of GALLÉ<sup>4)</sup>, who deduced high correlation coefficients between the trade winds in the summer and the following winter temperatures in Europe.

The rainfall minimum in Western Europe coincides strictly with the arrival of the maximum in the NE Atlantic. Harmonic analysis yields the following results,

TABLE 3. Harmonic Analysis of 27-Month Period in Western Europe.

							Minimum
Greenwich	51.5° N 0.0°	11.8 sin (x + 357.4°) + 10.8 sin (2x + 130.4°)					20.4 month
Netherlands	52 N 5 E	11.2	358.4	12.6	133.8		20.4
Paris	48.8 N 2.5 E	9.1	350.8	8.1	128.3		20.9
Aberdeen	57.2 N 2.1 W	6.6	346.4	12.2	114.0		21.3
Breslau	51.1 N 17.0 E	3.3	354.4	9.4	92.3		20.7

<sup>4)</sup> P. H. GALLÉ, Verslagen K. Ak. v. Wet. Amsterdam, 27 Febr. 1915, 29 Jan. 1916;  
Proc. Royal Acad. Amsterdam, 17, 1147 (1915); 18, 1435 (1916).

The importance of these results for the long range weather forecasting in Western Europe is evident. The superfluous rain in the fifth season on Fernando de Noronha is followed by deficient precipitation in the seventh season in Western Europe. The dryness of the seventh season is best developed at Greenwich. Out of 24 periods, 1876—1929, 19 were here too dry. We have a probability of 80 % when forecasting a too dry seventh season at Greenwich. In the Netherlands 18 seventh seasons during the same time interval were too dry and during the 36 periods, 1849—1929, 26 cases (72 %) gave a deficient precipitation. These figures are foreshadowing a too low rainfall during the coming seventh season: the spring of 1938.

Comparison with the rainfall on Fernando de Noronha is only possible since 1911. The connection between the precipitation for 11 periods,

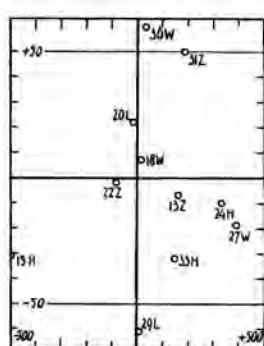


Fig. 2.

1911—1936<sup>5</sup>), during the fifth season on this island and that during the seventh season in the Netherlands is shown in fig. 2. The abscissae procure the deviations of the seasonal averages of Fernando de Noronha, the ordinates those of the Netherlands. The figures refer to the dutch seasons (W winter, L spring, Z summer, H autumn). The contrast is present, but important exceptions exist. Especially we point to the large discrepancies of two seasons, the summer of 1931 and the autumn of 1915.

We may be sure that the weather in Western Europe does not depend upon the Gulfstream only and other factors doubtless disturb the regular development of the Gulfstream activity.

Moreover the harmonic analysis does not yield trustworthy results, when other actions are present also. So the small irregularities in the months of arrival of the maximum at Thorshavn and Bodö are due to failure of the harmonic analysis. When consulting the original figures we see that the wave arrives at the Faroe at an earlier date, about the 20th month, at Bodö, however, later, about the 21st month (see table 4).

The contrast between the rainfall maximum at sea and the simultaneous minimum on land appears to be a general rule and the figures point clearly to a retardation of the minimum along the eastern coasts of America, everywhere coinciding with the passing of the maximum on the Atlantic. We state exceptions to be present in the NE of North America, at Toronto and Eastport and at Ivigtut on Greenland, evidently being situated outside the area of activity of the Gulfstream.

Table 4 gives the averages of the continental and oceanic stations investigated.

<sup>5</sup>) Boletim Mensal and Boletim Diario, Dir. Met. Rio de Janeiro.

TABLE 4. 27-Month Period. Average Values for Nine Seasons Rainfall in mm.

	Oceanic Stations									Max. month		Continental Stations									Min. month
	1	2	3	4	5	6	7	8	9			1	2	3	4	5	6	7	8	9	
F. d. Noronha	-45	-65	-58	+62	+61	+62	+23	-56	+15	14	Fortaleza	+39	+79	0	+10	-60	-5	-17	-90	-70	14
Barbados	+10	-2	-30	+28	-2	+28	+10	0	-33	14	Paramaribo	-3	-5	-2	-27	+7	-18	+21	+19	+7	14
Bermuda	+15	-33	-41	-8	+33	+8	+15	+23	-30	17	Key West	+20	-27	-18	+20	+36	-6	-10	-5	-11	17
P. Delgada	-10	-10	0	+4	+8	-1	-10	+10	+9	18	Charleston	-1	+5	+13	+37	-13	-17	-28	-7	-22	17
Stykkisholm	+2	-3	-5	-2	0	-3	+6	+2	+4	20	Valentia	+10	+22	-7	+4	-2	+3	-14	-2	-15	19
Thorshavn	+4	+11	-6	-30	-1	+20	-12	+17	-5	20	Greenwich	+5	+3	+3	+11	+11	+6	-24	-15	-1	20
Bodö	-15	-3	-13	0	-22	+4	+20	+26	+3	21	Aberdeen	+14	-5	+4	-2	+11	+11	-14	-17	-2	20
	NE America										Netherlands	+4	+1	+7	+5	+13	+8	-25	-18	+6	20
Toronto	-21	+19	+4	+8	-14	+14	-2	-7	0	-	Paris	-4	+8	+6	-2	+17	+7	-26	-5	-1	20
Eastport	-6	+18	-23	+13	-3	+20	+13	-5	-18	-	Oslo	+17	-14	+2	-8	+6	+11	+10	-18	-7	22
Ivigtut	-20	-32	-3	+9	+27	-16	+12	+33	-11	-	Breslau	+14	-3	+1	-8	+16	-1	-3	-14	-2	22

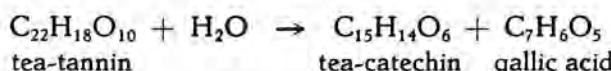
**Biochemistry.** — *The splitting off of gallic acid from tannin, especially from theotannin, by Aspergillus niger.* By W. B. DEYS and M. J. DIJKMAN. (Communicated by Prof. G. VAN ITERSON JR.).

(Communicated at the meeting of May 29, 1937.)

Various researches<sup>1)</sup> have proved that tea-tannin belongs to the group of the catechins.

Only a few researchers have found that gallic acid can be split off from theotannin by means of hydrolysis even as from gallo-tannin. TRETZEL<sup>2)</sup> mentions that gallic acid can be obtained by boiling tea-tannin with sulphuric acid.

From the researches of TSUJIMURA<sup>3)</sup> follows that tea-tannin is the gallic acid ester of tea-catechin; tea-tannin splits off gallic acid when hydrolysed with diluted sulphuric acid. According to TSUJIMURA this hydrolysis is to be formulated as follows:



Other researchers<sup>4)</sup> do not mention the fact that gallic acid can be obtained from tea-tannin by hydrolysis in some way or other.

It has been known for a long time past that the fungus *Aspergillus niger* is able to split off gallic acid from gallo-tannin. Therefore it was the obvious thing to do to investigate the behaviour of tea-tannin with respect to *A. niger*. To this end we made the following experiments:

1. *A. niger* was inoculated on a decoction of fresh tea leaves.
2. We inoculated the fungus on a solution containing saccharose, a definite concentration of nutritive salts and theotannin.
3. The enzyme of *A. niger* was isolated and put into a solution of theotannin in water.

In each of the three experiments the liquids were examined on gallic acid after three days. From the undermentioned results it was evident that in each of the three cases gallic acid could be isolated. Although it

<sup>1)</sup> See SHAW and JONES, Theotannin p. 74—95, Madras 1932.

<sup>2)</sup> TRETZEL cit. NANNINGA, Reports from 's Lands Plantentuin (the Botanical Garden at Buitenzorg) N°. XLVI.

<sup>3)</sup> TSUJIMURA, Sci. Papers Inst. of Phys. and Chem. Research. Tokyo, Vol. 14, p. 63 (1930) and Vol. 15, p. 155 (1931).

<sup>4)</sup> YAMMAMOTO, J. Agric. Soc. Japan, 6, 564 (1930); DEUSS, Reports from the Experimental Station for Tea, XLII, 1915.

may very well be possible that tea contains more than one sort of tannin, we may conclude from our researches that at least one of these tannins is a gallic acid ester.

#### EXPERIMENTAL PART.

##### 1. *Isolation of Aspergillus niger.*

There are various methods to isolate *A. niger*. The most simple one is the method in which we make use of the ability of this fungus to split off gallic acid from tannin solutions by means of its specific enzyme, the tannase. Making use of this property *A. niger* can easily be isolated by pouring a fairly concentrated tannin solution on any substrate (for instance garden's soil). After a few days the growth of the mycelium and the development of the conidiae-bearers of *A. niger* on the liquid are perceptible. By inoculating the conidiae on one of the well-known nutrient media for fungi one can easily get a pure culture of this fungus in a few days.

For the following experiments the matrix used for the isolation consisted of ordinary earth taken from between the tea-shrubs in the experimental garden of the Experimental Station.

By spreading a small amount of this earth on a petri dish and pouring a 5 % tannin solution on it we could as early as three days later proceed to the inoculation of pure cultures. The spores which had been formed were inoculated on nutrient agar. Microscopical examination showed that the inoculation thus obtained was a pure culture of *A. niger*.

##### 2. *Colorimetric determination of gallic acid.*

A solution containing 10 grammes of potassium ferricyanide and 100 ml ammonia (25 %) per liter turns dark red when added to a solution of gallic acid and proved to be very suitable for a colorimetric determination of gallic acid.

In order to be able to see whether a tannin solution contains gallic acid it was necessary first to precipitate the tannin by means of gelatine. The addition of 10 ml of gelatine solution (25 g gelatine on 875 ml water) and 5 g kaolin proved sufficient for 5 ml 5 % tannin. After 45 minutes' shaking the filtrate was free from tannin. The amount of gallic acid in the filtrate was ascertained colorimetrically by means of the above mentioned method.

##### 3. *Hydrolysis of gallo-tannin by A. niger.*

Firstly we traced how much free gallic acid a 5 % solution of commercial tannin contained. By means of the above mentioned method we found that there was less than 5 mg gallic acid in the solution (this is less than 0.5 %). Further we ascertained how much gallic acid was split off by

*A. niger* from a 5 % tannin solution which also contained per liter 25 g ammonium sulphate, 0.75 g dipotassium phosphate, 0.25 g magnesium sulphate and a trace of zinc sulphate. On this solution we inoculated a culture of *A. niger*. After three days the filtrate was examined on gallic acid. There appeared to be 2.0 % free gallic acid in the solution. This is about the solubility of gallic acid at the temperature of the experiment (27 to 28° C).

We also tested whether spores of *A. niger* grow on the above mentioned salts and 5 % tannin solution and whether here too the splitting off of gallic acid could be proved. As early as one day later the growth of the fungus was clearly perceptible, after three days the actual presence of free gallic acid was proved by the colorimetric method.

The original solution which contained less than 0.5 % gallic acid proved to contain 2.2 % gallic acid after the experiment.

#### 4. *Gallic acid liberated by A. niger from a decoction of tea leaves.*

100 grammes of fresh tea leaves ( $p + 2$ ) were boiled with 250 ml distilled water during 30 minutes. Immediately afterwards the hot extract was filtrated from the infused leaves. When the liquid had cooled down it was extracted with ether in a STEUDEL-apparatus during two hours in order to remove the free gallic acid which might be present in the decoction<sup>1)</sup>.

After the ether had been distilled we ascertained whether there was any gallic acid in the remaining liquid. To this purpose some theotannin which had also been dissolved in the ether had first to be removed by means of gelatine, after this a slight colour-reaction with soda indicated a trace of free gallic acid. It was impossible to isolate crystals of this acid.

The liquid which had been extracted with ether was placed in a water-bath of 50° C; meanwhile the last traces of ether were driven from the solution by means of a current of nitrogen. When the solution had cooled down to 30° C we inoculated it with spores of *A. niger*. After three days the gelatine-test proved that the fungus had decomposed all the theotannin. The liquid was filtrated from the mycelium and extracted with ether in a STEUDEL-apparatus during 12 hours. The etheric solution thus obtained was shaken with a saturated sodium bicarbonate solution; the bicarbonate solution was shaken three times with ether and finally acidified with diluted hydrochloric acid (10 %). The acid solution was extracted with ether, the etherial solution was dried on sodium sulphate and distilled.

The remainder proved to be a beautiful, more or less yellow substance crystallized in needles. On recrystallizing from water we obtained a colourless substance, which took a darker colour when heated to 220° C and

<sup>1)</sup> DEUSS (Reports of the Experimental Station for Tea, XXVII, 1913) found that tea leaves contain a little free gallic acid. He had to work up several kilogrammes of dry tea leaves in order to obtain some decigrammes of gallic acid.

melted at 237° C with a pronounced development of gas. When mixed with pure gallic acid the melting point showed no depression. The colour reactions of this crystalline substance with ferric chloride, potassium cyanide, lime water, potassium plumbate and soda were equal to those of gallic acid.

We obtained 234 mg of crude substance of which, according to the colorimetric method, 220 mg proved to be pure gallic acid.

The ascertainment of molecular weights according to RAST gave the following figures:

0.288	0.663	0.376	mg substance in
7.701	10.960	7.056	mg camphor:
△ : 8.6	13.9	12.6° C.	

Calculated molecular weight for  $C_7H_6O_5$  (gallic acid) : 170

Found: . . . . . 174, 174, 169.

##### 5. Preparation of theotannin.

100 grammes of green tea leaves ( $p + 2$ ) were boiled during 30 minutes with 250 ml distilled water. After cooling down the warm filtrate was shaken three times with benzol and after that three times with chloroform. By means of a nitrogen current the chloroform was removed from the watery solution, which was then extracted with ether during 12 hours. After distilling the ether we dissolved the treacly residue in 25 ml distilled water.

The precipitate that formed itself when neutral lead acetate was added in excess, was washed with water a few times. Then the leadsalt was removed by means of centrifuge and treated with hydrochloric acid (5 %), so that the lead chloride precipitated and the theotannin passed into the watery solution. This solution was filtrated from the lead chloride; the filtrate was extracted with ether.

The etherial solution was dried on sodium sulphate and the ether evaporated, after which the dry residue was dissolved in a small amount of pure ethyl acetate. When chloroform was added an amorphous white substance precipitated. This was filtrated and while still damp with chloroform it was once again dissolved in ethyl acetate and precipitated with chloroform. The precipitate was washed with chloroform until the filtrate left no solid substance when evaporated on a watch-glass.

When the precipitation with chloroform is done very carefully crystals may be formed on the sides of the flask.

The theotannin which was still very damp with chloroform was dried with the filter in a vacuum dissiccator over  $P_2O_5$ . In this way absolutely colourless theotannin can be prepared. This product is quite tenable under nitrogen, when all moisture is carefully excluded.

*Reactions on theotannin and gallic acid.*

	theotannin	gallic acid
gelatine solution	precipitate	no precipitate
limewater	purple	blue → red
soda and sodium bicarbonate	brownish red when exposed to air (tea colour)	green when exposed to air
ferric chloride	blue	blue

In order to ascertain whether the theotannin, thus prepared still contained free gallic acid we dissolved 80 mg in 5 ml water; 10 ml gelatine solution and 1 g kaolin were added. After shaking the mixture during 45 minutes it was filtrated. In no way was there any gallic acid to be traced in the filtrate.

*6. Decomposition of theotannin by *A. niger*.*

160 mg theotannin was dissolved in 5 ml of a solution, containing per liter 1.00 g ammonium sulphate, 0.08 g mono ammonium phosphate, 0.12 g potassium sulphate, 0.30 g magnesium sulphate and a trace of zinc sulphate.

After adding 0.1 g saccharose to this solution we inoculated it with spores of *A. niger*. After standing  $3 \times 24$  hours at roomtemperature ( $\pm 28^\circ \text{C}$ ) a heavy mycelium proved to have grown, whereas the tannin had disappeared almost completely from the solution.

After filtrating the liquid from the mycelium we added an ample quantity of sodium bicarbonate to the solution. The liquid was shaken three times with ether and after that acidified and completely extracted with ether. After drying the ethereal solution on sodium sulphate and evaporating the ether we obtained a yellow crystalline product (weight after drying 30 mg).

From the colorimetric determination we learned that it contained 25 mg pure gallic acid. As, theoretically, only 38.9 mg gallic acid can be expected from 160 mg theotannin, this result of 25 mg may be considered to be high, when the obvious loss during isolation is taken into account.

After recrystallizing the crude substance from water we obtained a colourless product, which melted at  $239^\circ \text{C}$  and of which the mixture with pure gallic acid showed no depression of the melting point.

*7. Hydrolysis of theotannin by the ferment of *A. niger*.*

The enzyme, needed for these tests was obtained from a culture of *A. niger* according to the directions of FREUDENBERG<sup>1)</sup>. We added 25 mg of the enzyme, isolated from *A. niger*, to a solution of 100 mg theotannin in 5 ml distilled water. After having kept this mixture at roomtemperature

<sup>1)</sup> FREUDENBERG, Chemie der natürl. Gerbstoffe, Berlin 1920, p. 48.

(27 to 28° C) during two days, we extracted it with ether. The etherial solution was shaken with a solution of sodium bicarbonate.

The fraction of bicarbonate, which had been acidified with diluted hydrochloric acid, was once more extracted with ether. When the ether was evaporated fine gallic acid crystals remained.

#### 8. Stability of gallic acid under the action of the ferment of *A. niger*.

A solution of 10 ml 1 % gallic acid, 10 ml saltsolution (see above) and 0.1 g saccharose was inoculated with spores of *A. niger*. After  $5 \times 24$  hours a heavy mycelium had formed itself, whereas the titrimetric method gave no indication of a decrease in the content of gallic acid.

#### *Summary.*

Three different experiments proved that the enzyme of *A. niger* is able to split off gallic acid from theotannin:

- a. *A. niger* was inoculated on a decoction of fresh tea leaves.
- b. We inoculated *A. niger* on a solution, containing theotannin, saccharose and nutritive salts.
- c. The enzyme, isolated from *A. niger*, was added to a solution of theotannin in water.

After some days we could isolate crystalline gallic acid from each of the three liquids. The gallic acid obtained in this way was identified by means of melting point, molecular weight and melting point of the mixture of the isolated substance with pure gallic acid. We found that gallic acid is not decomposed by the enzyme of *A. niger*.

Although it may very well be possible that there are different tannins in tea, the conclusion that at least one of these tannins is a gallic acid ester, may certainly be drawn from the present investigations.

*Proefstation West-Java.*

*Buitenzorg, Maart 1937.*

**Botany.** — *Sur la transpiration de quelques halophytes cultivées dans des milieux différents en comparaison avec celle de quelques non-halophytes.* Par M. J. ADRIANI. (Communicated by Prof. J. C. SCHOUTE.)

(Communicated at the meeting of May 29, 1937.)

### 1. *Introduction.*

En 1898 SCHIMPER (10) exposait sa conception — longtemps classique — des halophytes. Etant données les nombreuses analogies morphologiques et anatomiques présentées par les halophytes et les xérophytes succulentes, on doit considérer les halophytes comme des xérophytes. Les taux élevés en sels des sols où elles vivent rendraient difficile l'absorption de l'eau par les halophytes, pour lesquelles les sols salés seraient „physiologiquement secs”; la circulation de l'eau dans ces plantes et leur transpiration seraient de ce fait limitées.

Cette conception a été critiquée, notamment par VON FABER (5) et STOCKER (12, 13, 14) qui, dans leurs expériences sur la transpiration ont trouvé des valeurs élevées pour les halophytes; de plus il résultait des recherches de DUVAL-JOUVE (4), de CHERMEZON (3) et de VAN LANGENDONCK (8) que les caractères anatomiques des halophytes n'étaient pas xéromorphiques, de sorte qu'à partir de 1925 environ la théorie de SCHIMPER était généralement abandonnée.

Cependant, les objections précédentes sont à leur tour contestées. Les expériences de BRAUN-BLANQUET, BHARUCHA et MEIER (2) sur la transpiration comparée de quelques halophytes méditerranéennes et de quelques plantes xéromorphiques des dunes ont montré que les halophytes transpirent très peu. SCHRATZ (11) étudiant la transpiration des halophytes du littoral de la mer du Nord est arrivé à la même conclusion. Ces dernières publications me conduisent à faire connaître brièvement les résultats de quelques expériences faites sur ce sujet au laboratoire de physiologie végétale de l'université municipale d'Amsterdam en 1934.

### 2. *Dispositifs expérimentaires, méthode de mesure.*

Les halophytes étudiées (*Obione portulacoides*, *Salicornia herbacea* etc.) ont été cueillies au printemps à l'état de plantules généralement et, pour un certain nombre à l'état de jeunes plantes, dans leurs stations naturelles sur le littoral de la mer du Nord (Bergen op Zoom). Au jardin botanique je les cultivais dans une serre sur un sol sablonneux contenant des concentra-

tions d'eau de mer différentes [relation eau de mer: eau distillée = 1 : 0 (= 1 eau de mer); 1 : 1 (=  $\frac{1}{2}$  eau de mer); 1 : 2 (=  $\frac{1}{3}$  eau de mer); 1 : 3 (=  $\frac{1}{4}$  eau de mer)]. Les mésophytes étudiées comparativement (*Lamium maculatum*, *Ajuga reptans*, *Erica Tetralix* etc.) ont été cueillies dans le jardin botanique de l'université.

Les mesures de la transpiration ne furent effectuées que lorsque les plantes se furent bien adaptées à leur nouveau milieu, vers la fin du mois de juillet et au mois d'août. De préférence j'ai choisi des jours clairs, sans nuages. Les halophytes étant sorties de la serre où elles étaient cultivées, leur transpiration fut déterminée en pesant avec la balance analytique des tiges ou des feuilles fraîchement coupées, puis, en repesant les mêmes éléments après une exposition de deux minutes à l'air libre. C'est par la différence de poids qu'on est à même de mesurer la quantité d'eau transpirée. Pour la critique de cette méthode je renvoie au travail de PFLEIDERER (9).

Pratiquement on peut exprimer les résultats soit par la quantité d'eau transpirée par unité de surface ( $T/s$ ;  $T$  = transpiration en milligrammes pendant une minute,  $s$  = surface en  $dm^2$  de la côté inférieure de la feuille), soit par la quantité d'eau transpirée par unité de poids frais ( $T/p.f.$ ;  $T$  = transpiration en milligrammes pendant une minute;  $p.f.$  = poids frais en grammes).

Si l'on veut comparer la transpiration d'espèces mésophiles, l'unité adoptée (surface ou poids frais) a moins d'importance que lorsqu'il s'agit d'une comparaison entre mésophytes et halophytes, car, à poids égal ces dernières ont une surface plus faible en rapport avec un volume plus grand. Il en résulte que les valeurs de la transpiration calculées par unité du poids frais seront toujours trop basses pour les halophytes. Il paraît donc préférable de calculer la transpiration en fonction de l'unité de surface. Mais il faut considérer par contre que la surface, mesurée au moyen d'un planimètre n'est pas la surface transpirante au sens propre du mot. Sans tenir compte de la cuticule, la surface transpirante se compose principalement des espaces intercellulaires, dont la fonction est réglée par les ouvertures stomatiques, en ce sens que, dans beaucoup de cas les stomates interviennent comme le „facteur limitant“ de la transpiration [HARTSUYKER (6)]. Au point de vue écologique on préfère le calcul en fonction de l'unité de poids frais [WALTER (15), VAN LANGENDONCK (8)], puisque c'est seulement d'après cette méthode que l'intensité de la transpiration reflète l'écologie des stations. J'ai appliqué les deux méthodes pour calculer la transpiration ( $T/s$  et  $T/p.f.$ ) dans tous les cas où il m'était possible de déterminer la surface au moyen d'un planimètre.

Si par les expériences il se trouve que la transpiration des halophytes est limitée comparée à celle d'autres plantes — que celle-ci soit calculée par unité de poids frais ou par unité de surface — on a le droit de conclure que les halophytes transpirent peu.

### 3. La transpiration des halophytes cultivées dans des milieux différents.

Il résulte des courbes 1 à 7, relatives à la transpiration de *Obione portulacoides* et de *Salicornia herbacea*, que la transpiration diminue lorsque

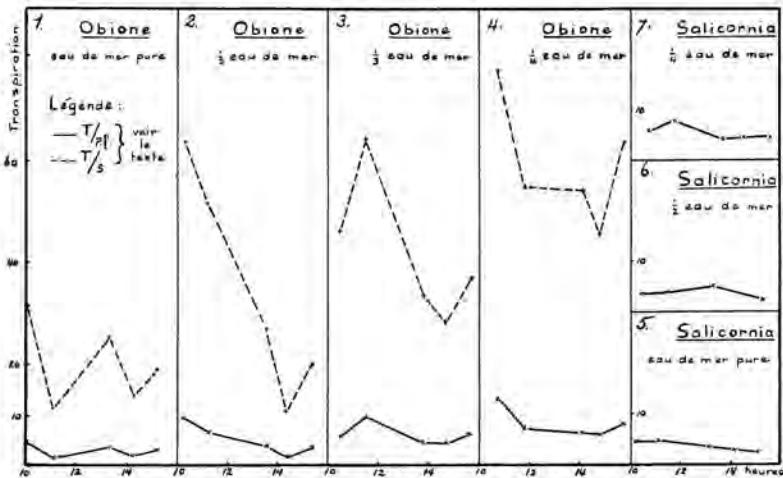


Fig. 1 à 4. Courbes journalières de la transpiration du 8 août 1934;  
Fig. 5 à 7. Celles du 16 août 1934.

la concentration des sels s'élève dans la rhizosphère. [Comparer les résultats de KELLER (7)].

Valeurs moyennes de  $T/s$  pour  
*Obione*:

eau de mer pure . . . . .	19,9
$\frac{1}{2}$ eau de mer . . . . .	34,3
$\frac{1}{3}$ eau de mer . . . . .	41,8
$\frac{1}{4}$ eau de mer . . . . .	59,1

Egalement *Salicornia*  $T/p_f$ :

eau de mer pure . . . . .	3,5
$\frac{1}{2}$ eau de mer . . . . .	3,65
$\frac{1}{4}$ eau de mer . . . . .	5,35

Dans le cas de *Salicornia* les différences sont moins nettes; ceci s'explique sans doute par le fait que pendant les mesures le ciel était nuageux.

### 4. La transpiration des halophytes comparée à celle de non-halophytes.

Les valeurs moyennes résultant de toutes mes mesures de la transpiration sont réunies dans le tableau ci-dessous pour faciliter l'examen générale de toutes les données. On y trouve les valeurs de la transpiration en fonction de l'unité de poids frais et également celles en fonction de l'unité de surface.

J'ai ajouté encore les résultats des mesures de la transpiration chez quelques halophytes méditerranéennes, mesures faites par la même méthode dans la station naturelle de ces plantes au bord de l'étang de Pérols (près de Montpellier) en 1933 en collaboration avec H. MEIER (1). Les résultats peuvent être résumés ainsi: si l'on calcule la transpiration en fonction de

TABLEAU. Valeurs moyennes de la transpiration.

	Date	T/p.f.	T/s.
Saponaria officinalis	18—7—34	28.2	73.3
Comarum palustre	16—7—34	19.6	32.4
" "	31—7—34	24.6	40.4
Valeriana officinalis	16—7—34	15.4	40.6
Ajuga reptans	18—7—34	9.62	34.6
" "	31—7—34	15.3	50.—
Erica Tetralix	16—7—34	9.5	—
" "	31—7—34	16.9	—
Calluna vulgaris	18—7—34	3.72	—
" "	1—8—34	6.11	—
Arctostaphylos uva ursi	16—7—34	5.—	21.—
<i>Plantes cultivées:</i>			
Obione portulacoides (1)	31—7—34	3.31	29.8
" "	8—8—34	2.64	19.9
Obione portulacoides ( $\frac{1}{2}$ )	1—8—34	4.23	31.7
" "	8—8—34	5.—	34.3
Obione portulacoides ( $\frac{1}{3}$ )	31—7—34	6.63	50.2
" "	8—8—34	6.04	41.8
Obione portulacoides ( $\frac{1}{4}$ )	1—8—34	5.75	42.1
" "	8—8—34	8.1	59.1
Salicornia herbacea (1)	16—8—34	3.5	—
Salicornia herbacea ( $\frac{1}{2}$ )	16—8—34	3.65	—
Salicornia herbacea ( $\frac{1}{4}$ )	16—8—34	5.35	—
" "	1—8—34	5.62	—
<i>Plantes du littoral de la Méditerranée:</i>			
Suaeda maritima	6—7—33	3.92	—
Juncus maritimus	6—7—33	3.78	—
Obione portulacoides	6—7—33	2.88	—
Salicornia radicans	6—7—33	2.51	—
Salicornia herbacea	6—7—33	2.32	—
Salicornia macrostachya (Arthrocnemum glaucum)	6—7—33	0.48	—

l'unité de poids frais, la transpiration des halophytes est limitée par comparaison avec celle des non-halophytes. Il apparaît clairement qu'il en est de même si la transpiration est calculée en fonction de l'unité de surface. Donc : les halophytes transpirent peu en comparaison avec les mésophytes.

Mes conclusions rejoignent encore celles de BRAUN-BLANQUET et de SCHRATZ relativement à la circulation d'eau limitée chez les halophytes.

Les différences de transpiration entre halophytes et mésophytes qui ressortent si nettement à l'examen du tableau se vérifient aussi par les courbes journalières de la transpiration des différentes plantes (voir les courbes 8 à 17). Il en résulte également que la transpiration calculée en

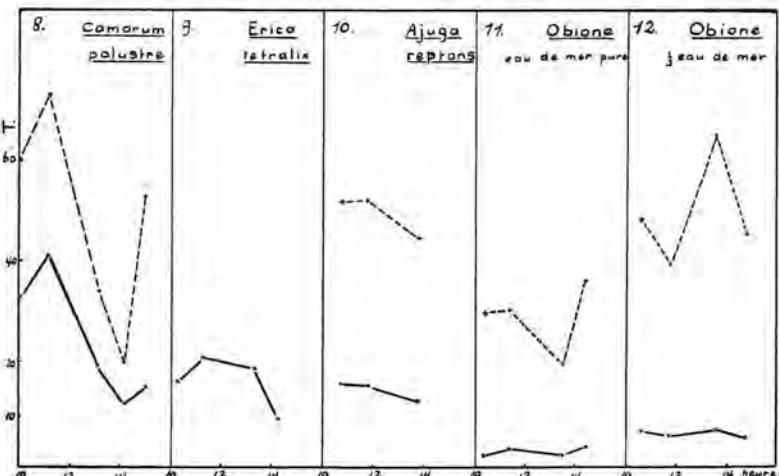


Fig. 8 à 12. Courbes journalières de la transpiration du 31 juillet 1934.

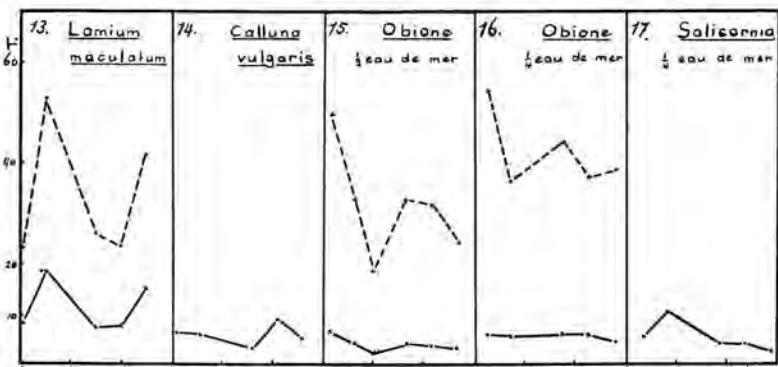


Fig. 13 à 17. Courbes journalières de la transpiration du 1 août 1934.

fonction de l'unité de surface est limitée aussi; pour les plantes halophiles cultivées dans le sol sablonneux dont la concentration des substances nutritives est égal à celle de l'eau de mer on trouve une valeur beaucoup plus basse que chez les non-halophytes. Mes expériences donnent donc des résultats contraires à celles de STOCKER (12, 13).

##### 5. Conséquences en rapport avec la théorie de SCHIMPER.

Dans la théorie de SCHIMPER les halophytes sont considérées comme des xérophytes qui limitent leur circulation d'eau non seulement parcequ'elles se trouvent sur un sol „physiologiquement sec” pour eux, mais aussi parceque leur structure serait xéromorphique. Cette dernière présomption est

inexacte : l'étude anatomique des halophytes ne met en évidence aucun des dispositifs susceptibles de limiter la transpiration comme on observe chez les xérophytes succulentes (CHERMEZON). Mais puisque la circulation d'eau est limitée chez les halophytes, ainsi que le démontrent mes mesures, et donnée la grande différence entre la transpiration des halophytes cultivées dans des concentrations différentes, il est possible que la constitution du sol rend difficile la résorption d'eau. En ce sens, le sol serait „physiologiquement sec”.

#### SOMMAIRE.

1. La transpiration (mesurée par pesage de tiges coupées) chez *Obione portulacoides* et *Salicornia herbacea*, diminue à mesure qu'augmente la concentration des sels dans la rhizosphère (courbes 1 à 7).

2. Par comparaison avec quelques mésophytes les halophytes ont une transpiration limitée, que l'on exprime les résultats des mesures en fonction de poids frais, ou en fonction de l'unité de surface; mais dans ce dernier cas, les différences sont moins nettes (tableau, courbes 8 à 17).

*Amsterdam, le 27 mai 1937.*

*Laboratoire de physiologie végétale  
de l'université.*

#### BIBLIOGRAPHIE.

1. ADRIANI M. J. Recherches sur la synécologie de quelques associations halophiles méditerranéennes. Comm. S. I. G. M. A. 11, Montpellier 1934.
2. BRAUN-BLANQUET J., F. BHARUCHA und H. MEIER. Zur Frage der „physiologischen Trockenheit der Salzböden”, Ber. Schw. Bot. Ges. 40, 21, 1931, Comm. S. I. G. M. A. 11.
3. CHERMEZON, H. Recherches anatomiques sur les plantes littorales. Ann. Sc. nat. bot. 9. série, 12, 117, 1910.
4. DUVAL-JOUVE, M. Des Salicornias de l'Hérault. Bull. Soc. bot. de France, XV, 132, 1868.
5. FABER, F. C. VON. Ueber die Transpiration und den osmotischen Druck bei den Mangroven. Ber. d. bot. Ges. 31, 277, 1913.
6. HARTSUIJKER, K. Kritische Bemerkungen über einige der wichtigsten Methoden zur Ermittlung des Oeffnungszustandes der Spaltöffnungen. Rec. Trav. Bot. néerland. XXXII, 516, 1935.
7. KELLER, B. Halophyten- und Xerophytenstudien. Journ. of Ecology, 13, 225, 1925.
8. LANGENDONCK, H. J. VAN. De vegetatie en oecologie der Schorrenplanten van Saaftingen. XXIII. bot. Jaarboek Dodonaea, Gent, 1932.
9. PFLEIDERER, H. Kritische Untersuchungen zur Methodik der Transpirationsbestimmungen an abgeschnittenen Sprossen. Jahrb. f. wiss. Botanik 26, 305, 1933.
10. SCHIMPER, A. F. W. Pflanzengeographie auf physiologischer Grundlage, Jena, 1898.
11. SCHRATZ, E. Beiträge zum Halophytenproblem IV. Jahrb. f. wiss. Bot. 84, 593, 1937.
12. STOCKER, O. Beiträge zum Halophytenproblem. Zeitschr. f. Bot. 16, 289, 1924.
13. ————— Beiträge zum Halophytenproblem II. Zeitschr. f. Bot. 17, 1, 1925.
14. ————— Das Halophytenproblem. Ergebnisse der Biologie, 3. Band, Berlin, 1928.
15. WALTER, H. Zur Kritik der Transpirationsversuche. Zeitschr. f. Bot. 18, 1926.

**Botany.** — *Padang soil, an example of podsol in the Tropical Lowlands.*

By H. J. HARDON. (From the Institute for Soil Science, Buitenzorg (Java).) (Communicated by Prof. L. G. M. BAAS BECKING.)

(Communicated at the meeting of May 29, 1937.)

In a recently published article I described some genuine podsol profiles from the Arfak Mountains of Northwestern New Guinea at about 2000 meters above sea level. Except for the absence of seasons the climate at this elevation is rather similar to a coastal or maritime one in the temperate zones. It is possible, however, as the evidence presented below shows, that true podsol, which occurs mainly in the climatic zone north of the 40th degree of latitude of the northern hemisphere, may develop, in distinct instances, in the tropical lowlands. There seems to be no doubt of this after studying some soil samples, collected by Dr. POSTHUMUS who accompanied Ir. H. WITKAMP, the geologist, during his visit to the Padang Loewai in the Koetai region of the residency S. E. Borneo.

Padangs (padang is the Malayan name for plain) are quartz sandy plains with an aberrant scanty flora, which has for many years interested botanists. VAN STEENIS has given a comprehensive compilation of the flora of the padangs in the different islands of the Malayan Archipelago. These padangs are known from Sumatra (KOORDERS, FREY—WYSSLING), Bangka and Billiton (VERBEEK, VALETON), Djemadja (VAN STEENIS), Western Borneo (COOMANS DE RUITER, POLAK), Middle Borneo (ENDERT), Southern Borneo (DIELS and HACKENBERG) and Celebes (MOHR). And RICHARDS has described similar plains in Sarawak.

VERBEEK supposed that the scanty and peculiar flora of the padangs in Bangka was due to the impermeability of the sandy hardpan, which he found below white sandy superficial layer and which was the result of cementation by organic acids. This layer corresponds to the horizon of consolidated brown sand which DIELS and HACKENBERG found at a depth of 150 cm in the sandy plains of South Borneo, and which is similar to the illuvial horizon of the usual temperate podsol profile. Dr. PENDLETON reports (personal communication) that in southern Siam along the coast of the Gulf, there are a number of similar padangs, which from field study seem obviously to be a tropical podsol.

It seems also that padangs are rather widely distributed in the Netherlands Indies and it is probable that on these poor quartz sandy plains podsolization is the general soil forming process. I place below on record besides the results of the analyses of the soil samples from Padang Loewai, also those of samples from a padang in Bangka. I am much indebted to

Ir. A. BREGMAN, who was so kind as to very accurately sample some padang soil profiles and thus enabled me to extend these investigations.

Samples from a padang soil profile in Billiton, present in the collections of the Bodemkundig Instituut at Buitenzorg and from which the bleached layer has been formerly identified as „schierzand” (= Bleisand) were too small for a detailed analysis.

**GEOGRAPHY.** According to a description by Ir. H. WITKAMP the Loewai Padang is situated in the Koetai region of the residency of S. E. Borneo, near the equator at longitude  $116^{\circ}$  E., between the subdivision headquarters Melak, on the Mahakam, and Damai on the Kedang Pahoe, on the watershed between the two rivers.

The Loewai Padang is a somewhat undulating plain about 90 m above sea level, being a deposit of the Mahakam and possibly also partly of the Pahoe river. With an average width of 3 km this plain extends in a S. W. — N. E. direction for an unknown distance. On the slopes are some brownish coloured streamlets which flow out from the light coloured sandy soil and drain the higher land.

The padang in Bangka, from which samples have been studied, is situated near Aer Lajang, between Soengeiliat and Bakem. It is a flat, gently sloping, plain about 10 m above sea level. After heavy rains it is partly inundated, but during periods of drought the loose white sandy soil is very dry. VERBEEK, who visited these padangs about 40 years ago, supposed that they constitute what was formerly the shallow end of the Klabat Bay.

**CLIMATE.** On account of the low elevation the temperature is high, with only slight variations; the annual average is about  $26^{\circ}$  C. In the neighbourhood of the Loewai Padang rainfall observations have been recorded at Melak and Demai. As will be noted from table 1 the largest amount of rainfalls during the months of November, December, January and April with more than 300 mm each; the driest months being July, August and September with still an average of about 130 mm. The annual average is approximately 3000 mm.

For the northern part of Bangka, rainfall data are available for Belinjoe, north-west of the padang, and for Batoeroesa situated to the southeast. The months of greatest rainfall are December and January with more than 300 mm. each, while the driest months are June, July, August and September, although even during the dry season the monthly rainfall is more than 100 mm. As MOHR states, this means that throughout the year the rainfall exceeds the evaporation, so that the soil is constantly being leached.

**VEGETATION.** As POSTHUMUS studied in detail the peculiar flora of the Bornean Loewai Padang, we may briefly summarize his descriptions as follows:

TABLE I. Average monthly and annual rainfall in millimeters.

	Jan.	Febr.	Mar.	Apr.	May	June	Jul.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Annual
Melak	332	271	259	370	332	246	116	144	152	227	354	353	3156
Damai	325	237	300	369	227	207	131	112	131	223	320	328	2909
Belinjoe	403	190	222	270	248	184	173	157	184	234	357	487	3109
Batoeroesa	333	228	269	239	205	160	139	127	110	157	222	310	2499

"The vegetation has much in common with that of other padangs. The country reminds one strongly of the European Heaths. It is an open plain with here and there groups of shrubs (*Tristana obovata*, *Vaccinium bancanum*) alternating with open spots of glittering quartz sand. There are also numerous orchids and ferns, the ant-plants *Hydnophytum*, *Myrmecodia* and *Dischidia* and the carnivorous *Nepenthes Reinwardtiana*. In the open spots are numerous lichens and sods of *Xyris complanata*.

VALETON has described the vegetation of the flora of the padangs on Bangka and VAN STEENIS quotes from that description as follows: "The white layer varies in thickness from  $\frac{1}{2}$ —5 centimetres, and sometimes it is grey immediately below the surface, where fine black humus or mosses occur. The vegetation nowhere forms a compact mass or sod. Groups of low and high shrubs, generally with higher shrubs or small trees in the middle, alternate with a lower vegetation, which is always limited to separate spots or clumps, so that the white sand shows everywhere and in many places even predominates. Among the plants which were collected here the following are mentioned as characteristic: *Drosera Burmanni* in the dampest parts, forming dark areas when seen from a distance, often growing on the top of small colums of sand; *Fimbristylis* sp., *Rhynchospora* sp., *Xyris microcephala* and *X. bancana*".

He also mentions that on the lower-lying padangs *Baeckia frutescens*, which reminds one much of the *Calluna* of the European heaths, and which is also abundant in the podsol region of the Arfak mountains, forms more than half of the vegetation.

DESCRIPTION OF THE SOIL PROFILE. From Padang Loewai the samples of two profiles and from the padangs of Bangka those of six profiles have been studied (see table 1<sup>A</sup>). The profiles from each island were so similar in composition that for the sake of brevity only the analytical figures from the most representative profiles of each island need be recorded here.

LABORATORY INVESTIGATIONS. *Granular analysis.* Except for the samples of the superficial layers, which consist almost entirely of organic material and have not been analyzed, the results of the granular analysis of the samples of the two profiles are presented in table 2.

TABLE 1A.

	Sample number	Horizon	Depth	Description
Padang Loewai	41292	A <sub>0</sub>	0—20 cm	Brownish black cover of half decomposed organic material.
	41293	A <sub>2</sub>	10—120 "	Loose white quartz sandy layer.
	41294	B	120—170 "	Yellowish brown quartz sandy layer.
Padang on Bangka	57986	A <sub>0</sub>	0—10 cm	Black cover of half decomposed organic material intermixed with coarse quartz sand.
	57987	A <sub>1</sub>	10—25 "	Loose greyish black humic quartz sandy layer.
	57988	A <sub>2</sub>	25—40 "	Loose greyish white quartz sandy layer.
	57989	B <sub>1</sub>	40—70 "	Dark brown very compact quartz sandy hardpan.
	57990	B <sub>2</sub>	70—100 "	Loose light brown quartz sandy layer.

TABLE 2. Granular composition (in percentages).

size class \ horizon	Padang Loewai		Bangka padang			
	A <sub>2</sub>	B	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>
2 mm gravel	0	0	0	0.1	0.1	0.1
2—1 "	1.2	1.2	0.2	0.4	0.4	0.3
1—0.5 "	39.0	35.4	5.5	4.6	4.8	6.3
0.5—0.2 "	47.0	49.0	52.3	36.6	42.8	51.7
0.2—0.1 "	4.0	2.6	14.0	25.0	15.3	17.9
0.1—0.05 "	6.1	5.7	23.6	27.4	23.6	15.9
0.5—0.02 "	1.4	1.9	2.8	4.4	4.6	2.0
0.02—0.005 "	0.9	1.6	0.6	1.0	1.3	0.5
0.005—0.002 "	0.3	0.7	0.4	0.3	0.7	0.6
0.002—0.0005 "	0.1	0.7	0.2	0.1	0.5	1.3
0.0005 "	0.1	1.4	1.0	0.2	6.0	2.7

The Padang Loewai soil seems to be somewhat coarser than the Bangka soils.

The bleached layers show the highest percentages of sand while they have scarcely one percent of clay. The brownish coloured B-horizon contains more clay than the overlying bleached one, due to the presence of

the precipitated iron- and aluminium oxides and organic matter. Its percentage, however, is still very small, not exceeding ten percent.

The granular analysis gives sufficient information about the physical properties. Except the consolidated brown layer of the Bangka padang, which is undoubtedly the reason that damp places occur in the lower parts of this plain, this light textured soil must be pervious for rainwater.

*Organic matter.* A layer of halfdecomposed organic material, which covers the bleached white quartz sand occurs, especially under the bushes. In table 3 are summarized the results of the chemical analysis, made according to the methods of the Peat Experiment Station at Bremen, of the sample from the Padang Loewai.

TABLE 3. Chemical composition of the raw humus layer.

Sample number	loss on ignition	Ash	C	N	CaO	MgO	K <sub>2</sub> O	P <sub>2</sub> O <sub>5</sub>	SiO <sub>2</sub>
	Percentages of dry matter								perc. of ash
41292	66.57	33.43	33.71	0.59	0.00	0.02	0.05	0.03	89.63

The base content is exceedingly low; it is of interest to note that calcium, which averages 0.35 % in oligotrophic peat, was in this sample so small in amount it could not be determined. Magnesium and potassium occur only in very small quantities. The C/N ratio of 57 is very high. Since Dr. POSTHUMUS could not locate any traces of forest burning, this high ratio cannot be caused by charcoal. Moreover this soil is so poor in plant nutrients that the natives never think of cultivating it. Therefore the high C/N ratio must be ascribed to the incomplete humification and also to the presence of undecomposed organic materials.

In contrast to the horizon of accumulation where the aluminium- and iron-humates are precipitated, and which contains 1.2 % of organic matter, the bleached zone underlying the raw humus cover only shows 0.1 % of organic matter. The hardpan of the Bangka profile contains much more organic matter, amounting to 5.2 %. This matter cements the sand particles of this layer. The nitrogen content of this organic matter is very low, finding its expression in the high C/N ratio of 77.

*The reaction of the profile.* The acidity of the raw humus covers of the two profiles is high, the pH being lower than 3. The pH of the bleached layer is rather high, probably due to the almost total absence of colloidal material. The B-horizon, which contains much more clay, shows a lower pH, especially the hardpan of the Bangka profile, which in addition to more clay contains high percentage of humic acids.

As would be expected from the small clay fraction the hydrolytic acidity

of the A<sub>2</sub>-layer is low, increasing in the underlying B-horizon, which must be ascribed, at least in part, to the organic complex component of this layer. Only the samples of the B-horizon gave any exchange acidity at all; the bleached layers did not give enough to measure.

TABLE 4. pH, hydrolytic and exchange acidity.

Horizon	pH		Hydrolytic acidity		Exchange acidity	
	Padang Loewai	Bangka	Padang Loewai	Bangka	Padang Loewai	Bangka
A <sub>0</sub>	2.8	2.7	—	—	—	—
A <sub>1</sub>	—	3.9	—	15.7	—	0
A <sub>2</sub>	6.1	6.1	2.3	4.0	0	0
B <sub>1</sub>	5.4	3.9	22.7	122.4	1.0	16.8
B <sub>2</sub>	—	4.6	—	42.7	—	3.1

*Chemical features of the soil.* To ascertain the "total" phosphoric acid and base content of the soil the samples were extracted at room temperature with 25 % hydrochloric acid. Following Tamm's method an acid solution of ammonium oxalate was used in the determination of the mixed inorganic colloids of aluminium and iron oxide and silica. The results of these analyses are given in table 5.

TABLE 5. Chemical composition of the soil (in percentages).

Horizon	P <sub>2</sub> O <sub>5</sub>		CaO		MgO		K <sub>2</sub> O		SiO <sub>2</sub>		Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>		Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	
	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II
A <sub>1</sub>	—	0.002	—	0.022	—	0.009	—	0.001	—	0.06	—	0.32	—	0.05
A <sub>2</sub>	0.001	0.001	0.008	0.032	0.009	0.007	0.024	0.002	tr.	0.08	0.06	0.27	0.03	0.03
B <sub>1</sub>	0.004	0.005	0.002	0.029	0.002	0.002	0.025	0.004	0.03	0.14	0.64	1.58	0.91	0.07
B <sub>2</sub>	—	0.007	—	0.035	—	0.007	—	0.004	—	0.22	—	1.66	—	0.24

I = Padang Loewai; II = Bangka.

The content of phosphoric acid is low, especially in the bleached layer. The percentages of calcium and magnesium, which are exceedingly low as compared with other tropical soils, in the bleached horizon are somewhat higher than in the underlying brown horizon. The potassium content of the samples from Padang Loewai is rather high, possibly due to the presence of small quantities of potassium bearing feldspar.

As may be expected, the ammonium oxalate extracts of the samples of the bleached horizons are very low in sesqui-oxides, the content being much higher in the zone of accumulation. The brown colour of the B<sub>1</sub>-

layer of the Padang Loewai profile is chiefly caused by iron oxides, while the samples of the hardpan of the Bangka soil yielded only minute quantities of these oxides. In the zone underlying the hardpan, however, the iron oxide-content is much higher. The rather low percentage of iron oxide in the hardpan is probably due to reduction processes which take place in the presence of the large quantities of humic acids, during the temporarily submerged conditions after heavy rainfall. Moreover the acidity of this layer is so high that iron humates, leached from the eluvial zone, do not precipitate and will be partly carried away by the water in the small streams which have their source in the lower parts of the padang, or will be precipitated in the underlying, less acid, B<sub>2</sub>-horizon. The content of aluminium oxide of the B-horizon is high as compared with that of the bleached layer.

The leaching of the sesquioxides from the A-horizon and the precipitation of these oxides in the B-layer may be clearly illustrated by the results of the chemical composition of the colloidal fractions (< 2  $\mu$ ) of the samples of the Bangka podsol, as shown in table 6.

TABLE 6. Silica and base content of the clay fraction (< 2  $\mu$ ) (in percentages)

Horizon	SiO <sub>2</sub>	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	TiO <sub>2</sub>	MnO	CaO	MgO	K <sub>2</sub> O	Na <sub>2</sub> O	$\frac{\text{SiO}_2}{\text{Al}_2\text{O}_3 + \text{Fe}_2\text{O}_3}$ (mol. ratio.)
A <sub>0</sub>	48.94	18.84	6.37	10.07	0	5.25	3.42	0.46	5.45	3.62
A <sub>1</sub>	60.63	12.34	3.14	14.16	0	4.69	2.50	0.09	1.82	7.17
A <sub>2</sub>	65.20	10.12	4.20	8.62	0	4.58	4.35	0.27	2.12	8.64
B <sub>1</sub>	18.22	70.75	4.42	2.69	0	2.00	0.05	0.18	1.05	0.42
B <sub>2</sub>	14.01	73.21	6.50	2.71	0	0.99	0.10	0.23	1.24	0.31

The SiO<sub>2</sub>-sesquioxides ratio, already high in the colloidal fraction of the superficial layer, increases in the underlying A-horizons, due partly to the loss of iron and aluminium, partly to the contamination with finely divided free SiO<sub>2</sub>. As is to be expected the B-layers show a low ratio.

DISCUSSION. The process of podsolization is intimately related to the presence of an acid humus cover. The humic acids, originating from the organic material of this layer, dissolve the sesquioxides from the superficial soil so that they may be carried downward by percolating water to the depth, where they are precipitated. Generally, however, the mineralization of the organic material at the temperature of the tropical lowlands proceeds so rapidly, that acid humus is rather seldom formed under aerobic conditions.

In regions with heavy rainfall throughout the year, on pervious sandy quartz soils, which do not allow capillary rise of the groundwater and

which are poor in bases, it is evident that the formation of this kind of humus may take place. The bases set free by the mineralization of the organic material will be soon removed, leaving humic matter which is poor in bases. Moreover the base content of the vegetation on these poor soils is much less than that on richer soils, as is shown by the results of the analyses in table 7 of leaves<sup>1)</sup>, both of the same plant species, from the padangs and from the Botanic Garden at Buitenzorg (andisitic lateritic soil).

TABLE 7. Chemical composition of the leaves of *Dacrydium elatum* and *Rhodomyrtus tomentosa* from padangs and from the Botanic Garden at Buitenzorg.  
(Percentages of dry matter).

	<i>Dacrydium elatum</i>		<i>Rhodomyrtus tomentosa</i>	
	Padang	Botanic Garden	Padang	Botanic Garden
ash	2.16	7.59	2.58	3.70
CaO	0.59	3.43	0.13	0.58
MgO	0.33	0.69	0.21	0.35
K <sub>2</sub> O	0.52	0.57	0.36	0.50
Na <sub>2</sub> O	0.08	0.05	0.24	0.14
MnO	0.02	0.15	0.07	0.45
P <sub>2</sub> O <sub>5</sub>	0.10	0.15	0.07	0.45

The four factors mentioned, viz. a pervious soil, a soil poor in bases, a constant heavy rainfall and a small base content of the vegetation, make possible the formation of acid humus in the tropical lowlands. The high acidity of the humus in turn causes a partial sterilization and also delays the speed of mineralization, resulting in an accumulation of raw humus under aerobic conditions even in this tropical climate.

The presence of the acid raw humus cover is the cause of the podsol process which, as described in this paper, takes place in the padang soils.

It is remarkable, however, that the most typical zonal soil type may occur extensively as an intrazonal soil, in regions where the climatic factors would not normally favour its formation. Many factors, climatic, geologic, topographic, and biotic, must coordinate to cause the development of this soil type.

#### REFERENCES:

COOMANS DE RUITER, L., *Porphyroglossum Maxwelliae* Ridl. en eenige andere orchideeën gevonden op de zandstrook „Pasir Pandjang". Trop. Natuur **21** (1932) 131—138.

<sup>1)</sup> The leaf-samples are from the Herbarium of the Botanic Garden at Buitenzorg, selected by the botanist Dr. C. G. G. J. VAN STEENIS.

- DIELS, L. und G. HACKENBERG, Beiträge zur Vegetationskunde und Floristik von Süd-Borneo. Bot. Jahrb. **60** (1925) 293—316.
- ENDERT, F. H., Midden-Oost-Borneo-Expedition, Weltevreden 1925.
- FREY-WIJSSLING, A., Over de zandsteppen van Kota Pinang ter Oostkust van Sumatra. Trop. Natuur **22** (1933) 69—72.
- HARDON, H. J., Podsol profiles in the tropics. Nat. Tijdsch. Ned. Indië **96** (1936) 25—41.
- KOORDERS, S. H., see: VAN STEENIS.
- MOHR, E. C. J., De bodem der tropen in het algemeen en die van Ned. Indië in het bijzonder. Amsterdam 1933/1935.
- POLAK, B., Een tocht in het zandsteengebied bij Mandor (West-Borneo). Trop. Natuur **22** (1933) 23—28.
- POSTHUMUS, O., Some remarks on the vegetation on the sandy soil of the Padang Loewai (E. Koetai, E. Borneo). These Proceedings p. 505.
- RICHARDS, P. W., Ecological observations in the rainforests of Mount Dulit, Sarawak. Journ. Ecol. **24** (1936) 1—37.
- STEEFIS, C. G. G. J. VAN, Botanical results of a trip to the Anambas and Natoena Islands. Bull. Jard. Buitenzorg, ser. III. **12** (1932) 151—211.
- TAMM, O., see: O. LEMMERMANN, Methoden für die Untersuchung des Bodens, II Teil, p. 46. Berlin 1935.
- VALETON, TH., Lindenopsis. Een nieuw subgenus der Rubiaceae. Versl. Kon. Akad. Wet. Amsterdam. **17** (1908), 120—126.
- VERBEEK, R. D. M., Geologie van Bangka. Jaarb. Mijnw. Ned. O. Indië, **26** (1897) 60—61.

Buitenzorg, May 1937.

*Bodemkundig Instituut van het  
Algemeen Proefstation voor den Landbouw.*

---

**Histology. — Der Rhythmus des Glykogengehaltes der Leber der weissen Maus, dargestellt durch die Stufenzählmethode.** Von GOTZWALT CHRISTIAN HIRSCH und R. F. J. VAN PEEL. (Aus dem Labor. für exper. Histologie des Zoolog. Institutes d. Univ. Utrecht; Leiter: G. C. HIRSCH). (Communicated by Prof. H. F. NIERSTRASZ).

(Communicated at the meeting of May 29, 1937.)

Die Leber der Säugetiere besitzt allem Anschein nach einen Arbeitsrhythmus. So fand E. FORSGREN 1927 beim *Kaninchen* einen merkwürdigen Antagonismus zwischen dem Aufbau und Abbau des Glykogens einerseits und dem Aufbau der Gallengranula andererseits: wenn die Leber das Stadium einer maximalen Glykogenbereitung durchläuft, dann ist gerade die Bereitung von Gallengranula auf dem Minimum angelangt und umgekehrt. Hunger- und Fütterungszeiten sollen keinen Einfluss auf diese rhythmische Aktivität der Leber haben. FORSGREN meint vielmehr, dass hier ein Eigenrhythmus der Leber zu Tage trete: bei den Kaninchen wenigstens soll das Maximum an Glykogen um etwa 9—10 Uhr gefunden werden, das Minimum bei 14—16 Uhr. Doch scheinen hier noch erhebliche

Schwankungen vorzuliegen, denn in einer Untersuchung, die FORSGREN im folgenden Jahre publizierte, gibt er zwei tägliche Maxima um 2 oder um 14 Uhr an.

Im Jahre 1931 erschien eine ähnliche Untersuchung von A. HOLMQUIST, welche *an Ratten* angestellt wurde. Auch hier wurden 2 Glykogenmaxima gefunden etwa um 21 und 4 Uhr; doch schien das eine Maximum dem Verf. selbst etwas zweifelhaft.

Und schliesslich hat NOEL 1923 an der Leber von *weissen Mäusen* die ersten Beobachtungen eines schwankenden Gehaltes an Mitochondrien und Glykogen gemacht, ohne noch zu genaueren Resultaten zu kommen. Erst ÅGREN, WIELANDER und JORPES haben 1931 *chemisch* nachgewiesen, dass die Glykogenmenge in der Leber einem täglichen Rhythmus unterworfen ist: Der Rhythmus zeigt nur *ein* Maximum und *ein* Minimum binnen 24 Stunden: das Minimum des Glykogengehaltes liegt zwischen 10 und 18 Uhr; das Maximum liegt zwischen 23 und 6 Uhr<sup>1)</sup>; d.h. grob ausgedrückt: in der Nacht wird Glykogen aufgebaut, am Tage wieder abgeschieden.

Dies würde schön zu den physiologischen Vorstellungen passen, dass durch die erhöhte Aktivität der Tagesphase Glykogen ausgeschüttet wird, in der Nacht dagegen aufgebaut. Doch kann man über die Faktoren zunächst noch nichts aussagen. Hunger und Fütterung spielen hier wahrscheinlich keine Rolle; dagegen zeigten die Mäuse eine erhöhte Resistenz gegenüber Insulin am Nachmittag und teilweise auch während der Nacht (ÅGREN, WIELANDER und JORPES).

Diese Untersuchung wurde 1931 von HOLMGREN histologisch ergänzt. Er schätzte in seinen mikroskopischen Praeparaten die Menge des Glykogens (und der Gallengranula) und kam zu dem Ergebnis, dass ÅGREN, WIELANDER und JORPES wahrscheinlich Recht hatten.

Dies sind sehr interessante Rhythmen, denen wir im Laufe der nächsten Jahre näher nachgehen werden. Doch bevor wir in eine Faktorenanalyse des Leberrhythmus eintreten, war es unsere Aufgabe, die nötigen exakten Grundlagen für eine Messung des Rhythmus zu schaffen. Denn ein Rhythmus ist das gesetzmössige Schwanken einer *Masse*: wollen wir demnach einen Rhythmus irgend eines Organes beweisen und dann analysieren, so müssen wir eine *Masse* untersuchen; dies aber können wir nur durch wägen oder zählen. Das wird wohl mal vergessen.

Die bisherigen Untersuchungen des Rhythmus des Leberglykogens basieren alle auf der chemischen quantitativen Extraktion. HOLMGREN untersuchte zwar 1931 *histologisch*, hat aber keine quantitativen Methoden dabei angewendet, sondern basiert auf ÅGREN usw. Uns scheint aber gerade die Anwendung histologisch-quantitativer Methoden zur Erken-

---

<sup>1)</sup> Es ist leider H. HOLMGREN (1931) bei der Wiedergabe der Kurven von ÅGREN, WIELANDER und JORPES ein störender Fehler unterlaufen, indem er die Tageszeiten „am“ und „pm“ verwechselt hat. Darauf dürfen wir wohl eben aufmerksam machen.

nung eines Organrhythmus notwendig, weil auf diese Weise Zusammenhänge entdeckt werden können, die der nur-chemischen Analyse verborgen sind.

Wir wollten deswegen versuchen, ob es nicht möglich wäre, durch die 1913 bis 1929 von G. C. HIRSCH ausgearbeitete histologische Stufenzähl-methode zu exakten Ergebnissen zu kommen. Denn die Schätzungen von HOLMGREN erschienen uns als Methode noch keine Basis für weitere Experimente zu sein, weil sie zu verschwommen ist. HOLMGREN gebraucht zur Schätzung z.B. die Ausdrücke: „Glykogen in reichlicher Menge“, oder „in mässiger Menge“ oder „augenscheinlich weniger Glykogen“, „augenscheinliche Vermehrung“. So wertvoll solche Schätzungen sein können zur Bildung von Hypothesen, als eine Basis zu einer genaueren Bestim-mung des Rhythmus und zur Lösung der Frage der Faktoren dieses Rhythmus kann diese Schätzungs-methode doch nicht dienen.

Bevor wir aber zur eigentlichen Analyse schreiten, musste also erst die Frage untersucht werden, ob man durch die histologische Stufenzähl-methode zu einer ebenso genauen Messung des Glykogens kommen kann wie durch die chemische Methode.

#### *Technik.*

Wir arbeiteten nur an weissen Mäusen, die vollkommen gesund waren. Wir gebrauchten erstens eine Gruppe von 39 weissen Mäusen welche demselben Stamme entsprangen und welche am 10. und 31. März fixiert wurden<sup>1)</sup>; zweitens eine Gruppe von 16 Mäusen aus zwei Stämmen, welche am 14. Februar fixiert wurden. Die Geschlechter waren ungefähr zu gleichen Teilen vertreten. Kleine Leberstücke wurden in Carnoy fixiert. Um zu sehen, welchen Einfluss die Dicke des fixierten Objektes und damit die Schwierigkeit des Eindringens des Fixators auf die Berechnung des Glykogens haben könnte, haben wir die erste Gruppe von 39 Mäusen in zwei Untergruppen geteilt: von der einen Gruppe wurde 2 mm dicke Leberscheiben fixiert, bei der anderen dagegen 5 mm dicke Scheiben. Nach der Fixation wurde in Celloidin eingebettet, daraufhin in Paraffin. Die Schnittdicke muss wenigstens 10  $\mu$  betragen, sonst kann eine Zählung nicht gleichmässig durchgeführt werden. Gefärbt wurde mit BEST's Karmin.

Die Tiere wurden gefüttert in regelmässigen Zeiten mit einer gleich-mässigen Menge von Brot, das in gekochter Milch getränkt wurde.

#### *Methodik.*

Es wurde probiert, eine Zählmethode zur quantitativen Bestimmung des Glykogens anzuwenden. Zu dem Zwecke wurde 4 Stadia der Glykogen-aufstapelung in den Zellen unterschieden:

<sup>1)</sup> Wir sind Herrn Prof. DE BLIECK und Prof. NIESCHULZ sehr dankbar für die Ueberlassung dieser für unsere Zwecke ausgezeichneten Mäuse.

Stadium a (Abb. 1): Zellen, die ganz oder beinahe ganz mit Glykogen gefüllt waren.

Stadium b (Abb. 2): Zellen, die zum grössten Teile mit Glykogen gefüllt sind.

Stadium c (Abb. 3): Etwa die Hälfte bis ein Viertel der Zellen ist mit Glykogen gefüllt.

Stadium d: Die Zellen sind leer.

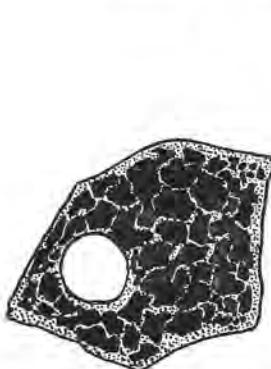


Abb. 1. Stadium a der Leberzelle der weissen Maus: Die Zelle ist beinahe ganz mit Glykogen (schwarz) gefüllt.

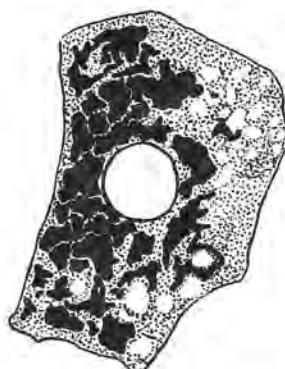


Abb. 2. Stadium b, eine Zelle, die zum grössten Teile mit Glykogen gefüllt ist.

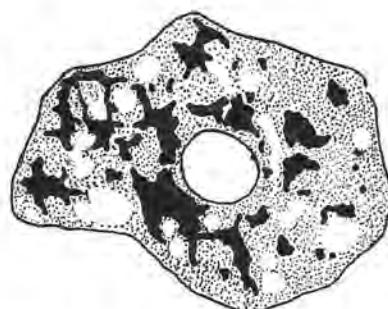


Abb. 3. Stadium c: die Hälfte bis ein Viertel der Zellen ist mit Glykogen gefüllt.

Die Berechnung geschah möglichst objektiv; wir fügten in das Okular eine Nadel ein und bewegten das Objekt mit einem beweglichen Mikroskopisch. Nur diejenigen Zellen, deren Kerne durch die Nadel bei der Bewegung getroffen waren, wurden gezählt. Zuerst wurden die Prozente der vier angegebenen Stadien gezählt und dann prozentualiter berechnet (Abb. 4 und 5). Schliesslich versuchten wir, den Gehalt der ganzen Leber auf Grund dieser prozentualen Berechnungen kurvemässig wieder zu geben (Abb. 6). Zu diesem Zwecke haben wir die errechneten Ziffern für das Stadium a mit 3 multipliziert, von b mit 2, von c mit 1 und die Anzahl der Zellen des Stadiums d = 0 gestellt.

#### *Ergebnisse der Zählungen.*

Die Kurven der Stadien a (voll mit Glykogen) und Stadium c (etwa die Hälfte der Zelle ist gefüllt mit Glykogen) ergaben keine deutlichen Kurven, weil das Stadium a zu selten vorkommt, um wichtige Ausschläge zu zeigen, und weil das Stadium c zu viel vorkommt, um einen Rhythmus deutlich zu machen. Das Stadium c kommt nämlich beinahe gleichmässig vor, auf- und niederschwankend zwischen etwa 20—60 % der Zellen. Es ist charakteristisch für solche quantitativen Berechnungen histologischer Art, dass die mittleren Stadien oft kein deutliches Bild des Arbeits-

rhythmus geben, weil sie gleichmässig schwanken. Das liegt wahrscheinlich daran, dass jede Zelle bei dem Glykogenabbau und bei der Bereitung das Gleichgewicht einer mittleren Glykogenmenge in Kürze erreicht. Wir haben infolgedessen die Stadien *a* und *c* nur bei dem Totalergebnis in

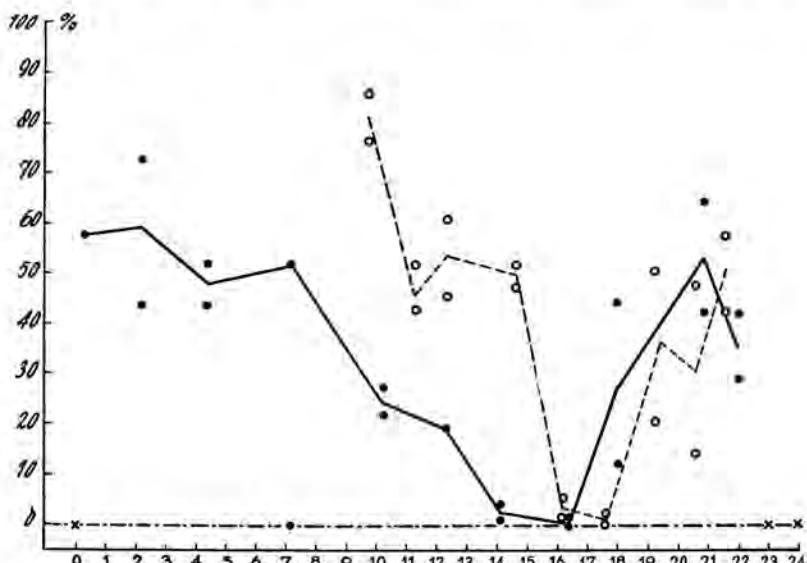


Abb. 4. Ordinate: die Prozentsätze der Zellen im Stadium *b*: also mit viel Glykogen beladen. Abscisse: die 24 Stunden des Tages. Schwarzer Kreis: die Leberstücke wurden 5 mm dick fixiert; heller Kreis: die Stücke wurden 2 mm dick fixiert.

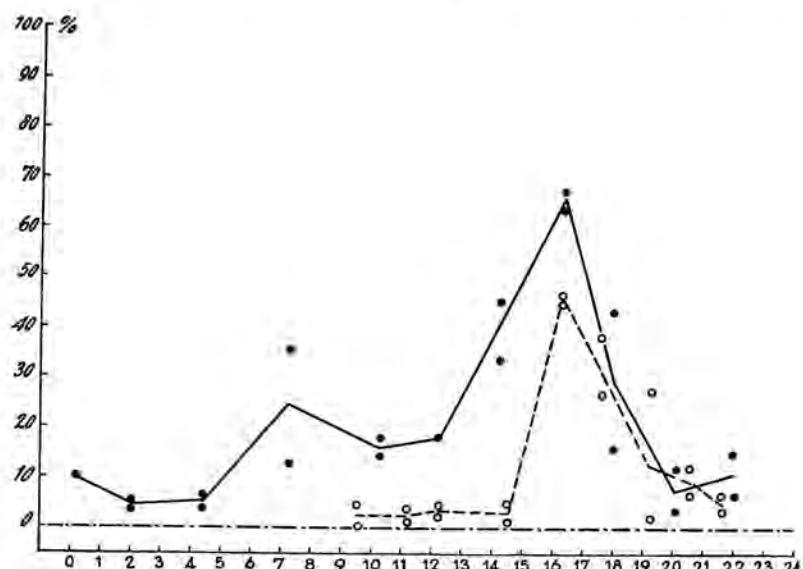


Abb. 5. Prozentsätze der Zellen des Stadiums *d*: die Zellen enthalten kein Glykogen. Zur weiteren Erklärung vergleiche Abb. 4.

Betracht gezogen und beistehend nur die Stadien *b* und *d* graphisch wiedergegeben, welche beide extreme Zustände der Zellen sind.

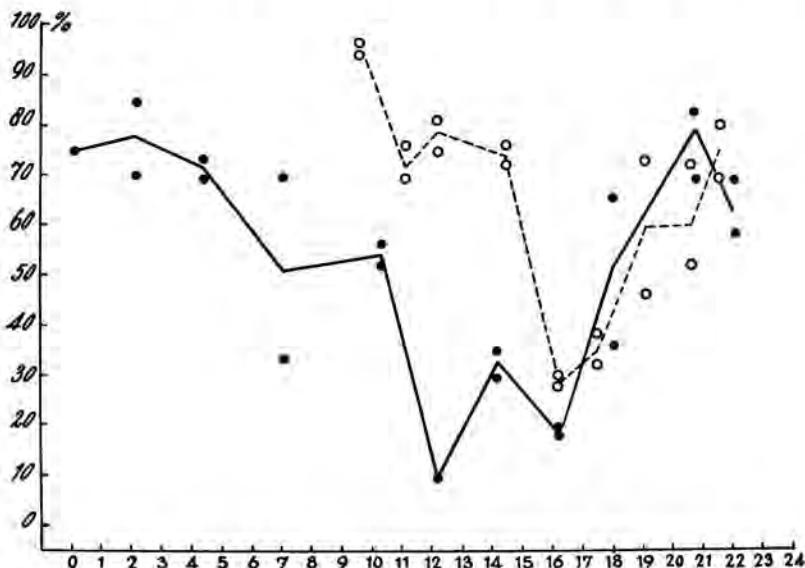


Abb. 6. Der Totalgehalt einer Mäuseleber an Glykogen. Die Berechnung der Punkte siehe im Text. Weitere Erklärungen der Zichen vergleiche in Abb. 4.

Die Ergebnisse können zunächst folgendermassen beschrieben werden:

1. Das Stadium *b* (Abb. 4), welches wahrscheinlich auf Grund einer starken Insulinausschüttung viel Glykogen enthält, zeigt ein deutliches *Maximum in den Nachtstunden 20—2 Uhr und ein Minimum bei 12—17 Uhr*. Die Ausschläge der Kurven sind viel grösser als bei der chemischen Analyse von ÅGREN.
2. Das Stadium *d* (Abb. 5), in welchem *kein Glykogen* in den Zellen anwesend ist, zeigt den dazu passenden reziproken Wert.
3. Die Berechnung des totalen Glykogens (Abb. 6) ergibt dieselben Ergebnisse auch nach Hinzufügung der errechneten Werte von *a* und *c*. Auch hier sind die Ausschläge der Kurve sehr gross.

Damit ist die chemische Untersuchung von ÅGREN, WIELANDER und JORPES 1931 bestätigt; diese fanden das Maximum an Glykogen zwischen 23 und 6 Uhr, wir dagegen zwischen 20 und 2 Uhr; das Minimum fanden die schwedischen Untersucher zwischen 10 und 18 Uhr, wir dagegen zwischen 12 und 17 Uhr. Wir unterscheiden uns also nur etwas in der Breite des Zeitraumes, in welchen das Maximum oder Minimum fällt; dieser Unterschied ist vorläufig noch nicht wichtig.

4. Noch etwas Anderes ergibt sich aber hinsichtlich der Frage: ist diese Stufen-zählmethode geeignet, um eine ebenso genaue Basis zu bilden, wie die chemische Methode. Die Streuung der Ergebnisse der chemischen Bestimmung ist gross. Bei unseren Ergebnissen ist sie auch ansehnlich, aber kleiner. Es tritt also innerhalb einer sonst homogenen Mäusegruppe

eine individuelle Streuung auf, welche auch die Breite der Minima und Maxima beeinflusst. Die Streuung ist aber bei der chemischen Methode und bei der histologischen Stufen-Zählung zurück zu führen auf individuelle Unterschiede. Also sind beide Methoden gleichwertig; wir können also die histologische Stufenzählmethode für die Glykogenbestimmung der Leber mit demselben Rechte anwenden, wie die chemische Extraktionsmethode. Wir haben aber bei der *histologischen Stufenzählmethode* den Vorteil, eine geringere Streuung und höhere Ausschläge zu haben und auch im histologischen Bilde die cytologische Struktur neben den Zählungen beobachten zu können, während die chemische Methode uns nur ein einziges Faktum berichtet.

*Der Einfluss der Schnittdicke auf die Ergebnisse der Stufenzählmethode.*

Hinsichtlich der histologischen Stufenzählmethode bedarf es aber noch einiger Hinweise auf bestimmte *Kautelen*, die man hierbei im Auge behalten muss. Wir haben, wie wir oben schon sagten, die 39 Tiere in zwei Gruppen geteilt, und in dem einen Falle Leberstückchen von 5 mm Dicke fixiert, bei der anderen Gruppe dagegen von 2 mm Dicke. Wir haben diese Gruppen in unseren Kurven ebenfalls unterschieden, indem die Ergebnisse an Praeparaten aus dicken Schnitten mit einem schwarzen Punkt, die aus dünnen Schnitten mit einem kleinen Kreis angedeutet wurden. Die mittleren Werte dieser beiden verschiedenen Gruppen sind bei 5 mm Stückdicke durch einen Strich, bei 2 mm Stückdicke durch eine Strichlinie angedeutet. Es ist auffallend, dass sich zwischen beiden Kurven ein Unterschied ergibt: die Ergebnisse aus Stücken, welche 5 mm dick waren, sind im grössten Teil der Fälle niedriger als die Ergebnisse aus dünneren Stücken; nur an der rechten Seite der Kurven verändert sich das Bild etwas und die Ergebnisse laufen ungefähr parallel.

Wir möchten auf diesen Unterschied besonders hinweisen. Er kann folgendermassen erklärt werden: die fixierte Flüssigkeit dringt nur langsam ein, sodass die in der Mitte liegenden Zellschichten der 5 mm dicken Schnitte Zeit haben, das vorhandene Glykogen aufzulösen, sodass es nicht mehr so reichlich vorhanden ist, wenn das Fixiermittel die mittleren Zellschichten erreicht. Das ergab sich auch aus den histologischen Gesamtbildern, welche wir erhielten. Wir müssen also bei der Anwendung der Stufenzählmethode auf drei Dinge achten: einmal auf die gleichmässige Dicke der Fixierstücke, 2. darauf, dass die Fixierstücke nicht dicker sind als 2 mm und schliesslich auf die Dicke der Paraffinschnitte, die nicht dünner sein sollen als 10  $\mu$ .

*Steht der Rhythmus des Glykogens bei den weissen Mäusen fest?*

Von 39 Tieren, welche gleichen Ursprungs waren und alle am 10. und 31. März untersucht wurden, haben wir die vorstehenden Kurven entworfen. Ist die Streuung der Ergebnisse auch ansehnlich, d.h. besteht

auch eine individuelle Schwankung, so sind die Ausschläge der Kurven doch andererseits so gross, dass ein deutlicher Leberrhythmus bei den weissen Mäusen sich zeigt. Wir dürfen aber nicht verschweigen, dass wir 16 Mäuse angetroffen haben, welche von zwei verschiedenen Stämmen herstammten: 7 Mäuse kamen aus demselben Stamme wie die verwendeten 39 Mäuse, 9 Mäuse kamen aus einem anderen Stamme. All diese Tiere waren durcheinander am 13. und 14. Februar getötet. Diese 16 „Februar-tiere“ zeigen eine Verschiebung ihrer Maxima und Minima gegenüber den oben berechneten 39 „Märztieren“. Wir haben noch nicht genügend Material, um hier schon eine gut fundierte Kurve zeigen zu können, aber wir können aus den 16 gewonnenen Punkten bereits vorsichtig schliessen, dass das Maximum des Glykogens etwa in der Zeit von 3—8 Uhr morgens liegt, also zu einer Zeit, in welcher das Maximum der Gruppe von 39 „Märztieren“ bereits im Absinken begriffen ist. Das Minimum an Glykogen liegt sehr wahrscheinlich ebenfalls verschoben am Abend bis in die Nacht hinein. Es hat also bei dieser zweiten Gruppe von 16 „Februarmäusen“ sehr wahrscheinlich eine *Verschiebung des Maximums um einige Stunden vorwärts* stattgefunden.

Wir können vorläufig noch nicht mit Sicherheit sagen, worauf diese Verschiebung beruht; diese Frage soll demnächst analysiert werden zusammen mit einer Aufhellung der Faktoren, welche den Arbeitsrhythmus der Leber hervorrufen.

Aber angesichts der Tatsachen: 1. dass die 16 „Februarmäuse“ von zwei verschiedenen Stämmen entsprangen und doch den gleichen oder wenigstens einen sehr ähnlichen Rhythmus zeigen;

2. dass alle „Februarmäuse“ unter gleichen Bedingungen gehalten wurden wie die „Märzmäuse“ (Futter, Wohnort);

3. dass beide Gruppen sich unterscheiden durch einen jahreszeitlichen Unterschied von vier bis 6 Wochen auf der Grenze zwischen Winter und Frühling — all dies spricht für die Hypothese, dass die Verschiebung der Maxima: bei den „Februar-tieren“ später, bei den „Märztieren“ früher, *im Zusammenhang stehen dürfte mit der Jahreszeit*. Dann würde die Verfrühung der Maxima bei den „Märztieren“ wieder mit der erhöhten Aktivität des Darmtraktus im Frühjahr zusammenhängen wie dies HIRSCH und JACOBS 1930 für den Darm von *Astacus* nachwiesen.

#### *Zusammenfassung.*

Es wurde die Frage geprüft, ob die histologische Stufenzählmethode bei der Berechnung des Gehaltes einer Leber an Glykogen ebenso zuverlässige Ergebnisse liefert, wie die chemische Untersuchung. Die Stufenzählmethode wurde dadurch angestellt, dass vier verschiedene Stadien des Glykogengehaltes in den Zellen (Abb. 1—3) ausgezählt wurden. Es ergab sich, dass die Streuung der Ergebnisse auf Grund der individuellen Schwankungen etwas geringer ist wie bei der chemischen Methode, doch sind die Ausschläge der Stufenzählmethoden-kurven grösser. Beide Me-

thoden können in gleicher Weise angewendet werden. Die Kurven zeigten weiterhin, dass die Dicke der fixierten Stücke dadurch von Einfluss auf die Zählung ist, dass die inneren Zellen des Stückes ungenügend fixiert sind; man darf die Stücke nicht dicker als 2 mm nehmen. Auch dürfen die Paraffinschnitte nicht dünner sein als  $10 \mu$ . Es wurden mit Hilfe dieser Stufenzählmethode die chemischen Ergebnisse von ÅGREN, WIELANDER und JORPES 1931 bestätigt, und zwar in diesem Sinne: das Maximum an Glykogen findet sich im März zwischen 20 und 2 Uhr, das Minimum zwischen 12 und 17 Uhr. Ein gewisser Unterschied in der Breite der Maxima und Minima spielt keine Rolle bei der Beurteilung.

Dieser Gruppe von „Märzmäusen“ stand aber eine Gruppe von 16 „Februarmäusen“ gegenüber, welche aus zwei verschiedenen Stämmen stammten und 4—6 Wochen vor den „Märzmäusen“ getötet wurden. Diese zeigten eine Verschiebung des Maximums und Minimums um einige Stunden vorwärts: nämlich in die Zeit zwischen 2 und 8 Uhr und in die späte Abendzeit. Worauf diese Verschiebung zurückzuführen ist, muss noch weiter analysiert werden; aber man kann mehrere Gründe dafür angeben, dass es die Jahreszeit ist, welche die Verschiebung des Rhythmus verursacht: wahrscheinlich sind Wintertiere etwas später, Frühlingstiere etwas früher in den Maxima ihres Glykogenrhythmus.

#### SCHRIFTTUM.

- ÅGREN, G., O. WIELANDER, E. JORPES: Cyclic changes in the Glykogen content of the liver and the muscles of rats and mice. Bioch. Journ. 25, 1931, p. 777.  
 ARNDT, H. J.: Vergleichend-histologische Beiträge zur Kenntnis des Leberglykogens. Arch. path. Anat. 253, 1924.  
 FORSGREN, E.: Mikroskopiska och experimentella leverundersökningar. Stockholm. 1927.  
 ————— Mikrosk. Untersuchungen über die Gallenbildung in den Leberzellen. Zs. f. Zellf. u. mikr. Anat. 6, 1928.  
 ————— The anatomical qualities of the liver during the various stages of its functional activities. Journ. Morphol. a. Physiol. 47, 22, 1929.  
 HIRSCH, G. C.: Dynamik organischer Strukturen. Gedanken zur Methodik ihrer Untersuchung. Roux' Arch. 117, Festschrift SPEMANN, 1929.  
 HIRSCH, G. C. und W. JACOBS: Der Arbeitsrhythmus der Mitteldarmdrüse von Astacus leptodactylus. II. Teil: Wachstum als primärer Faktor des Rhythmus eines polyphasischen organigen Sekretionssystems. Zs. f. vergl. Physiol. 12. Bd., 1930.  
 HOLMGREN, H.: Beitrag zur Kenntnis von der Leberfunktion. Ztschr. mikr. anat. Forsch. 24, 1931.  
 ————— Studien über die 24-Stunden rhythmischen Variationen. Helsingfors, 1936.  
 HOLMQUIST, A. G.: Beitrag zur Kenntnis der 24-stündigen Rhythmis der Leber. Ztschr. mikr.-anat. Forsch. 25, 1931.  
 NOEL: Recherches histo-physiologiques sur la cellule hépatique des Mammifères. Arch. d'Anat. micr. 19, 1923.  
 PFUHL, W.: Die Leber. Handb. d. mikr. Anat. des Menschen von WILH. v. MÖLLENDORF, 1932. V. 2.  
 POLICARD, NOEL: Sur la valeur de la méthode de VASTARINI-CRESI. C. r. Soc. Biol. 86, 1922, p. 118.  
 POPPER und WOZASEK: Zur Kenntnis des Glykogengehaltes der Leichenleber. Wien. mediz. Wschr. 79, 1929, p. 456.

**Physiology.** — *Studies on phosphorus metabolism in normal and rachitic rats with a radioactive phosphorus isotope.* By M. J. L. DOLS and B. C. P. JANSEN. (Laboratory of Physiological Chemistry, University Amsterdam) and G. J. SIZOO and J. DE VRIES. (Naturkundig Laboratorium, Vrije Universiteit, Amsterdam). (Communicated by Prof. G. GRIJNS).

(Communicated at the meeting of May 29, 1937.)

#### *Introduction.*

It is a matter of common knowledge, that vitamin D plays an important part in Ca- and P-metabolism. However, the characteristic mode of action of this vitamin is still obscure. A group of authors consider the vitamin D only as a factor influencing the Ca and P balance, either by increasing absorption, or by diminishing excretion. Others however think the vitamin acts on the deposition of Ca and P into the bone. But, it is also possible that it acts in all an other way. The study of this question was very difficult as it was impossible to establish, whether the minerals in the body come from the just administered food, or they were already present in the body. However, the recent progress in the production of artificial radioactive isotopes here opens up new ways. At present the radioactive isotope of phosphorus  $^{32}_{15}$  P is easily accessible, whereas the half value period is long enough (15 days) to use this isotope in physiological work. With this isotope it is possible to "label" the phosphorus of the diet and to follow this "labelled" phosphorus on its way through the organism.

The use of radioactive isotopes as indicators in physiological-chemical determinations is not new at all, since BEHRENS<sup>1)</sup> used thorium B as an indicator in his investigations on the distribution of lead in the organism. CHIEVITZ and HEVESY<sup>2)</sup> were the first, who used a radioactive indicator in the study of phosphorus metabolism in rats. In a recent paper<sup>3)</sup> a detailed account of these investigations was given, which were carried out chiefly on rats but partly also on human beings. A general account on the use of isotopes as indicators in biological research was published recently by KROGH<sup>4)</sup>.

<sup>1)</sup> B. BEHRENS, Arch. f. Exper. Pathol., **109**, 332 (1925).

<sup>2)</sup> O. CHIEVITZ and G. HEVESY, Nature, **136**, 754 (1935).

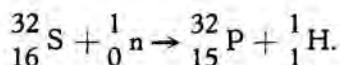
<sup>3)</sup> O. CHIEVITZ and G. HEVESY, Kgl. Danske Vid. Selsk., Biol. Medd., **13**, 9 (1937).

<sup>4)</sup> A. KROGH, Science, **85**, 187 (1937).

We wish to publish here a full survey of our experiments<sup>5, 6)</sup> set up in 1936 with the object to study the influence of vitamin D on the absorption, retention and deposition in bone of normal, rachitic and "treated" animals. The "treated" animals were those rachitic rats, which received a large dose of vitamin D (30 Int. Units as halibutoil) a few hours before the oral administration of the "labelled" phosphorus. The rats used were of the albino type; they were rendered homozygote as far as possible by inbreeding. They were weaned on the 21st day and then used in the experiments. Most of them then had a weight of 35—40 grams. Every rat was kept in a zinc cage with a crossbarred floor; coprophagy thus being impossible. The rats were divided into three groups and placed in a room from which all daylight was excluded. All groups were fed for 28 days the STEENBOCK-BLACK diet. Besides the check group received 3 times a week a sufficient dose of halibut oil, whereas the other rats only got a solution of carotene in peanut oil. After 28 days the rats were x-rayed to check the diets and thereupon used in these experiments.

*The preparation of the labelled phosphorus.*

The radioactive phosphorus  $^{32}_{15}\text{P}$  was obtained by neutron bombardment of sulphur according to the nuclear reaction



The sulphur was thoroughly purified by means of continuous extraction with a mixture of carbondisulphide and carbontetrachloride (1 : 2) in a Soxhletapparatus. Then it was placed round the neutron source, consisting of 100 mg. Ra mixed with beryllium powder. This neutron bombardment lasted about twenty days. Then a minute quantity of red phosphorus was added to the sulphur (about 1 :  $10^4$ ) to facilitate the separation of the active isotope. Thereupon this sulphur-phosphorus mixture was combusted in a stream of oxygen. The apparatus used is represented by fig. 1. The

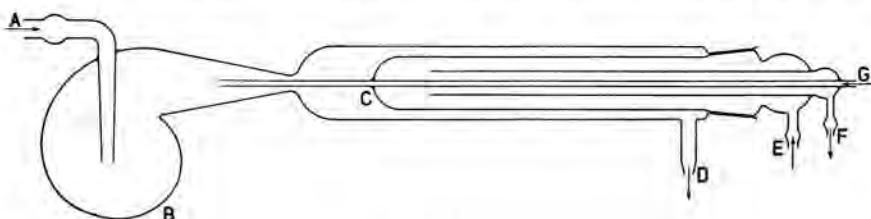


Fig. 1.

<sup>5)</sup> M. J. L. DOLS, VI. Weltflügelkongress, Berlin-Leipzig, Ber. 3, 198 (1936).

<sup>6)</sup> M. J. L. DOLS, B. C. P. JANSEN, G. J. SIZOO and J. DE VRIES, Nature, 139, 1068 (1937).

$\text{SO}_2$  escaped at D, whilst the  $\text{P}_2\text{O}_5$  together with a little  $\text{SO}_3$ , was mainly condensed at the cooling tube C.

After the apparatus was washed out with distilled water a solution of phosphoric- and sulphuric acid was obtained. The solution was defiled with carbon rests, due to the carbon disulphide taken up by the sulphur. After these rests had been removed by filtration the solution could be worked up.

The most convenient way to separate the phosphorus would have been to precipitate it in a solid form, e.g. as  $\text{MgNH}_4\text{PO}_4$ . However, it is very difficult to insert a solid preparation into the stomach. Besides it is a wellknown fact that magnesium can influence the Ca- and P-metabolism. Therefore it was not desirable to use this salt. The most suitable form in which the phosphorus can be administered is a solution of sodium phosphate.

In preliminary experiments the phosphorus was precipitated from the solution as  $\text{MgNH}_4\text{PO}_4$ , boiled up with sodium carbonate and filtrated. About 60 % of the labelled phosphorus was found back in the filtrate. To get a sufficient concentration of the active phosphorus the water had been boiled away till the solution was nearly concentrated with sodium carbonate. Since such a big quantity of sodium carbonate was found to disturb the digestion in later experiments another method was followed.

For that purpose the water was boiled away out of the solution of phosphoric- and sulphuric acid; the sulphuric acid was removed by fuming at a temperature as low as possible. The residue was received in water, filtrated and titrated with 0.2 n sodium hydroxide, indicator methyl red. The pH of this solution of sodium phosphate varied from six till seven (controlled with phenol red). In special experiments the yield of phosphorus obtained by this method was determined; it averaged about 60 per cent of the amount added to the sulphur. Now the determination of the radioactivity of the solution happens as follows. A fixed quantity of the solution was dropped on an aluminium foil, the water boiled away, after which the activity of the residue was measured in a compensation ionization chamber.

#### *Determination of the radioactive phosphorus isotope.*

With the ionization chamber mentioned above, the ionization current produced by the  $\beta$ -particles, emitted by the radioactive phosphorus in the preparation of the organs, was compared with the ionization current of a constant source, in this case the  $\gamma$ -activity of a piece of pitch blend<sup>7)</sup>. Because the  $\beta$ -particles are partly absorbed in the preparation of the various organs, a correction ought to be done in the estimated activity. For it the absorption was specially investigated in the following way.

<sup>7)</sup> G. J. SIZOO and C. P. KOENE, Physica 3, 1053 (1936).

A quantity of radioactive phosphorus was spread out on an aluminium foil, and then covered with a layer of the ash of the rat. Now the activity was measured for various thicknesses of the layer. The decrease of the activity with increasing thickness of the layer was found to be exponential, within the limits of the accuracy of the measurement. The absorption curve is given in fig. 2. The mass-absorption coefficient  $\mu$  was found to be  $11.5 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$ . In our tests the labelled phosphorus was

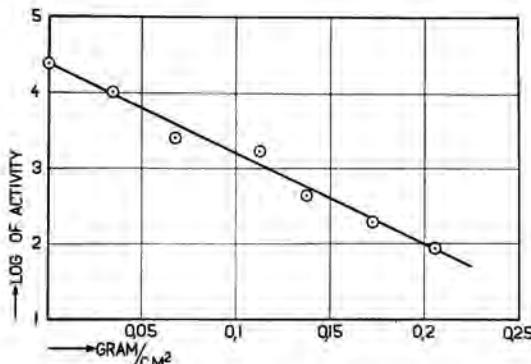


Fig. 2.

uniformly distributed through the material. Therefore to obtain the true activity of a preparation the measured activity must be multiplied with the factor  $\frac{\mu d}{1 - e^{-\mu d}}$  in which  $d$  means the thickness of the preparation, expressed in grams  $\text{cm}^{-2}$ . Mostly this correction was very small; only for the preparations of the residue the correction was rather large.

To check the correctness of the method a control test was made. A certain quantity of a solution of active sodium phosphate with an activity of 159 units was administered to a rat with a pipette. The pipette was rinsed with water, whereas the activity of this water was found to be 7.4 units. The rat was carbonized at 200 degrees centigrade. The total weight of the "ash" was 34 grams. A preparation of  $134 \text{ mg}/\text{cm}^2$  of this ash showed an apparent activity of 16. The correction factor was calculated to be 1.93. Therefore the activity of the preparation was 31, whereas the total activity of the ash was calculated to be 151. This value is in excellent agreement with the activity of the administered solution.

Finally the activity of all preparations had to be corrected for the decay of the phosphorus. The half value period of the radioactive phosphorus was determined to be 15 days. In the physiological experiments all the activities were reduced to the time at which the activity of the solution was measured.

#### *The administration of the labelled phosphorus.*

The aqueous solution of sodium phosphate was administered in two different ways. For that purpose, in four experiments a fixed quantity

was inserted with an exactly calibrated pipette into the stomach of the rat through a small stomach tube. It was seen to no rest of the active solution remained behind in the tube or in the pipette. Moreover the tube and pipette were rinsed with water after every use, whereas the water was kept for testing. The rats used in these experiments starved 20—24 hours. This starvation facilitated the technique of inserting the tube into the stomach; furthermore, in the "treated" animals, it prevents, that an eventual action of vitamin D on the absorption of the phosphorus of the diet takes place before the active phosphorus was fed. In two experiments the active solution was injected into the tail vein after it had been made isotonic by adding sodium chloride. In these experiments, in which only normal and rachitic rats were used, no starvation was applied.

*The making of the preparations of the different parts  
of the rats to be measured.*

A certain time after the administration of the labelled phosphorus, in the discussed series after 1, 2, 8 and  $8\frac{1}{2}$  hours, the rats were decapitated, whereby as much blood as possible was caught in a tared cup. Then the rats were quickly sectioned. The oesophagus was ligatured near to the pro-stomach, whereas the ileum was doubly ligatured close to the caecum. Then the oesophagus was cut orally to the ligature, the ileum between the two ligatures; the stomach and small intestine were brought into a tared cup, whereas the same was done with the large intestine to which both the bladder and the faeces and urine produced after the administration of the phosphorus were added. The limb bones were then dissected, cleaned and brought into a tared cup. Finally the residue of the body with the head was collected.

Now the preparations were made as follows. The tared cups with the blood, the stomach, the small intestine, the large intestine, the bladder the faeces and urine were dried in an oven at 105 degrees centigrade for about 24 hours, after which the cups were weighed again. Then the dried matter of the mentioned organs and fluids was pulverized in a mortar, the powder sieved and suspended in ether, whereafter the suspension was poured out into a flatly grinded ring of glass, which was placed on a tared aluminium foil. The ring was pressed on the foil by loading it with a weight or an other object, to prevent that the ether flows away. Then the ether was evaporated at room temperature after which a flat layer of the dried organ with uniform thickness remained behind on the foil. Now the foil with the layer were weighed, the activity measured and corrected in the mentioned ways. The preparation of the blood measured was only a small part of the whole blood in the body of the rat. Therefore, the true activity for the whole blood must be calculated; this was done by the tables of DONALDSON<sup>8)</sup>.

<sup>8)</sup> H. H. DONALDSON, The Rat. Memoirs of the Wistar Institute of Anat. and Biology, nr. 6 (1924).

As to the limb bones, in the first experiment, they were extracted with ether for 48 hours and then ashed at 500—600 degrees centigrade. By this method a part of the phosphorus was lost. For that reason a new procedure was followed. Herewith, the bones not being extracted, were carbonized in an oven at 200 degrees centigrade. Experimentally it was found that no phosphorus was lost in this procedure. Then the coal was pulverized, sieved and treated as was described for the blood and the viscera. Here it was necessary to add  $\frac{1}{2}$  g. of soluble starch to the preparation with the view to do it adhere to the foil. After correction of the estimated activity the true value was calculated for the whole skeleton by the tables of DONALDSON.

Finally the residue of the body in the first experiment was dissolved in hot sodium hydroxide by boiling for several hours; then, after being neutralized, the solution was dried and made into a preparation. However, the quantity of the dried matter was so large, that the preparation to be measured was about  $\frac{1}{40}$  part of the whole residue. Of course in this way no exact results could be obtained. So, these figures for the first experiment were not calculated.

Therefore, in the further experiments for the residue the same procedure was used as had been described for the bones. Herewith it was also carbonized and then treated as the bone preparations. The activity reduced to the whole residue was diminished with the activy both for the blood and the part of the skeleton contained in it. Finally the mentioned corrections were made to obtain the true activity of the whole residue.

#### *Discussion of the experiments.*

The first experiment was made on 13 rats from which 4 were normals (N), 4 rachitic- (R), whereas 5 were "treated" animals (T). In accordance with the technique mentioned before an aqueous solution of the radioactive sodium phosphate was inserted into the stomach of the rats. The quantity of the administered solution ranged from 1.0 to 1.15 cm<sup>3</sup>, containing about 1.25 mg. of the labelled phosphorus<sup>9</sup>).

One hour after the solution was administered the rats were killed, whereafter the preparations of the different parts of the rat were made. As was discussed before, in this experiment the percentage of the administered phosphorus in the residue was not calculated.

In the second experiment 12 rats were used. All had received about 2 mg. of the labelled phosphorus in an aqueous solution of sodium phosphate, which was inserted into the stomach. Two hours after the oral administration the rats were decapitated. In this experiment the activity of the residue was also determined. Since the gross absorption in the experiments mentioned before was too small, it was decided to decapitate

---

<sup>9)</sup> A rough estimation of the content of the radioactive isotope  $^{32}_{15}\text{P}$  leads to about  $10^{-9}$  g. per mg. of the preparation.

TABLE I.

Experiment and Group	Percentage of the administered P in dried matter of all the blood, the whole organs and excretions						Percentage of administered P in 100 mg. dried matter		
	Blood	Stomach and small intestine	Large intestine and faeces and urine	Skeleton	Residue after correction	Total	Blood	Skeleton	Residue after correction
<b>Exp. I (Rats decapitated after 1 hour)</b>									
N.	0.—	69.6	0.—	13.5		83.1	0.—	0.26	
N.	0.—	58.8	2.1	18.0		78.9	0.—	0.29	
N.	1.75	43.3	8.5	23.9		77.5	0.10	0.45	
N.	0.—	51.1	3.8	10.6		65.5	0.—	0.18	
R.	1.3	57.1	5.3	13.9		77.6	0.10	0.30	
R.	3.1	60.5	3.6	0.—		67.2	0.25	0.—	
R.	5.1	52.5	13.3	11.3		82.2	0.30	0.21	
R.	0.—	47.8	2.3	0.—		50.1	0.—	0.—	
T.	18.6	63.0	7.0	14.0		102.6	1.61	0.42	
T.	14.0	50.6	10.3	12.2		87.1	1.17	0.34	
T.	12.8	57.7	15.5	4.6		90.6	1.02	0.12	
T.	7.2	54.1	2.4	3.1		66.8	0.60	0.09	
T.	19.2	50.9	3.2	12.9		86.2	1.65	0.38	
<b>Exp. II (Rats decapitated after 2 hours)</b>									
N.	0.—	60.8	7.7	8.7	26.0	103.2	0.—	0.28	0.15
N.	23.1	52.0	9.0	8.0	13.0	105.0	1.82	0.20	0.06
N.	11.3	64.3	3.0	7.7	7.0	93.3	1.02	0.23	0.04
N.	9.0	22.4	6.1	6.5	53.5	97.5	0.75	0.19	0.28
N.	7.3	45.2	1.5	3.7	13.0	70.7	0.86	0.15	0.09
R.	2.8	69.5	0.—	3.3	23.9	99.5	0.32	0.13	0.17
R.	2.2	85.2	2.0	4.4	10.7	104.5	0.21	0.15	0.06
R.	15.5	49.5	2.5	4.8	23.5	95.8	1.52	0.17	0.14
T.	6.5	37.4	0.5	7.1	38.6	90.1	0.84	0.35	0.31
T.	1.8	67.2	0.2	8.6	18.2	96.—	0.18	0.32	0.11
T.	18.9	57.3	4.9	7.8	0.—	88.9	2.15	0.32	0.—
T.	2.8	25.9	8.4	15.2	50.4	102.7	0.25	0.46	0.27

TABLE I. (Continued)

Experiment and Group	Percentage of the administered P in dried matter of all the blood, the whole organs and excretions						Percentage of administered P in 100 mg. dried matter		
	Blood	Stomach and small intestine	Large intestine and faeces and urine	Skeleton	Residue after correction	Total	Blood	Skeleton	Residue after correction
<b>Exp. III (Rats decapitated after 8 hours)</b>									
N.	12.6	15.4	30.3	16.3	25.1	99.7	0.90	0.35	0.10
N.	5.6	6.7	27.2	14.3	36.0	89.8	0.47	0.39	0.17
N.	16.0	4.1	49.1	10.0	20.4	99.6	1.66	0.38	0.13
R.	0.5	19.8	11.0	16.3	43.3	90.9	0.04	0.43	0.20
R.	9.4	8.2	14.2	17.4	48.5	97.7	0.75	0.46	0.22
R.	14.1	8.1	9.5	11.1	51.7	94.5	1.08	0.27	0.23
R.	13.9	19.7	13.8	15.2	42.8	105.4	0.93	0.30	0.16
T.	0.—	7.4	15.8	18.0	18.0	59.2	0.—	0.50	0.08
T.	9.7	18.0	7.6	13.7	44.8	93.8	0.91	0.44	0.25
T.	34.7	15.0	5.3	16.0	22.8	93.8	2.37	0.33	0.09
T.	24.7	15.8	11.4	15.7	33.2	100.8	2.20	0.48	0.18
<b>Exp. IV (Rats decapitated after 8½ hours)</b>									
N.	12.0	12.0	10.6	22.0	42.6	99.2	1.17	0.83	0.26
N.	4.0	6.0	13.7	14.6	57.0	95.3	0.47	0.60	0.40
N.	27.9	11.1	37.8	4.2	18.1	99.1	3.50	0.17	0.14
R.	15.5	15.6	10.1	14.4	50.0	105.6	1.64	0.59	0.33
R.	10.3	10.2	9.1	12.6	52.9	95.1	1.09	0.51	0.33
R.	5.8	9.0	18.0	14.2	45.5	92.5	0.80	0.64	0.40
R.	0.6	15.5	20.3	15.9	54.9	107.2	0.07	0.65	0.42
R.	15.4	13.2	44.4	26.2	6.7	105.9	1.64	1.07	0.04
T.	2.9	9.2	15.8	20.4	56.7	105.0	0.31	0.83	0.37
T.	21.8	9.5	20.7	17.0	27.2	96.2	2.66	0.78	0.20
T.	4.0	12.3	14.6	13.9	41.7	86.5	0.50	0.64	0.30
T.	1.9	3.8	44.0	4.2	45.7	99.6	0.20	0.17	0.29

the rats about 8 hours after the oral administration of the phosphorus. This was done in the third experiment, which was carried out with 11 rats. The fourth experiment must be considered as a repetition of the preceding one; it was carried out with 12 rats, which were decapitated  $8\frac{1}{2}$  hours after the solution of sodium phosphate was inserted into the stomach.

The figures of these four experiments are reproduced in table 1.

In the fifth and sixth experiment an isotonic solution of sodium phosphate was injected in the tail vein, in order to eliminate the influence of the absorption. The figures of these experiments are tabulated in table 2.

TABLE 2.

Experiment and Group	Percentage of injected P in dried matter of all the blood, the whole organs and excretions						Percentage of injected P in 100 mg. dried matter		
	Blood	Stomach and small intestine	Large intestine and faeces and urine	Skeleton	Residue after correction	Total	Blood	Skeleton	Residue after correction
<b>Exp. V (Rats decapitated after 1 hour)</b>									
N.	0.—	12.9	6.4	24.1	49.4	92.9	0.—	0.40	0.14
N.	0.—	4.9	9.0	30.9	52.8	97.6	0.—	0.50	0.15
N.	6.1	7.3	2.6	22.3	56.5	94.8	0.32	0.36	0.17
N.	18.6	8.6	2.4	23.7	39.8	93.1	0.98	0.38	0.12
<b>Exp. VI (Rats decapitated after 2 hours)</b>									
N.	0.—	15.1	2.3	11.8	62.6	91.8	0.—	0.49	0.44
N.	8.1	10.5	4.1	32.7	50.1	105.5	1.00	1.35	0.36
N.	35.8	10.0	2.8	30.4	12.0	91.0	4.04	1.26	0.09
R.	18.2	0.—	1.3	57.7	14.2	91.4	2.14	2.35	0.10
R.	18.8	9.4	4.7	39.1	33.7	105.7	2.35	1.63	0.28
R.	45.2	22.4	0.—	4.8	22.5	94.9	6.00	0.20	0.19

Now considering the figures from the different experiments it is to note, that the distribution of the labelled phosphorus in the organism could be followed up easily. Except in a few cases, the whole of the quantity of the radioactive isotope administered could be recovered with a satisfactory accuracy. So our technique was reliable.

As far as the figures of the blood are concerned in the various experiments, herewith the variation is very large, both by oral administration and by injection of the active phosphorus.

In the experiments in which the phosphorus was injected into the tail vein the unexpected fact was observed, that within one hour in several rats the injected phosphorus had fully disappeared from the blood, but in other animals the blood contained a considerable part of the injected phosphorus. This fact proves, that the deposition of the active phosphorus of the blood into the different organs is regulated by factors, the action of which shows a large fluctuation by various animals. In this respect a characteristic difference between the normal, rachitic and "treated" animals could not be observed in these experiments.

Looking at the figures of the phosphorus distribution in the skeleton a very rapid entrance of the active phosphorus into the bone was perceptible.

If the amount of phosphorus deposited in 100 mg. of the dried matter of the skeleton was calculated for the percentage of the phosphorus inserted into the stomach, it was shown that 8 hours after the oral administration a somewhat larger quantity was deposited than after two hours. However, if these figures were reduced for the percentage of the absorbed phosphorus, it was evident that always about a constant percentage of the absorbed phosphorus was deposited in the skeleton. The percentage of the phosphorus deposited in the skeleton seemed also a constant part of all the active phosphorus deposited in the whole organism. Significant differences between the normal-, rachitic- and "treated" animals were not found.

As to the gross absorption, that is the difference between the quantity of phosphorus administered and the quantity present in the stomach and small intestine after a certain period, it may be established from table 3, that vitamin D did not act on the absorption. Although the figures for the different animals were divergent, at all events the gross absorption both in the normal and "treated" rats was not larger than in the rachitic animals. The same can be said about the re-excretion into the gut in the three groups of rats. It is to note that no value must be set on the averages, because the variation in the figures was too large. They were only calculated to give an impression into this value for the several groups. In the third series we thought we could see a difference in the deposition in the body of the three groups of animals. The total deposition, that is the gross absorption less the re-excretion, in normal rats averaged 55 %, whereas in rachitic and "treated" animals it averaged 75 %. However, in the fourth series we could not confirm these results.

A characteristic mode of action of vitamin D on the absorption of the active phosphorus from the gut or on the re-excretion into the gut could not be demonstrated in these experiments.

A very interesting observation was made in the experiments 5 and 6. As is shown by the figures in table 2, it is a fact that there is not only a very rapid absorption of phosphorus from the gut, but also a rapid excretion of the injected active phosphorus into the gut. One hour after

the injection into the tail vein, a considerable amount of the active phosphorus was re-excreted into the small intestine. This re-excretion can only happen with the digestion juices, after the labelled phosphorus was

TABLE 3.

Exper.	Gross absorption in percents of the phosphorus administered			Deposition in the whole organism in percents of the phosphorus administered		
	Normal	Rachitic	"Treated"	Normal	Rachitic	"Treated"
I	30.4	42.9	37.0	30.4	37.6	30.0
	41.2	39.5	49.4	39.1	35.9	39.1
	56.7	47.5	42.3	48.2	34.2	26.8
	48.9	52.2	45.9	45.1	49.9	43.5
			49.1			45.9
Average	44.3	45.5	44.7	40.7	39.4	37.1
II	39.2	30.5	62.6	31.5	30.5	62.1
	48.0	14.8	32.8	39.0	12.8	32.6
	35.7	50.5	42.7	32.7	48.0	37.8
	77.6		74.1	71.5		65.7
	54.8			53.3		
Average	53.5	32.3	53.0	48.0	30.7	47.0
III	84.6	80.2	92.6	54.3	69.2	76.8
	93.3	91.8	82.0	66.1	77.6	74.4
	95.9	91.9	85.0	46.8	82.4	79.7
		80.3	84.2		66.5	72.8
	Average	91.3	86.1	85.9	55.7	73.9
IV	88.0	84.4	90.8	77.4	74.3	75.0
	94.0	89.8	90.5	80.3	80.7	69.8
	88.9	91.0	87.7	51.1	73.0	73.1
		84.5	96.2		64.2	52.2
		86.8			42.4	
Average	90.3	87.3	91.3	69.6	66.9	67.5

moved with the bloodstream and deposited into the several organs. A characteristic difference in these figures between the normal and rachitic rats could not be observed.

*Summary and conclusions.*

Experiments on phosphorus metabolism in normal, rachitic and "treated" rats with a radioactive phosphorus isotope as an indicator are reported. The preparation of the phosphorus isotope  $^{32}_{15}$  P was described just as the determination of the radioactive phosphorus in the preparations of the several parts of the body.

The distribution of the phosphorus in the organism could be followed up easily; almost the whole of the quantity of the radioactive phosphorus administered could be recovered. Both by the administration with the stomach tube and by the injection into the tail vein a very rapid entrance of the labelled phosphorus in the bone was perceptible. Neither the increase of the gross absorption nor the increase of the total deposition of the active phosphorus in the whole organism, significantly raised the percentage of this phosphorus deposited in the skeleton. Furthermore it was observed, that one hour after the injection in the tail vein, a considerable amount of the active phosphorus was re-excreted into the small intestine; this can only happen with the digestion juices after the phosphorus was moved with the bloodstream and deposited into the several organs. So far as the gross absorption was concerned no difference could be observed in the period between 1 and 8 hours after the administration in the normal, rachitic and "treated" rats. The same can be said about the re-excretion into the gut. A characteristic mode of action of vitamin D on the absorption or re-excretion into the gut from the administered phosphorus could not be demonstrated.

We wish to express our heartfelt thanks to Prof. G. GRIJNS for his kind interest in our work; to Prof. J. COOPS for his advice with the preparation of the active phosphorus; to Mr. C. P. KOENE, Mr. F. BARENDRGT, Mr. J. C. DE BACK and Mr. J. G. BRIENNE for their valuable help in the experiments. Finally we are indebted to the „Vereeniging tot het Bevorderen van de Beoefening der Wetenschap onder de Katholieken in Nederland" and to the „Stichting voor Biophysica" for a grant for our researches.

**Experimental Morphology.** — *Biologischer Nachweis zweier neuer Hormone durch Rhodeus amarus als Eichungsobject.* Von J. J. DUYVENÉ DE WIT. (Aus dem Labor. für experimentelle Morphologie des Zool. Institutes d. Univ. Utrecht; Leiter: G. C. HIRSCH). (Vorläufige Mitteilung). (Communicated by Prof. H. J. JORDAN).

(Communicated at the meeting of May 29, 1937.)

Injiziert man oestogene Substanzen weiblichen Bitterlingen (*Rhodeus amarus*), so wächst die Legeröhre aus (FLEISCHMANN und KANN, 1932).

Seit 1935 habe ich diesen „Fischtest“ ausgearbeitet zu einer Eichungsmethode, welche gestattet, die Menge der wirksamen Substanzen, welche sich in Drüsen, im Harn u.s.w. befinden können, mit einer Fehlerquelle von etwa 20 % zu messen. Der Einfluss der Jahreszeiten auf das Legeröhren-Wachstum kann durch einige Kunstgriffe ausgeschaltet werden.

Die Eichung, welche unter optimalen Verhältnissen stattfindet, beruht darauf, dass das Wachstum der Legeröhre, innerhalb einer bestimmten Zeit, proportional ist der Menge wirksamer Substanz. Also ist innerhalb bestimmter Grenzen das Legeröhren-Wachstum ein Maßstab für die Konzentration der wirksamen Substanz.

Mit Hilfe dieser Eichungsmethode wurde nun folgendes gefunden:

*Die Verkettung der Hormone.*

a. Nach Hinzufügung von wirksamen Schwangerenharn zum Wasser der Fische setzt das makroskopisch sichtbare und messbare Legeröhren-Wachstum erst nach  $5\frac{1}{2}$ —6 Stunden ein; 12—14 Stunden nach der Verabreichung des Harnes biegt die Wachstumskurve, welche gradlinig verläuft ab: das Wachstum hört auf.

Die Dauer der anfänglichen Latenzzeit von  $5\frac{1}{2}$ —6 Stunden ist zwar beeinflussbar durch die Temperatur; die Harnkonzentration dagegen übt hierauf keinen Einfluss aus.

b. Nach Hinzufügung von Follikelsaft aus Schweineovarien zum Wasser setzt dagegen das makroskopisch sichtbare Wachstum der Legeröhre schon nach einer Latenzzeit von 1— $1\frac{1}{2}$  Stunden ein; und 6—8 Stunden nach der Verabreichung des Follikelsaftes hört das gradlinige Wachstum auf.

Eine direkte Wirkung der wirksamen Harnsubstanz auf die Legeröhre ist darum ausgeschlossen, weil in diesem Falle die Anfangslänge der Legeröhre entscheidend sein müsste für die Längenzunahme in einer bestimmten Zeit und bei einer bestimmten Konzentration der wirksamen Substanz. Dies ist aber nicht der Fall; vielmehr ist die Längenzunahme innerhalb bestimmter Grenzen unabhängig von der Ausgangslänge der Legeröhre.

Aus dieser Tatsache und aus dem obengenannten Unterschiede in der Latenzzeit habe ich die Hypothese gewonnen, dass die aktive Substanz des Schwangerenharns irgend eine Drüse reizt, welche ihrerseits eine, mit dem wirksamen Stoff aus Follikelsaft identische Substanz absondert, welche das eigentliche Wachstum der Legeröhre zur Folge hat. Später zu publizierende histologische Untersuchungen und Versuche mit fraktionierter Harnverabreichung, welche direkte Schlüsse zu ziehen gestatten, sprechen dafür, dass das Ovar die Drüse ist, welche teilweise von der Harnsubstanz transformiert wird und daraufhin das Wachstumshormon sezerniert, wodurch die Verlängerung der Legeröhre zu stande kommt. Es scheint also folgende *Kettenreaktion* vorzuliegen: Eine gonadotrope Harnsubstanz → Transformation des Ovars → Sekretion eines oestrogenen Hormons → Wachstum der Legeröhre.

#### *Biologische Analyse der beiden Hormone.*

a. Nach Verabreichung der 100-fachen Menge Oestron, welche maximal in der verwendeten Menge Harn vorhanden sein könnte, tritt erst spät ein Wachstum der Legeröhre ein. Die entsprechende Menge gonadotroper Substanz zeigte keine Einwirkung. Kochen des Harns zerstört die aktive Substanz nicht, im Gegensatz zu den bisher bekannten gonadotropen Hormonen. Die Substanz kann im Gegensatz zu Oestron aus nativem Harn ohneweiteres nicht mit Aether extrahiert werden. Die im Harn wirkende Substanz kann also weder Prolan noch Oestron sein. Nach ihrer Wirkung scheint die unbekannte Substanz eine gonadotrope zu sein, weil sie offenbar auf das Ovarium einwirkt; dies wird die folgende histologische Untersuchung auch zeigen. In der weiteren Diskussion möchten ich diese, meines Wissens niemals genauer biologisch definierte, gonadotrope *Substanz aus dem Harn, Lutidin* nennen. (EHRHARDT und KUEHN haben bereits 1933 auf das wahrscheinliche Vorkommen eines oestrogenen „Legeröhrenhormons“ hingewiesen, ohne exaktere Beweise zu geben für die Unterschiede dieses Hormons gegenüber Oestron.)

b. Nach Verabreichung der 1000-fachen Menge Oestradiol, welche in der verwendeten Menge Follikelsaft vorhanden sein kann, tritt erst nach längerer Zeit ein unerhebliches Wachstum der Legeröhre ein. Die wirkende Substanz aus dem Follikelsaft kann also kein Oestradiol sein.

Ihrer Wirkung nach scheint diese unbekannte Substanz des Follikelsaftes, welche kochbeständig ist, und leicht mit Aether extrahiert werden kann, eine oestrogene zu sein. Einfachheitshalber möchte ich diese, meines Wissens noch nicht biologisch definierte *Substanz aus Follikelsaft* in der weiteren Diskussion *Oviductin* nennen.

Zeigen nun andere Körpersubstanzen auch diese direkte oder indirekte positive Einwirkung auf die Legeröhre?

a. Wässrige Extrakte von Schweine-Ovaria und Corpora lutea,

menschliche Plazentae, Bullen- und Widder-Testes und Rinder-Nebennieren, erwiesen sich als wirksam im Fischtest.

b. Wässrige Extrakte aus Thyreoidea, Pankreas, Cerebrum, Hypophyse, Epiphyse, Thymus, Milz, Leber und Dünndarm waren völlig unwirksam.

Androsteron und Testosteron in relativ hohen Dosen zeigten, wie Oestron und Oestradiol, nur eine schwache Wirkung, welche etwa nach einer Stunde evident wurde. Das Lutidin ist also kein männliches Hormon.

Ob die wirksamen Substanzen aus diesen genannten Körperteilen identisch sind mit Lutidin oder Oviductin muss noch untersucht werden.

#### *Physiologische Ergebnisse.*

a. Bei einer Reihe schwangerer Frauen wurde die Lutidin-Konzentration im Harn untersucht. Es zeigte sich, dass die Konzentration dieses Hormons im Harn von dem 2. bis 10. Schwangerschaftsmonat konstant bleibt, also ganz im Gegensatz zu dem, was bei Oestron und Prolan der Fall ist, wo ein erheblicher Anstieg während der Schwangerschaft beobachtet wird.

b. Bei einer Reihe normal menstruierender Frauen wurde die Lutidin-Konzentration im Harn untersucht. Es zeigte sich, dass die Konzentration während der Menstruation abnimmt; dann folgt ein geringer Anstieg, welcher während der Ovulation fast wieder verschwunden ist. Der grösste Anstieg erfolgt am 19. bis 26. Tage post menstruationem. Die hier erreichte Konzentration stimmt überein mit derjenigen, welche während der Schwangerschaft gefunden wird, also im Gegensatz zu Oestron und Prolan, wo die maximalen Ausscheidungen während des Cyclus viel geringer sind als während der Schwangerschaft. Die Lutidin-Konzentration im Harn kann also nicht als Kriterium für eine etwaige Schwangerschaft gelten.

c. Solange der Mann potent ist, befindet sich Lutidin oft in seinem Harn und zwar in etwas niedrigerer Konzentration wie bei schwangeren Frauen.

d. Harn trächtiger Stuten und Kühe ist nur wenig bzw. kaum wirksam.

e. Im Harn eines krebskranken Mannes und einer krebskranken Frau wurde keine abnormale Konzentration von wirksamer Substanz gefunden.

f. Bei zwei Fällen von Mola hydatidosa wurde keine erhöhte Lutidin-Konzentration im Harn gefunden.

Wenn ich mich nicht täusche, bieten obenstehende Befunde für die Zukunft folgende Perspektive: Bisher wird dasjenige, was wir von der Endokrinologie wissen grösstenteils ermittelt durch die allgemein verwendeten Testobjekte wie Nagetiere und Hühner. Sehr wahrscheinlich gibt es beim Menschen aber endokrinologische Phänomene, welche mittels dieser Tiere nicht erfasst werden können. Verwendet man dagegen Testobjekte, welche aus ganz anderen Tiergruppen stammen, so ergibt sich vielleicht die Mög-

lichkeit, die von Nagetieren und Hühnern nicht zu erfassenden Phänomene nachzuweisen, bzw. zu studieren. Das scheint sich nach meinen Erfahrungen am Bitterling tatsächlich zu bewähren und es scheint nicht ausgeschlossen, dass mittels *Rhodeus amarus* als Testobjekt ein neues Gebiet in der Endokrinologie zugänglich gemacht werden kann.

Diese Arbeit wird jetzt im Labor. für exper. Morphologie in drei Richtungen weitergeführt:

1. Die Cytologie und Histologie von *Rhodeus amarus* vor und nach Verabreichung von wirksamen Substanzen wird bearbeitet.
2. Es wird versucht, die Lutidin- und Oviductin-Extrakte zu reinigen und zu isolieren.
3. Es werden auch Eichungen an Harn und Blut vorgenommen von Patienten mit (poly)hormonalen Störungen.

Die ausführliche Darstellung der Ergebnisse erscheint in Kürze in meiner Doktorarbeit, wo ich auch allen denen meinen Dank aussprechen werde, die mir so reich geholfen haben.

FLEISCHMANN und KANN, Pflüg. Arch. Bd. 230, 1932, S. 662.  
EHRHARDT und KÜHN, Endokrin. Bd. XIV, 1934, S. 245.

---

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN  
TE AMSTERDAM

---

PROCEEDINGS

VOLUME XL

No. 7

President and Acting-Secretary: J. VAN DER HOEVE.

---

CONTENTS

- CLAY, J.: "De energie en het doordringend vermogen van de kosmische stralen", p. 564.  
JAEGER, F. M., J. TER BERG and P. TERPSTRA: "Optical Rotation and Rotatory Dispersion in Solution and in the Crystalline State", p. 574.  
VERKADE, P. E., J. VAN DER LEE, Fr. J. C. DE QUANT und E. DE ROY VAN ZUYDEWIJN: "Neue Methoden für die Synthese von Glyceriden", II, p. 580.  
LUB, Mlle W. A.: "Le spectre optique de l'actinium". (Communicated by Prof. P. ZEEMAN). (With one plate), p. 584.  
EYMERS, JOHANNA G., and H. P. BOTTELIER: "Protoplasmic Movement in the Avena Coleoptile as related to Oxygen Pressure and Age". (Communicated by Prof. L. S. ORNSTEIN), p. 589.  
KAWAGUCHI, A.: "Beziehung zwischen einer metrischen linearen Uebertragung und einer nicht-metrischen in einem allgemeinen metrischen Raume". (Communicated by Prof. R. WEITZENBÖCK), p. 596.  
TERPSTRA, P., and J. TER BERG: "The Crystalforms of Some Complex Salts of Triamino-propane with trivalent Cobaltum and Rhodium". (Communicated by Prof. F. M. JAEGER), p. 602.  
HERK, A. W. H. VAN: "Die chemischen Vorgänge im Sauromatum-Kolben". II. Mitteilung. (Communicated by Prof. J. C. SCHOUTE), p. 607.  
HIRSCH, GOTTWALT CHRISTIAN: "Grundlinien einer Theorie der Golgikörper". I. Die Golgikörper im Raum. (Vorläufige Mitteilung). (Communicated by Prof. H. J. JORDAN). (With one plate), p. 614.  
BRETSCHNEIDER, L. H., und J. J. DUYVENÉ DE WIT: "Ueber die Hormonkette: Wirksame Harnsubstanz → Ovar → Legeröhre bei Rhodeus amarus; bewiesen durch die histologische Stufenzählmethode". (Vorläufige Mitteilung). (Communicated by Prof. H. F. NIERSTRASZ), p. 624.  
JULIEN, PAUL: "Distribution of the bloodgroups in some peoples of Liberia and Sierra Leone". (Communicated by Prof. C. U. ARIËNS KAPPERS), p. 631.  
JULIEN, PAUL: "Studies in bloodgroup correlations in some peoples of Liberia and Sierra Leone". (Communicated by Prof. C. U. ARIËNS KAPPERS), p. 640.
-

**Natuurkunde.** — *De energie en het doordringend vermogen van de kosmische stralen.* Door J. CLAY.

(Communicated at the meeting of June 26, 1937).

Toen men een tiental jaren geleden tot de slotsom kwam, dat het doordringend vermogen van de kosmische straling veel groter is dan van de gammastraling van radium en thorium, dacht men dat de eerste eveneens een gamma- of zoals men thans zegt photonen-straling zou zijn van een zeer korte golflengte, omdat men toen ter tijde niet anders kon verwachten dan dat het doordringingsvermogen steeds verder moest toenemen met het afnemen der golflengte.

Terwijl de doorgang door een loodlaag van 10 cm. dikte de gammastraling van radium tot 0,6 procent doet afnemen, weet men thans dat de harde primaire kosmische straling door 10 cm. lood slechts tot 95 % verminderd.

BOTHE en KOLHÖRSTER (1), die in 1929 het eerst een combinatie van Geigertellers gebruikten, werden daardoor tot de conclusie geleid, dat de stralen korpuskulair konden zijn, maar te dien tijde dacht niemand er aan dat het mogelijk zou zijn dat geladen deeltjes door den geheelen dampkring heen zouden kunnen dringen. Men kon berekenen, dat daarvoor een energie van minstens een milliard Volt noodig moest zijn. De energie van korpusculaire straling, door radioactieve stoffen uitgezonden, ligt tusschen 1 en 10 miljoen Volt en er was geen aanwijzing dat er nog deeltjes zouden kunnen zijn met energieën van minstens honderd maal grotere waarden.

Het was dus voorloopig aannemelijker dat de korpuskels in de atmosfeer zouden ontstaan, opgewekt door photonen, die van buiten komen. Want dat de oorsprong van de stralen buiten de atmosfeer moest zijn gelegen, werd wel algemeen verwacht, hoewel men ook dit niet kon bewijzen.

Door den waargenomen invloed van het magnetisch veld van de aarde werd het nu buiten twijfel gesteld, dat de straling van buiten moet komen en uit geladen korpuskels moet bestaan. Immers, indien de oorspronkelijke straling uit photonen bestond, kon men alleen verwachten dat de straling voor de geheele aarde constant moest zijn. En gevonden werd dat de intensiteit van de straling aan den aequator zwakker was en naar de polen toenam. Deze toename kon worden verklaard met behulp van de theorie van STÖRMER (2), welke oorspronkelijk was opgezet om de verschijnselen van het poollicht te verklaren. Dit licht ontstaat onder den invloed van een stroom van electronen, die in de aardatmosfeer binnendringen. En de theorie van STÖRMER geeft een verklaring, waarom het

aardmagneetveld het binnendringen alleen in de nabijheid van de polen toelaat. Met behulp van deze theorie laat zich nu berekenen dat het magneetveld van de aarde meebrengt, dat aan den magnetischen aequator slechts electronen kunnen doordringen met een energie hooger dan 10 milliard Volt. Deze grens geldt echter alleen voor horizontale richting. Voor verticale richting is deze grens zelfs 15 milliard Volt. De grenswaarde wordt naar de pool toe geleidelijk minder en op  $50^\circ$  is de horizontale grens 2 milliard Volt, de verticale 2,6 milliard Volt. Hoe meer men de pool nadert, hoe lager wordt de grens en hoe kleiner wordt het verschil tusschen de horizontale en verticale grens. In Fig. 1 zijn de grenswaarden

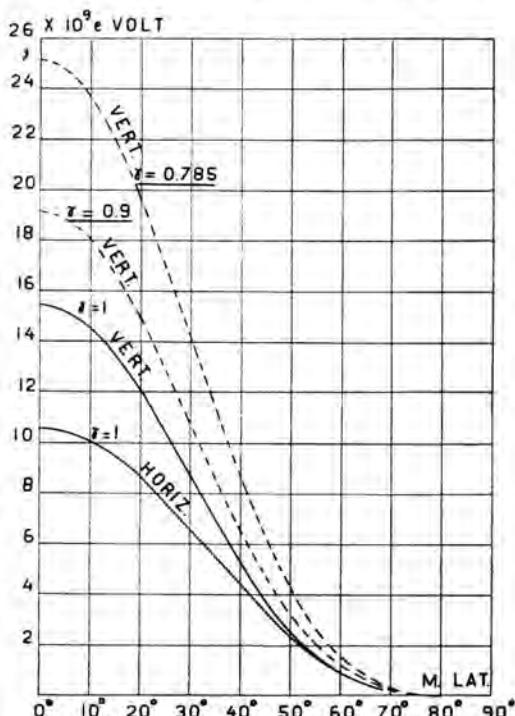


Fig. 1. Grenswaarden van de energie van de verboden ruimten voor elektrisch geladen deeltjes in het aardmagneetveld in vertikale en horizontale richting (doorgetrokken lijnen). De gestippelde lijn met  $\gamma = 0,785$  geeft de grenswaarde van de toegelaten deeltjes volgens LEMAÎTRE en VALLARTA en  $\gamma = 0,9$  geeft een gemiddelde waarde.

van de energie voor de verboden ruimte volgens STÖRMER gegeven voor horizontale en vertikale richting. De stippellijn  $\gamma = 0,785$  is de grenswaarde volgens LEMAÎTRE en VALLARTA voor de zeker toegelaten deeltjes in vertikale richting.

Met behulp van een energieverdeling van de electronen, gebaseerd op het doordringingsvermogen, laat zich dan een theoretische verklaring van het breedte effect geven, welke van het waargenomene niet veel verschilt. Hieruit blijkt dan, dat er een invloed van het aardmagneet-

veld zijn, men gedwongen wordt aan te nemen dat er geladen deeltjes van buiten af in de atmosfeer moeten binnendringen en dat deze voor een deel minstens energieën van 15 milliard Volt moeten hebben (3).

Maar er zijn ook andere wegen waarlangs men kan vaststellen, dat er zulke grote energieën in de kosmische stralen moeten voorkomen. Wij weten dat een electron door de materie bewegend, zijn energie kwijt raakt ten gevolge van de ionisatie van de atomen, die het van nabij passeert. Tot voor kort wisten we, dat het aantal atomen dat geïoniseerd wordt, kleiner is, naarmate de energie groter is. Voor electronen van ongeveer een milliard Volt wordt dit in lucht van gewonen druk op ongeveer 50 tot 100 ionen paren per cm baanlengte geschat en dientengevolge verliest een electron op die wijze ongeveer 1500 tot 3000 Volt per cm baanlengte. Zoo komt het dat de electronen die het poollicht veroorzaken slechts tot een diepte, die ongeveer 80 km. hoog ligt, in de atmosfeer kunnen doordringen en men rekent gemakkelijk uit dat voor het doordringen door de geheele atmosfeer zeker 1,5 à 2,5 milliard Volt noodig is omdat de dikte van de atmosfeer overeenkomt met een laag van 8 km. indien over deze geheele dikte de druk dezelfde bleef als op het zeeoppervlak.

Maar de experimenten van de laatste paar jaren van ANDERSON en NEDDERMEYER (4), van BLACKETT (5) en WILSON (6) en van LEPRINCE RINGUET en CRUSSARD (7) hebben geleerd dat het verlies bij de hoge energieën weer toeneemt tengevolge van secundaire processen, die bij de lagere energieën niet voorkomen.

Uit de statistische metingen van ANDERSON en NEDDERMEYER weten we thans dat electronen tusschen 10 en 300 miljoen Volt in lood tengevolge van de remstraling, waarbij photonen gevormd worden, verliezen ondergaan die wel evenredig met de energie toenemen en dit stemt overeen met de theoretische beschouwingen van BETHE en HEITLER (8).

Hoeveel energie derhalve electronen zouden moeten hebben om de geheele dampkring te doorboren weten we niet zeker, maar vermoedelijk meer dan 10 milliard Volt. Bij de intensiteitsmetingen onder 7 meter water tusschen Amsterdam en Indië hebben we nu een aanwijzing dat het omstreeks 12 milliard zou kunnen zijn. De nu juist ontwikkelde theorie van BHABHA en HEITLER (9) zou het waarschijnlijk maken dat de energie van de primaire electronen in den dampkring voor het grootste deel reeds spoedig over een groot aantal electronen verdeeld wordt en opdat de secundaire stralen tot het zeeniveau kunnen doordringen, moeten de electronen oorspronkelijk energieën van  $10^{12}$  e Volt gehad hebben. Zeker is het wel, dat primaire electronen, die de atmosfeer hebben doorlopen, niet dieper dan tot 10 m. onder zeeniveau door kunnen dringen. Maar we vonden dat tot veel groter diepten nog geladen deeltjes voorkomen. Drievoudige coïncidenties komen zelfs nog een enkelen keer voor onder 300 m. water (10, 11) of onder 140 m. aarde (320 wateraequivalent), gelijk wij in de mijnen in Kerkrade konden vaststellen (12, 13). Die coïncidenties kunnen alleen veroorzaakt worden door geladen deeltjes,

die de tellers allen doordringen. We moeten dus wel aannemen dat deze doordringende deeltjes geen electronen maar protonen zijn, want een

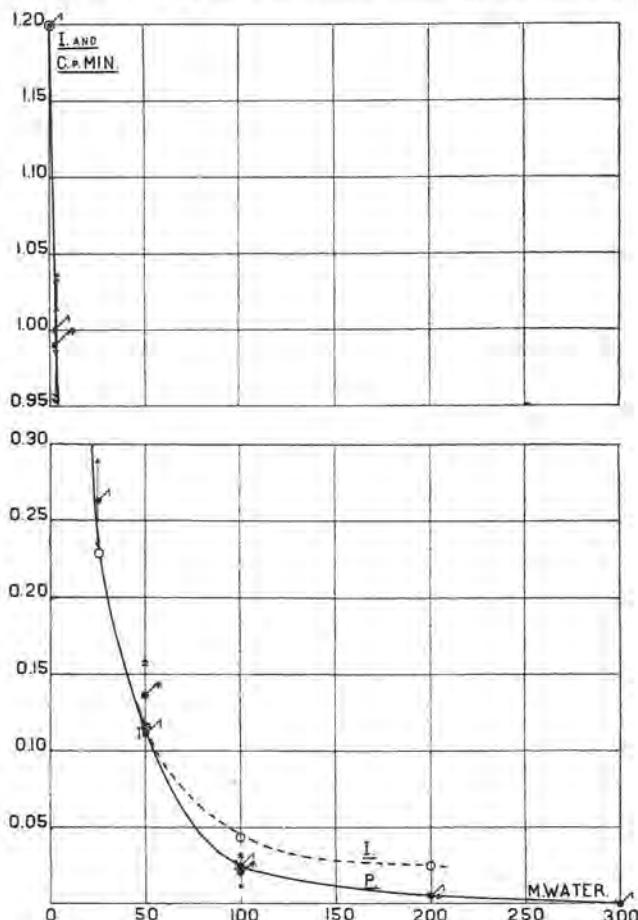


Fig. 2. Afname van de primaire stralen ( $\wedge$ ) van ionisatie (o) en showers ( $\wedge$ ) in diep water.

andere mogelijkheid is op het oogenblik moeilijk te bedenken. Het proton dat een zooveel grotere massa heeft, zal de energie vermindering welke de electronen ondergaan ten gevolge van de remstraling in veel geringere mate ondervinden, omdat de massa zooveel groter is. Er zijn echter ook wel bezwaren tegen deze onderstelling, welke ik op het oogenblik niet verder zal nagaan.

Op grond van het feit dat boven  $50^\circ$  Magnetische breedte geen toename van de straling op zeeniveau wordt waargenomen mag men aannemen, dat de grens die aan de energie gesteld is om door de atmosfeer heen te dringen gelijk moet zijn aan de grens, die op die breedte door het magnetisch veld gesteld wordt en dit brengt dus mee aan te nemen dat voor het doordringen van de atmosfeer voor de protonen ongeveer 3 à 4 milliard Volt noodig is. Aangezien, gelijk we zagen, sommige

deeltjes nog tot 300 m. water doordringen, moeten deze deeltjes ongeveer een energie van 100 milliard Volt bezitten.

Een directe meting van de energie, zoo die niet al te groot is, wordt gegeven door de WILSON-photo's, welke genomen worden door de kamer

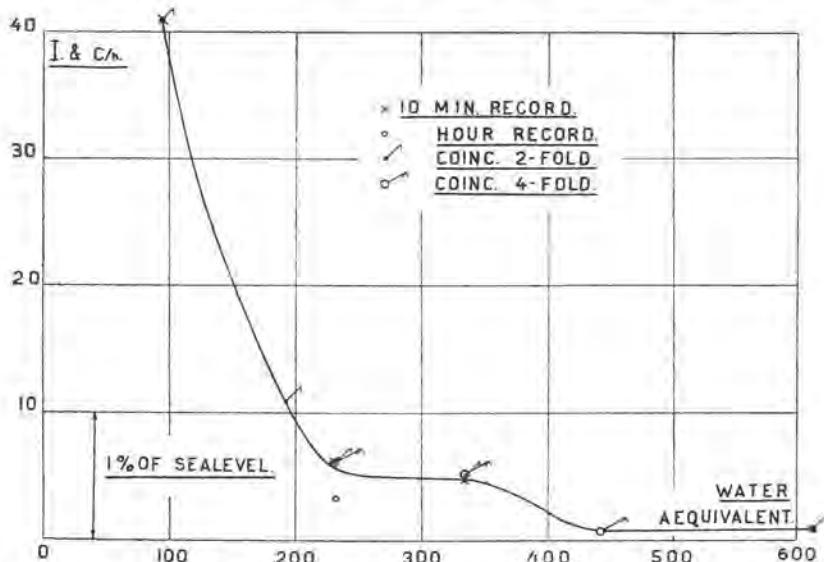


Fig. 3. Afname van de primaire stralen en van de ionisatie onder een dikke aardlaag. (12)

in een sterk magnetisch veld te plaatsen. De kromming van de baan is een maat voor de energie. Voor de groote energieën bestaat er zelfs een eenvoudig verband, n.l. als  $H$  de sterkte van het magnetisch veld voorstelt en  $r$  de kromtestraal van de baan in cm., dan wordt de energie in Volts gevonden uit de betrekking

$$V = 300 Hr.$$

Het is echter moeilijk de energie te vinden wanneer deze groot is, want in een veld van 20000 Gauss heeft de baan van een deeltje van 6 milliard Volt reeds een kromtestraal van 10 meter.

ANDERSON (4), KUNZE (14), BLACKETT (5, 6) en LEPRINCE RINGUET (7) hebben vele metingen verricht om de energie te bepalen. BLACKETT, zeer zorgvuldig met nauwkeurige inachtneming van alle storende factoren, komt kort geleden tot de conclusie dat er veel minder groote energieën aange troffen worden dan men moet verwachten uit tellermetingen. Maar daarentegen vindt LEPRINCE RINGUET (7), die metingen verrichtte in het uitgebreide veld van de groote magneet van Bellevue, dat meer dan een kwart van de stralen, die boven 1 milliard werden waargenomen een energie hadden boven 20 milliard Volts. Hoewel er dus nog belangrijke verschillen in de resultaten zijn, kan men toch zeker zijn dat tal van stralen energieën hebben boven 10 milliard Volts.

We bevinden ons met deze stralen in een gebied waar de energieën ruim 1000 maal groter zijn dan bij de radioactieve processen. En het is niet te verwonderen dat er veel moeite aan verbonden is de juiste methoden voor dit extreme gebied te vinden.

Ten slotte wil ik nog een ander experimenteel bewijs noemen dat ons de zekerheid geeft dat de deeltjes in de kosmische stralen dergelijke grote energieën hebben. HOFFMANN (15) heeft in 1927 ontdekt dat bij het meten van de ionisatie in een vat, het nu en dan voorkomt dat op eenmaal plotseling een groot aantal ionen in het vat vrijkomt. Men noemt dit verschijnsel HOFFMANNsche stooten en uit de plotselinge oplading blijkt, dat het aantal gemiddeld 10 miljoen ionen bedraagt, wat met een energie van 300 miljoen Volt overeenkomt, maar er komen ook groter stooten voor en herhaaldelijk worden er plotseling ontladingen van meer dan een milliard Volt energie waargenomen. Over deze stooten is reeds veel waargenomen, maar over velerlei is men het niet eens, alleen wel zeker is het feit, dat de energie op eenmaal vrijkomt en van een enkel deeltje dat binnendringt afkomstig moet zijn. Naar boven toe in de atmosfeer neemt het aantal stooten sterk toe. Onder 5 cm. lood is het aantal stooten in een vat belangrijk groter dan wanneer het vat onbedekt is. Het aantal

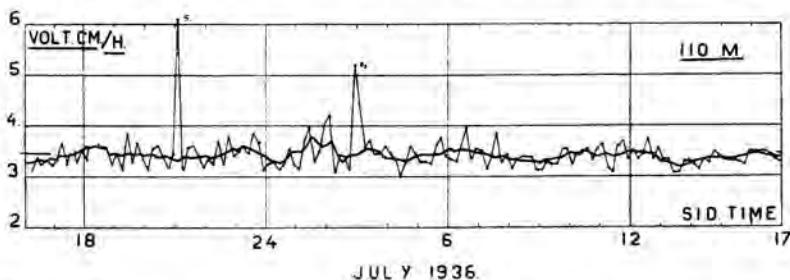


Fig. 4. 10-minuten registratie van de ionisatie onder 110 m. aarde (230 m. water-equivalent), met twee HOFFMANNsche stooten.  $S_1$  en  $S_2$ . (12)

en de grootte van de stooten hangt af van de bedekking van het vat. Uit de afname van de grootte van de stooten met de dikte van de aardlaag boven het vat meen ik een aanwijzing te zien dat de stooten door neutronen worden veroorzaakt.

MESSERSCHMIDT (16) geeft in zijn laatste onderzoeking aan, dat de gemiddelde stootgrootte 5 milliard Volt is, de grootste ongeveer 500 milliard Volt.

Zooeven deelde ik reeds mede, dat men wel moet aannemen dat er tweeërlei geladen deeltjes moeten zijn, waarvan de eene soort zeker electronen zijn, die niet zoo doordringend zijn, en de tweede soort vermoedelijk protonen, die zeer doordringend schijnen te zijn. We zien dit aan het verloop van de afname van de straling met de laag, die de straling heeft moeten doorlopen zoowel met de ionisatiekamer als met

tellers. De zachte straling ondergaat in de materie een afname, die evenredig is met het kwadraat van de kernlading van de atomen. Van deze

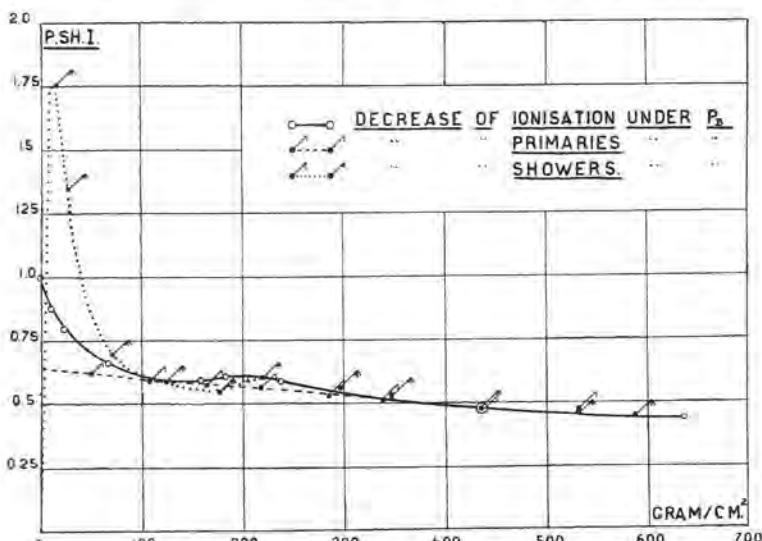


Fig. 5. Afname van primaire stralen en ionisatie en showers onder dikke laag lood. Onder 10 cm. lood is het aantal zachte primaireen zoo goed als nul geworden en blijven alleen de harde primairen over.

afname is men thans ook theoretisch vrij goed op de hoogte zoowel door directe meting als door de statistieken van ANDERSON and NEDDERMEYER in de WILSON-camera. Van de harde straling is het echter moeilijker zekerheid te krijgen hoe het mechanisme van de afname verloopt.

De enige materialen, die in groote dikte zijn onderzocht, zijn lucht en water. Gaat men nu de afname van de straling onder verschillende soorten van materie na, dan blijkt, dat de afname eerst vrij snel gaat en dan na een laag van 3 à 400 gram per cm.<sup>2</sup> veel langzamer. We beschouwen dit als een gevolg van het geheel verdwijnen van de zachte straling en het overblijven van de harde straling.

Deze harde straling is achtereenvolgens door de heeren v. GEMERT, WIERSMA, BRUINS en mij (17, 18) onderzocht. Verleden jaar waren we reeds tot de slotsom gekomen dat de afname van de harde straling in een laag evenredig is met de dichtheid van de stof, maar dit was niet in overeenstemming met het resultaat van STREET, WOODWARD en STEPHENSON (19), die hadden gevonden dat de afname van de straling meer in overeenstemming was met de electronen dichtheid. Om dit nader te onderzoeken hebben de heer WIERSMA en ik nagegaan, hoe de afname van de harde primaire stralen onder dikke lagen materie verloopt. Om die reden werd een opstelling gemaakt, waarbij het mogelijk was bij telling van de harde straling nog een voldoend aantal te behouden ondanks de dikte van de doorlopen absorptie laag en tevens dit onderzoek uit te voeren met verschillende stoffen, waarvan wij niet veel ter beschikking

hadden. De opstelling ziet men in de fig. 6. De lagen *B* en *C* en *D* konden van verschillende materialen genomen worden en zoo was het mogelijk

ook bij dikke lagen de absorptie van lood met kwik en tin, ijzer en zwavel te vergelijken. We konden nu de aantal stooten per uur met een nauwkeurigheid van 1 % meten en daaruit een absorptie coëfficient afleiden die tegen de gewone dichtheid, de electronen dichtheid en het totale kernoppervlak der atomen werd afgezet.

In de figuur ziet men het resultaat en het blijkt dat de afname evenredig is met de dichtheid en niet met de electronen dichtheid, nog minder met het totale kernoppervlak. Het ziet er dus naar uit of de absorptie eenvoudig afhankelijk is met het aantal zware deeltjes (neutronen en protonen) dat in de materie aanwezig is, onafhankelijk van de omstandigheid of deze deeltjes al of niet in atoom kernen geconcentreerd zijn en onafhankelijk van hunne lading. Dit gegeven, gecombineerd met het verschijnsel, dat de absorptie coëfficient voortdurend afneemt met de doorloopen laag en tenslotte bij heele dikke lagen een stadium optreedt waar

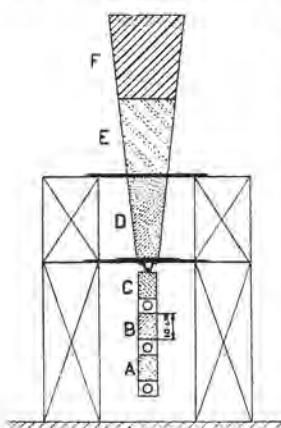


Fig. 6. Opstelling om de afname van de harde primaire stralen te meten. In *B*, *C*, *D*, *E* en *F* kan verschillend materiaal worden gebracht.

riekaart, dat de absorptie coëfficient voortdurend afneemt met de doorloopen laag en tenslotte bij heele dikke lagen een stadium optreedt waar

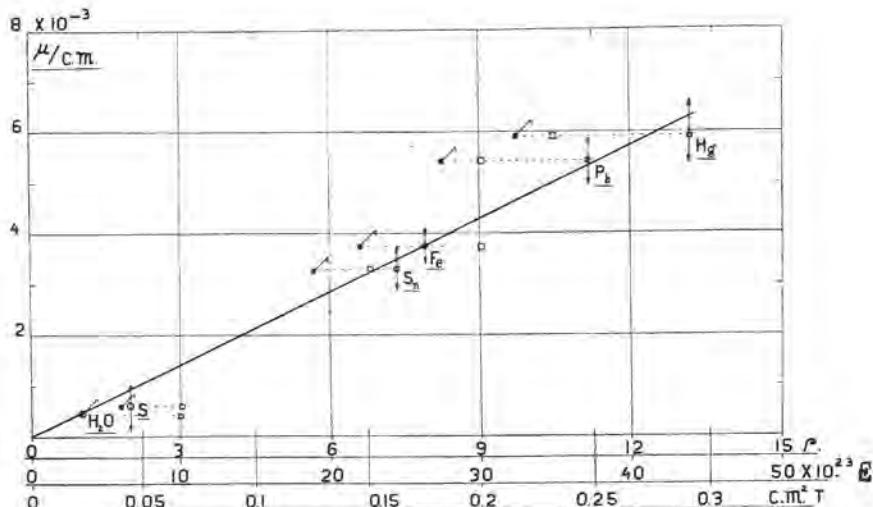


Fig. 7. Het verband tusschen den afname coëfficient  $\mu$  voor verschillende elementen  
1<sup>o</sup>. in afhankelijkheid met de dichtheid (aantal protonen + neutronen p. cc. (○));  
2<sup>o</sup>. in afhankelijkheid van de electronen dichtheid ▲; 3<sup>o</sup>. in afhankelijkheid van  
de totale kern doorsnede p. cc. (□).

de absorptie bijna niet afneemt, hebben ons tot het volgend beeld van het absorptie proces gevoerd.

Wanneer de oorspronkelijke protonen tegen de deeltjes, waaruit de

atomenkernen bestaan, botsen kan de energie overgedragen worden aan andere protonen maar ook aan neutronen. Deze neutronen zullen op hun beurt weer hun energie aan protonen kunnen afgeven. De protonen zullen onderweg hunne energie verder ook verliezen door ionisatie en misschien paarvorming, dientengevolge zullen we de volgende relatie kunnen opschrijven

$$\frac{dP}{dx} = -(\mu + \nu)P + \lambda N$$

en

$$\frac{dN}{dx} = -\lambda N + \nu P$$

de afname coëfficient die we waarnemen zal dus zijn

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dx} = -(\mu + \nu) + \lambda \frac{N}{P}.$$

Naarmate dus het gehalte der neutronen tegenover dat der protonen afneemt, zal de afname coëfficient kleiner worden en er zal op een gegeven oogenblik een toestand kunnen optreden, waarbij deze nul wordt. En dit zou de verklaring kunnen geven van wat we onder 300 m. wateraequivalent in Kerkrade gevonden hebben. Wij zijn nu bezig te trachten deze afname theoretisch af te leiden om met onze gegevens te kunnen vergelijken, maar daarbij doen zich nog moeilijkheden voor, die we nog niet geheel overwonnen hebben.

#### LITTERATUUR.

1. W. BOTHE & W. KOLHÖRSTER. Z. f. Physik **56**, 751, 1929.
2. C. STÖRMER. Ergebnisse der Kosmischen Physik. I—86, 1932.
3. J. CLAY. Proc. Roy. Acad. **35**, 1282, 1932.
4. C. ANDERSON and S. NEDDERMEYER. Phys. Rev. **50**, 263, 1936.
5. P. M. S. BLACKETT. Proc. Roy. Soc. London, A. **159**, 19, 1937.
6. P. M. S. BLACKETT and J. G. WILSON. Proc. Roy. Soc. London, A. **160**, 304, 1937.
7. L. LEPRINCE RINGUET and J. CRUSSARD. C. R. Ac. Sci. Paris, **204**, 240, 1937.
8. H. BETHE and W. HEITLER. Proc. Roy. Soc. London, A. **146**, 83, 1934.
9. H. J. BHABHA and W. HEITLER. Proc. Roy. Soc. London, A. **159**, 432, 1937.
10. J. CLAY, J. T. WIERSMA en C. G. 'T HOOFT. Physica **1**, 10, 1934.
11. J. CLAY en P. H. CLAY. Physica **2**, 1042, 1935.
12. J. CLAY, C. G. 'T HOOFT, J. L. L. DEY, J. T. WIERSMA. Physica **4**, 121, 1937.
13. J. CLAY, J. T. WIERSMA, G. N. GRAAFF. Physica **1**, 659, 1934.
14. P. KUNZE. Z. f. Physik. **79**, 203, 1932.
15. G. HOFFMANN. Gerl. Beitr. z. Geophysik. **20**, 12, 1928.
16. W. MESSERSCHMIDT. Z. f. Physik. **103**, 27, 1936.
17. J. CLAY, v. GEMERT, J. T. WIERSMA. Physica, **3**, 627, 1936.
18. J. CLAY, J. T. WIERSMA, E. M. BRUINS. Phys. **4**, 000, 1937.
19. J. C. STREET, WOODWARD and E. C. STEVENSON. Phys. Rev. **47**, 891, 1935.

## SUMMARY.

One of the most obvious properties of the Cosmic Radiation is the great penetrating power, which is about a hundred times as great as that of the gamma rays of radium. This has been the most important argument, why one could not accept the hypothesis that the primary cosmic radiation consisted of charged particles, although the experiments with counters taken by BOTHE and KOLHÖRSTER in 1929, pointed to that. At last however, in 1932, we were compelled to accept the corpuscular nature of the cosmic rays because the influence of the magnetic field of the earth on the rays did not leave an other possibility. But then from that conclusion followed that the energy of the particles must be at least a thousand times as great as the energy, which was known from radio-active processes.

It is necessary to be sure about that and therefore four independent proofs may be given. STÖRMER's theory gives us a method which decides, what energies a particle needs at least to penetrate through the earth's magnetic field. At the aequator the limit amounts to 15 milliard Volts in vertical direction.

Another method to find the energy is, to estimate the loss of energy of charged particles penetrating matter. In air 1500—3000 Volts per cm. is needed and for a layer equal to the thickness of the atmosphere, this will be 3 à 4 milliard Volts. We know that there are even particles that penetrate down to 300 m. into the water and means that there are some with an energy of about 100 milliard Volts.

A third very direct proof can be found from the photographs in the WILSON-camera taken in a strong magnetic field. From the curvature of the path of the particles the energy can be calculated. The latest data given by LEPRINCE RINGUET and CRUSSARD in the field of the big magnet in Paris are, that of the particles with energies above 1 milliard Volts a quarter has a value of more than 20 milliard Volts.

A fourth proof is found in the strong bursts (firstly found by HOFFMANN in 1927) which take place in the ionisation chambers. These release at once an energy between 10 million and 10 milliards Volts and this must be about  $1/10$  of the whole amount. Such bursts were even measured down to 140 m. under the earth at Kerkrade and the size can be measured very exactly there.

One knows with certainty now that there are two kinds of rays the less penetrating, which are certainly electrons and the more penetrating which are probably protons.

With regards to these rays, experiments were taken by VAN GEMERT, WIERSMA, BRUINS and the author and it was evident that the absorption in the matter is proportional to the density of the material that is to say simply proportional to the number of neutrons and protons together which are present in the matter, independent from the fact how they are combined in atoms. This leads us to the supposition that the absorption process

consists in a decrease of the number of protons, — that are the particles observed by the counters — partly by ionisation and radiation but also partly being replaced by neutrons which in their turn will be replaced by protons in a lower level. The examination of this absorption process may be decisive for our knowledge of the nature of the most penetrating rays.

---

**Chemistry. — Optical Rotation and Rotatory Dispersion in Solution and in the Crystalline State.** By F. M. JAEGER, J. TER BERG and P. TERPSTRA.

(Communicated at the meeting of June 26, 1937).

§ 1. If the molecules of a substance possess a dissymmetrical structure and that substance is dissolved in some solvent, the solution will manifest the phenomenon of rotation of the plane of polarization of an incident beam of linearly polarized light. An explanation of this optical rotation was given by FRESNEL in the well-known way by the supposition of the interference of two circularly polarized vibrations of opposite directions.

The rotation and the rotatory dispersion are dependent on the temperature, because of the motions of the dissolved molecules being a function of the temperature.

In a crystal, the molecules of which oscillate round definite mean positions of equilibrium, there can be *two* causes of a rotation of the plane of polarization of a polarized light-beam traversing the crystal:

1<sup>o</sup>. Either the molecules composing the crystal are themselves symmetrical and, therefore, optically inactive, — but their arrangement in the crystalstructure is a dissymmetrical one (*quartz; sodiumchlorate*). The optical activity of the crystal then is an immediate consequence of that dissymmetrical arrangement and it vanishes as soon as the latter is destroyed, — for instance by dissolving or melting the crystal.

2<sup>o</sup>. Or the molecules themselves possess a dissymmetrical structure and, as a logical consequence of this, their arrangement within the crystal-structure equally must be a dissymmetrical one: for the presence of any symmetry-element of the second order within the structure, necessarily would imply the simultaneous presence of an equal number of other molecules within the latter, which are the "mirror-images" of the original ones and, therefore, the crystal as a whole would appear to be optically-inactive.

In this paper the optically activity of a crystal as a consequence of the molecular dissymmetry of its constituting molecules will be distinguished as "molecular" rotation, — in contrast to the "structural" rotation mentioned sub 1<sup>o</sup>. Evidently the "molecular" rotation of a crystallized substance is always accompanied by a "structural" one, the influence of which is, in some way or other, superimposed upon the first one.

§ 2. For the purpose of comparison of the specific rotation  $[\rho]_l$  of the crystallized solute with the specific rotation  $[\alpha]_l$  of its *solution*, in the first case we can use the formula:

$$[\rho]_l = \frac{\rho}{l \cdot d} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (I)$$

in which  $\rho$  is the rotation observed,  $d$  the specific gravity of the crystalline substance and  $l$  the thickness, expressed in d.M., of the mass traversed by the beam of light.

Indeed, as for the solution the usual formula:

$$[\alpha]_l = \frac{a}{l} \cdot \frac{100}{p} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (II)$$

is applied, —  $l$  also here being expressed in d.M., — the data obtained in the two cases now are evidently comparable; for as by  $p$  the number of grammes of the substance present in 100 c.M.<sup>3</sup>. of the solution is denoted, in the case of the crystal this number  $p$  is equal to 100  $d$  and the latter formula, therefore, then is transformed into the first one,  $[\alpha]_l$  now becoming  $[\rho]_l$ .

It must be evident, however, that a direct comparison of  $[\alpha]_l$  and of  $[\rho]_l$  in the case of the same substance cannot reveal to us the true size of the contribution of the "structural" rotation in the crystal to the whole rotation observed.

For the value of  $[\alpha]_l$  in the solution is a kind of "mean" value, manifested by a random orientation of the dissolved molecules in all possible directions; whilst in the crystal  $[\rho]_l$  in general also relates, — it is true, — to a set of different orientations of the molecules, but those orientations being restricted to a much smaller number of possible directions. When, therefore, *rubidium-d-tartrate* for instance in solution shows a value  $[\alpha]_D = + 25^\circ .63$  ( $[M] = + 3779^\circ$ ) and  $[\rho]_D$  is found to be:  $- 380^\circ$ , — it is impossible to draw any conclusion from these numbers about the true value of the "structural" rotation, because those numbers relate, it is true, to the same numbers of contributing molecules, but the latter in quite different orientations.

LONGCHAMBON<sup>1)</sup> tried to compare the "dispersion" of the dissolved and the crystallized substance, by determining for the two phases considered the values  $\frac{[\alpha]_l}{[\rho]_l}$  at each wave-length.

He found, that the "dispersion" thus determined, in several cases of colourless salts were practically the same, so that:  $[\alpha]_{l_1} : [\alpha]_{l_2} : [\alpha]_{l_3} : \text{etc.} = [\rho]_{l_1} : [\rho]_{l_2} : [\rho]_{l_3} : \text{etc.}$

From this he drew the conclusion, that the molecular and the structural

<sup>1)</sup> L. LONGCHAMBON, Bull. Soc. franç. de minéral, 45, 244, (1922).

rotations of the crystalline substance must have *the same* rotatory dispersion.

§ 3. In our opinion the latter conclusion, seems, however, in general hardly to be backed by the experimental data, — as the following results may demonstrate.

In his investigation of the optically-active *potassium-rhodiumoxalate* LONGCHAMBON<sup>1)</sup> erroneously emphasizes, that in this case *no* structural rotation will be present, because of the fact that the complex ions of these salts have the same symmetry  $D_3$  as the crystals. Even in this case, however, some facts seem to point in the direction of a divergency from the author's empirical "rule"; and it seemed of interest, to check the latter by some other data concerning such coloured salts endowed with an appreciable rotatory power and manifesting a pronounced circular dichroism within the visible part of the spectrum, as well in solution as in the crystalline state.

As objects we choose the complex salts of *cobaltum* and *chromium* with the optically-active *trans-Cyclohexane-1-2-diamines* recently investigated in this laboratory<sup>2)</sup>, which in solution show a strong rotatory dispersion and COTTON-effect; whilst because of their typical hexagonal-pyramidal symmetry and their characteristic hemimorphic crystal-habitus, the preparation of accurately orientated plan-parallel plates of varied thicknesses easily could be performed.

For the measurement of the rotation of the crystalplates at different wave-lengths, use was made of a polarizing microscope provided with an ocular according to WRIGHT and an ordinary removable NICOL's prism as analyser. As a "half-shadow"-equipment, the apparatus of MACÉ DE LEPINAY was used, whilst a WÜLFING monochromator (FUESS) with an electric arc-lamp was applied for the observations to be made at different definite wave-lengths. The thickness  $l$  of each plate was microscopically measured in the usual way; it could be determined with an accuracy of 0,01 of a millimeter. The rotations, in general, could be measured with an accuracy of about  $0^\circ,1$ ; in the case of strong absorption the thinner plates were used without any considerable diminution of the accuracy in the rotation-measurements.

The results thus obtained in the case of levogyratory  
 $(Co(d-Chxn)_3)Cl_3 + 4H_2O$  and of levogyratory  
 $(Cr(d-Chxn)_3)Cl_3 + 3H_2O$  are collected in the Tables I and II.

§ 4. These rotations  $[\rho]$  and the specific rotations  $[\alpha]$  of the compounds studied here<sup>2)</sup> are graphically represented in the Figures 1 and 2, in which the curves I relate to the values of  $[\alpha]$ , the curves II to

<sup>1)</sup> L. LONGCHAMBON, Compt. rend. Paris, **178**, 1828, (1924).

<sup>2)</sup> F. M. JAEGER and L. BIJKERK, these Proceed., **40**, 112, 258, 316, (1937).

Wave-length in A.U.:	TABLE I.						
	Plate 1. $l = 0.42$ m.M.		Plate 2. $l = 0.12$ m.M.		Plate 3. $l = 0.08$ m.M.		Mean Specific Rotation [ $\rho$ ] . $10^{-1}$
	Observed rotation	Rotation pro m.M.:	Observed rotation	Rotation pro m.M.:	Observed rotation	Rotation pro m.M.:	
6650	+ 4.4	+10.5	—	—	—	—	+ 77°
6500	4.8	11.4	—	—	—	—	84
6300	5.8	13.8	—	—	—	—	101
6200	—	—	+ 1.8	+15.0	—	—	111
6100	7.2	17.1	—	—	—	—	126
5900	9.9	23.6	—	—	—	—	174
5700	13.3	31.6	3.9	32.4	—	—	237
5600	—	—	4.8	40.0	+ 3.0	+37.6	287
5500	20.2	48.2	5.7	47.5	3.8	47.5	351
5400	23.3	55.5	6.8	56.7	4.5	56.3	425
5360	—	—	7.2	60.0	5.0	62.5	453
5300	—	—	7.8	65.0	5.1	63.7	476
5260	—	—	7.2	60.0	4.9	61.3	449
5220	—	—	7.0	58.3	4.5	56.3	424
5200	—	—	—	—	4.3	53.8	396
5170	—	—	—	—	4.0	50.0	368
5130	—	—	—	—	3.5	43.7	322
5110	—	—	—	—	2.5	31.2	230

Specific Gravity  $d$  of the Crystals: 1.356.

Wave-length in A.U.:	TABLE II.					
	Plate 1. $l = 0.16$ m.M.		Plate 2. $l = 0.10$ m.M.		Mean Specific Rotation [ $\rho$ ] . $10^{-1}$ :	
	Observed rotation	Rotation pro m.M.	Observed rotation	Rotation pro m.M.		
6650	+1.0	+ 6.2	—	—	—	+ 46°
6600	1.1	6.8	—	—	—	51
6400	1.3	8.1	—	—	—	61
6200	1.7	10.1	—	—	—	76
6000	1.8	11.3	—	—	—	85
5900	2.0	12.5	—	—	—	94
5800	2.2	13.8	—	—	—	103
5600	3.0	18.9	—	—	—	142
5500	4.0	25.0	—	—	—	188
5400	4.8	30.0	—	—	—	225
5300	6.0	37.5	+ 3.7	+37.0	+37.0	280
5200	6.8	42.5	4.2	42.0	42.0	317
5170	7.2	45.0	4.4	44.0	44.0	334
5130	—	—	4.6	46.0	46.0	346
5100	—	—	5.0	50.0	50.0	376
5000	—	—	4.8	48.0	48.0	361
4930	—	—	4.2	42.0	42.0	316

Specific Gravity  $d$  of the Crystals: 1.328.

$[\rho] \cdot 10^{-1}$ . In first instance it at once gets clear, that the crystals are for all wave-lengths in the visible spectrum, — even in the red part, — *dextrogyratory*, although *in solution* the two salts are *levo-rotating*.

Specific Rotations  $[\alpha]$  and  
 $[\rho] \cdot 10^{-1}$  in Degrees

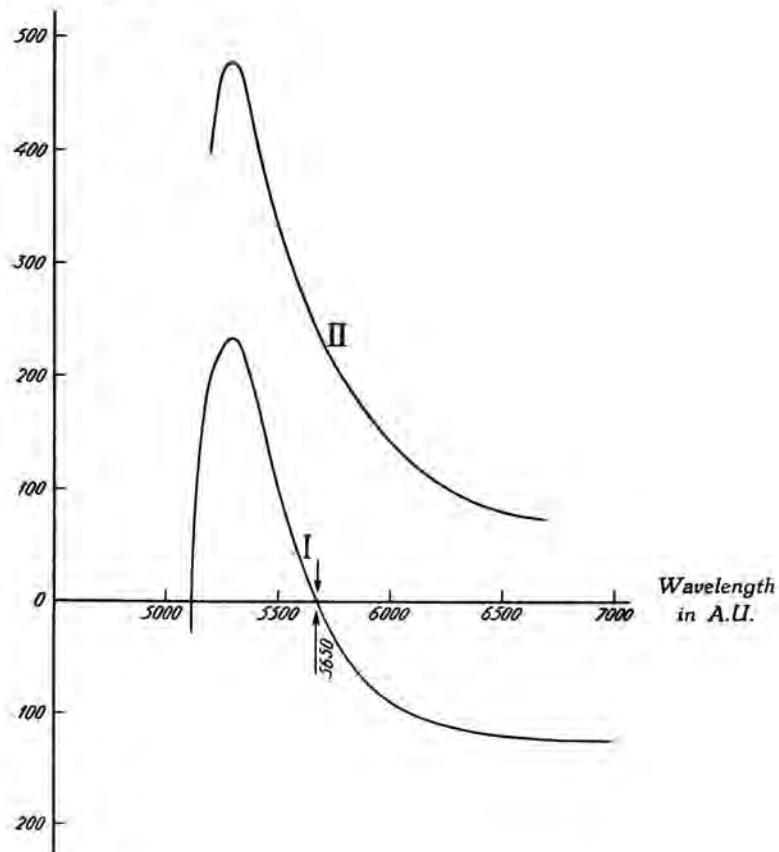


Fig. 1. Rotatory Dispersion of the Solutions (I) and of the Crystals (II) of  
L- $\{Co(d\text{-}Chxn)_3\}Cl_3 + 4H_2O$ .

Secondly, the wave-lengths of *maximum* rotation in both the solutions and in the crystalline state prove to coincide, — the situation of the absorption-bands evidently being practically identical in the two phases; also the *algebraic sign* of the COTTON-effect is doubtlessly the same, although obviously its absolute value is different.

As to LONGCHAMBON's "rule", however, it must be remarked that it evidently does *not* hold in these cases. For if  $\frac{[\alpha]_{\lambda_1}}{[\rho]_{\lambda_1}}$  shall be constant, both dispersion-curves surely must pass the *X*-axis at the *same* wavelength  $\lambda$ ; i.e. the two curves necessarily there must intersect in the same point of

zero-rotation. Now in our cases, this certainly is *not* true<sup>1)</sup> and, therefore, the relation emphasized by the French author can, in general, *not* be valid:

*Specific Rotations [α] and  
[ρ] · 10<sup>-1</sup> in Degrees*

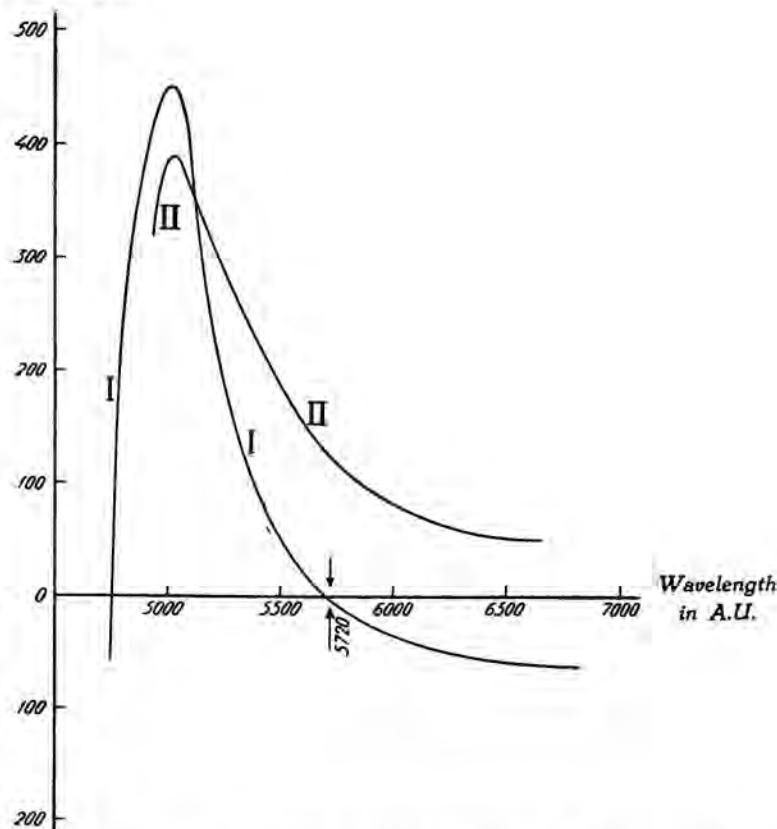


Fig. 2. *Rotatory Dispersion of the Solutions (I) and of the Crystals (II) of L-[Cr(d-Chxn)<sub>3</sub>]Cl<sub>3</sub> + 3H<sub>2</sub>O.*

the dispersion of the solution and the crystal, as defined by him, can, therefore, *not* be the same for the two phases considered.

Groningen, Laboratory for Inorganic and Physical Chemistry of the University.

<sup>1)</sup> Also in LONGCHAMBON's results with K<sub>3</sub>[Rh(C<sub>2</sub>O<sub>4</sub>)<sub>3</sub>] this condition evidently is *not* fulfilled.

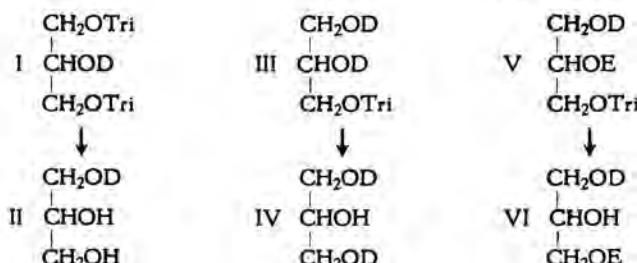
**Chemistry. — Neue Methoden für die Synthese von Glyceriden. II<sup>1</sup>).**

Von P. E. VERKADE, J. VAN DER LEE, Frl. J. C. DE QUANT und  
E. DE ROY VAN ZUYDEWIJN.

(Communicated at the meeting of June 26, 1937).

§ 1. Bisher wurden aus Acyl-tritylglycerolen die Tritylgruppen mit Hilfe einer gesättigten Lösung von Bromwasserstoffsäure in Eisessig<sup>2</sup>) oder in Chloroform<sup>3</sup>) oder besser durch Einleiten von Salzsäuregas in eine Lösung der gegebenen Substanz in einem geeigneten Lösungsmittel<sup>4</sup>) (z.B. Äther oder Petroläther) abgespalten. Wenn diese Verbindungen einen  $\beta$ -ständigen Fettsäurerest enthielten, trat hierbei immer Wanderung dieser Gruppe aus der  $\beta$ - in eine  $\alpha$ -Stellung auf: die  $\beta$ .Acyl- $\alpha\gamma$ .ditritylglycerole I ergaben auf diese Weise dann  $\alpha$ .Monoglyceride II<sup>5</sup>), während aus den einsäurigen bzw. zweisäurigen  $\alpha\beta$ .Diacyl- $\gamma$ .tritylglycerolen (III bzw. V) dann einsäurige, bzw. zweisäurige  $\alpha\gamma$ .Diglyceride (IV<sup>6</sup>) bzw. VI<sup>7</sup>) entstanden.

(D bzw. E = *Fettsäurerest*; Tri = Tritylgruppe)



Bei in gleicher Weise erfolgender Detritylierung von Verbindungen der Typen I und III, welche jedoch in der  $\beta$ -Stellung eine Benzoylgruppe oder *p*.Nitrobenzoylgruppe enthielten, — derartige Verbindungen vom Typus V sind noch nicht untersucht —, fand dagegen keine Wanderung der  $\beta$ -ständigen Gruppe statt; auf diese Weise wurden z.B.  $\beta$ .(*p*.Nitro-

<sup>1</sup>) I: VERKADE und VAN DER LEE, Proc. Royal Acad. Amsterdam, **37**, 812 (1934).

<sup>2</sup>) HELFERICH und SIEBER, Z. physiol. Chem. **170**, 31 (1927).

<sup>3</sup>) JACKSON und KING, J. Am. Chem. Soc. **55**, 678 (1933).

<sup>4</sup>) VERKADE, VAN DER LEE und Frl. MEERBURG, Rec. trav. chim. **54**, 716 (1935).

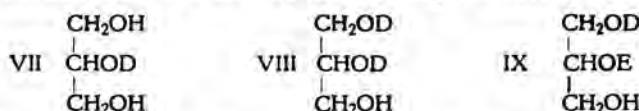
<sup>5</sup>) JACKSON und KING, loc. cit.; vergl. VERKADE, VAN DER LEE und Frl. MEERBURG, Rec. trav. chim. **56**, 613 (1937).

<sup>6</sup>) JACKSON und KING, loc. cit.; VERKADE, VAN DER LEE und Frl. MEERBURG, Rec. trav. chim. **54**, 716 (1935); vergl. VERKADE und VAN DER LEE, ibid. **55**, 267 (1936).

<sup>7</sup>) VERKADE und VAN DER LEE, loc. cit.

benzoyl)glycerol und  $\alpha\beta$ .Dibenzoylglycerol hergestellt. Dieser merkwürdige Gegensatz sei hier nur erwähnt; er braucht uns jetzt nicht weiter zu beschäftigen.

In einer schon zitierten Abhandlung<sup>4)</sup> haben VERKADE, VAN DER LEE und Fr. MEERBURG die Frage aufgeworfen, ob die Detritylierung auf katalytisch-reduktivem Wege in neutralem Milieu ausgeführt werden kann und unter solchen Umständen die Wanderung von  $\beta$ -ständigen Fettsäureresten vielleicht unterbleibt. Sie dachten dabei an die gleich näher zu besprechende Methode von BERGMANN und CARTER<sup>5)</sup> für die Herstellung von  $\beta$ .Monoglyceriden, daneben u.a. auch an Angaben von STIMMEL und KING<sup>6)</sup> über die Umlagerung von  $\beta$ - in  $\alpha$ .Monopalmitin unter Einfluss von Säure oder Base. Es hat sich uns nunmehr gezeigt, dass eine solche Detritylierungsweise in der Tat möglich ist. Durch Schütteln von Acyl-tritylglycerolen, suspendiert in absolutem Aethanol, bei Zimmertemperatur mit Wasserstoff in Gegenwart von Palladium auf aktiver Kohle<sup>10)</sup> als Katalysator werden die Tritylgruppen in Form von Triphenylmethan abgespalten; Verbindungen vom Typus I ergeben dabei  $\beta$ .Monoglyceride VII, während aus denjenigen der Typen III, bzw. V dann einsäurige, bzw. zweisäurige  $\alpha\beta$ .Diglyceride (VIII, bzw. IX) erhalten werden. In den bisher untersuchten Fällen machte die Trennung der beiden Reaktionsprodukte keinerlei Schwierigkeit; die erhaltenen Glyceride waren sehr rein und die Ausbeuten sehr gut. Als einziger, übrigens unerheblicher Einwand gegen dieses neue Verfahren könnte angeführt werden, dass die Detritylierung langsam verläuft.



Die Struktur der erhaltenen Glyceride ist nötigenfalls leicht und mit völliger Sicherheit zu bestimmen. Es erübrigt sich, die verschiedenen Methoden, die hierfür zu Dienste stehen, hier zu besprechen.

Es hat sich uns kürzlich gezeigt, dass schon 1932 MICHEEL<sup>11)</sup> die Detritylierung auf im Prinzip gleicher Weise gelungen war, sei es denn auch bei Verbindungen ganz anderer Art; dieser schüttelte nämlich die betreffenden Substanzen in Eisessig-Lösung bei 40—50° mit Wasserstoff in Gegenwart von Platinmohr. Für unseren Zweck kam unseres Erachtens Eisessig als Lösungsmittel nicht in Betracht, da in diesem Medium Wanderungen  $\beta$ -ständiger Fettsäurereste keineswegs als ausgeschlossen zu erachten sind. In diesem Zusammenhang ist es interessant, dass MICHEEL vermeldet, bei der Detritylierung auf die genannte Weise von 6-Trityl-2,3,4-triacetyl- $\alpha$ .methylglucosid neben 2,3,4-Triacetyl- $\alpha$ .methylglucosid auch

<sup>8)</sup> Z. physiol. Chem. **191**, 211 (1930).

<sup>9)</sup> J. Am. Chem. Soc. **56**, 1724 (1934).

<sup>10)</sup> Vergl. OTT und SCHRÖTER, Ber. **60**, 624 (1927).

<sup>11)</sup> Ber. **65**, 262 (1932).

das 2,3,6-Isomer erhalten zu haben, sodass hier Wanderung einer Acetylgruppe stattgefunden hat.

§ 2. Für die Herstellung von  $\beta$ .Monoglyceriden war bereits eine schöne Methode von BERGMANN und CARTER<sup>8)</sup> ausgearbeitet worden. Durch Einwirkung eines Acylchlorids auf  $\alpha\gamma$ .Benzylidenglycerol (2-Phenyl-5-hydroxy-[1.3-dioxacyclohexan]) in Gegenwart von Pyridin wird ein  $\beta$ .Acyl- $\alpha\gamma$ .benzylidenglycerol erhalten, aus welchem der Benzylidenrest durch Schütteln in alkoholischer Suspension mit Wasserstoff und Palladiummohr bei Zimmertemperatur abgespalten wird. Die Reichweite dieser Methode ist dieselbe wie die der unserigen; beide versagen selbstverständlich, wenn es sich um die Herstellung von  $\beta$ .Monoglyceriden mit ungesättigten Säurekomponenten handelt. Ein geringer Vorzug des Verfahrens von BERGMANN und CARTER vor unserem liegt in dem schnelleren Verlauf der katalytischen Reduktion. Ein grosser Nachteil ist demgegenüber der Umstand, dass bei  $\alpha\gamma$ .Benzylidenglycerol und seinen Acyl-derivaten geometrische Isomerie auftritt; bereits BERGMANN und CARTER selbst<sup>12)</sup> und u.a. auch DAVIES, HEILBRON und JONES<sup>13)</sup> hatten mit hieraus entspringenden Schwierigkeiten zu kämpfen.

Für die Synthese von  $\alpha\beta$ .Diglyceriden sind ingeniose, doch sehr umständliche und hierdurch wenig durchsichtige Methoden von BERGMANN und dessen Mitarbeitern<sup>14)</sup> angegeben worden. Wir verzichten darauf, diese Methoden hier zu besprechen, da sie noch nicht gedient haben zur Herstellung von  $\alpha\beta$ .Diglyceriden, welche eine oder zwei Fettsäuren als Säurekomponenten enthalten, und es nach unserer Ansicht sehr zweifelhaft oder sogar sehr unwahrscheinlich ist, dass sie sich in solchen Fällen als brauchbar erweisen sollten; Wanderungen  $\beta$ -ständiger Fettsäurereste sind dann wohl fast mit Sicherheit zu erwarten. Es ist unseres Erachtens nicht gewagt, zu behaupten, dass jetzt von uns — mit dem schon genannten Vorbehalt bezüglich ungesättigter Säurekomponenten — die erste allgemein brauchbare Methode zur Synthese einsäuriger und zweisäuriger  $\alpha\beta$ .Diglyceride gefunden ist. Als Vorteile unserer Synthese möge weiter ihre Einfachheit und Durchsichtigkeit genannt werden.

Erwähnt sei noch, dass GRÜN<sup>15)</sup> reines  $\alpha\beta$ .Dipalmitin und  $\alpha\beta$ .Distearin hergestellt hat. Es zeigte sich diesem Forscher nämlich, dass beim Erhitzen der korrespondierenden  $\alpha\gamma$ .Diglyceride eine teilweise Umlagerung in den  $\alpha\beta$ -Isomeren eintritt; beide Isomeren konnten durch fraktionierte Krystallisation getrennt werden. Eine allgemeine und praktische Herstellungs-

<sup>12)</sup> Loc. cit., S. 218.

<sup>13)</sup> J. chem. Soc. 1934, 1232.

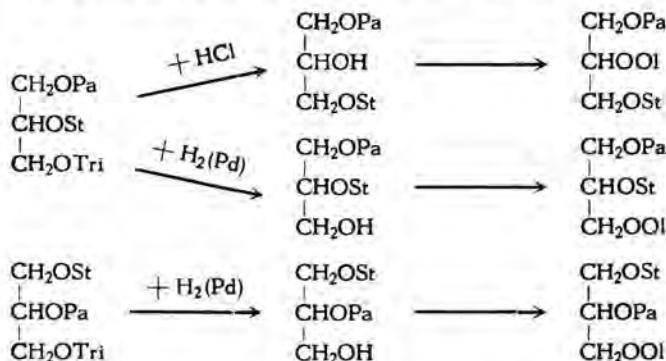
<sup>14)</sup> BERGMANN, BRAND und DREYER, Ber. 54, 936 (1921); vergl. auch BERGMANN, Z. physiol. Chem. 137, 27 (1924).

<sup>15)</sup> Vergl. HEFTER—SCHÖNFELD, Chemie und Technologie der Fette und Fettprodukte, Bd. I, S. 230 (1936); KIRCH, Inaugural-Diss. Technische Hochschule Dresden, 1928.

weise für einsäurige  $\alpha\beta$ .Diglyceride wird aus diesem interessanten Befund wohl kaum hervorgehen.

§ 3. Die nunmehr leicht zugänglich gewordenen zweisäurigen  $\alpha\beta$ .Diglyceride können in bestimmten Fällen mit Erfolg für die Synthese dreisäuriger Glyceride benutzt werden. Als Beispiel geben wir nachstehend ein Schema für die Herstellung der drei Oleyl-palmityl-stearyl-glycerole:

(Ol = Oleyl; Pa = Palmityl; St = Stearyl; Tri = Trityl)



Vor einiger Zeit haben VERKADE, VAN DER LEE und Fr. MEERBURG<sup>16)</sup> in einer analogen Weise die drei Myristyl-palmityl-stearyl-glycerole hergestellt, jedoch unter Verwendung der zweisäurigen  $\alpha\gamma$ .Diglyceride als Zwischenprodukt. Es unterliegt wohl fast keinem Zweifel, dass auch die drei Oleyl-palmityl-stearyl-glycerole im Prinzip auf diesem Wege zugänglich sind; es darf nämlich erwartet werden, dass auch bei der Detritylierung von  $\alpha\beta$ .Diacyl- $\gamma$ .tritylglycerolen mit  $\alpha$ - oder  $\beta$ -ständigem Oleylrest in der klassischen Weise Wanderung der  $\beta$ -ständigen Gruppe eintritt. Die Herstellung von Verbindungen dieser Typen — z.B.  $\alpha$ .Stearyl- $\beta$ .oleyl- $\gamma$ .tritylglycerol oder  $\alpha$ .Oleyl- $\beta$ .palmityl- $\gamma$ .tritylglycerol — in reinem Zustande und mit guter Ausbeute bietet jedoch experimentelle Schwierigkeiten dar und zwar wegen der niedrigen Schmelzpunkte dieser Substanzen. Im oben gegebenen Schema wird nun der Gebrauch dieser Substanzen vermieden. Hier dienen als Ausgangsmaterial die beiden Palmityl-stearyl- $\gamma$ .tritylglycerole, deren Herstellung keinerlei Schwierigkeiten darbietet<sup>7)</sup>.

Vorstehendes bezweckt nur, unsere Prioritätsrechte zu sichern und das betreffende Gebiet für uns zu reservieren. Wir werden zu gelegener Zeit anderswo näher auf das Besprochene eingehen und Beweismaterial hierfür anführen.

*Rotterdam-Delft, Juli 1937.*

<sup>16)</sup> Rec. trav. chim. 56, 365 (1937).

**Physics.** — *Le spectre optique de l'actinium.* Par Mlle W. A. LUB,  
(Laboratoire „Physica”, Université d'Amsterdam). (Communicated  
by Prof. P. ZEEMAN).

(Communicated at the meeting of June 26, 1937).

L'actinium étant le seul élément dont le spectre optique n'est pas connu jusqu'à présent il nous a semblé important de tacher d'obtenir ce spectre. Les produits actinifères que Madame CURIE avait mis à notre disposition étaient:

Un produit d'oxyde de lanthane actinifère de 5 mgr. contenant 0.053 mgr. de l'actinium (produit 316 a 2) et un produit d'oxyde de lanthane actinifère de 4 mgr. contenant 0.050 mgr. actinium (produit 316 a 7). Comme ces produits sont très précieux, nous avons étudié quelle méthode était la plus efficace pour produire le spectre. Nous avons cherché une méthode pour obtenir le spectre le plus intense possible, sans user trop de matière et qui permettrait en même temps de regagner après l'expérience tout ce qui resterait du produit. Après quelques expériences nous avons choisi comme source lumineuse l'étincelle condensée éclatant entre un fil de platine et une mèche en fil de platine plongée dans la solution du produit à examiner, méthode indiquée par DEMARÇAY<sup>1</sup>), et employée par lui pour étudier le spectre du Radium.

L'étincelle était obtenue au moyen d'un transformateur de 10.000 Volts. Dans le circuit on place un condensateur et une self et on choisit les conditions électriques de sorte qu'on obtient un spectre lumineux, ayant soin d'employer très peu de la solution et en prenant des mesures pour ne pas être trop gêné par les spectres de bandes. La solution se trouve dans une petite coupelle de platine (contenu 0.3 cm.<sup>3</sup>); dans le liquide on place une petite mèche en fil de platine pur. La mèche est enroulée en cercle à une de ses extrémités de façon à lui donner une base qui repose sur le fond de la coupelle. L'autre extrémité de la mèche se dresse au dessus du niveau du liquide et c'est sur elle que vient éclater l'étincelle. Il faut bien régler la longueur de la mèche qui dépasse le niveau du liquide.

Afin de ne pas perdre de la substance par la projection des petites gouttes quand l'étincelle jaillit entre les électrodes, la coupelle de platine est placée dans un petit vase de verre, fermé d'en haut par une plaque de verre pourvue d'un trou pour laisser passer l'électrode supérieure. Dans le petit vase on a percé deux trous pour le passage de la lumière et un trou en bas pour y poser la coupelle qui contient la solution avec son fil de platine qui amène le courant.

<sup>1)</sup> DEMARÇAY, Spectres électriques, Paris 1895.

Pour montrer combien cette méthode de DEMARÇAY est efficace pour prendre des spectres des produits précieux, nous pouvons mentionner que la quantité utilisée pour chaque cliché est de  $3 \times 10^{-6}$  gr. Ac.

Avant d'être mis en solution, l'oxyde de lanthane était transformé en nitrate<sup>2)</sup>. Pour travailler convenablement nous avons pris une solution de lanthane actinifère à une concentration d'un pour cent, et de 1 sur 10.000 en actinium. Dans ces conditions on peut espérer obtenir les raies ultimes de l'actinium.

Une expérience préliminaire avec un spectrographe à petite dispersion (5000—3500 Å sur 3.5 cm.) montrait pour le spectre de 316  $\alpha$  2 dans la région de 5000—4000 Å quatre raies qui n'existaient pas sur les clichés du spectre d'un autre oxyde de lanthane actinifère (produit 317 activité 20.000 fois plus faible) pris dans les mêmes conditions. Les mesures du spectre nous montraient combien nombreuses étaient les coincidences possibles. Il fallait donc photographier le spectre avec un spectrographe d'une dispersion assez grande qui en même temps serait d'une assez grande luminosité.

Nous avons pris les clichés définitifs avec le grand spectrographe de STEINHEIL à trois prismes de verre. Cet instrument a une ouverture relative de f: 10 et une dispersion de 9.3 Å/mm. pour 4400 Å; 7.3 Å/mm. pour 4150 Å; 6.4 Å/mm. pour 4050 Å.

Le spectrographe STEINHEIL réglé de façon à ce que la lumière des raies nouvelles traversait l'appareil de la manière la plus avantageuse, ne donnait que la région spectrale de 5850 Å jusqu'à 3850 Å. Pour étudier la partie ultraviolette du spectre, nous avons pris en même temps le spectre avec un spectrographe de quartz ( $E_2$  de HILGER). Nous avons mesuré les trois spectres des produits 317, 316  $\alpha$  2, 316  $\alpha$  7 sur les clichés du STEINHEIL par rapport au spectre du fer, un cliché de chaque produit. Les raies nouvelles ont été mesurées sur tous les six clichés.

Les produits 316  $\alpha$  2 et 316  $\alpha$  7 étaient de la même substance mère, le produit 316  $\alpha$  7 plus purifié que l'autre, ce qui se voyait dans le spectre. Les raies ultimes de quelques impuretés dans le spectre du 316  $\alpha$  2 avaient disparu dans le spectre de 316  $\alpha$  7. A côté des raies du spectre du La, du Pt et quelques bandes de LaO, on trouve dans ces produits le Ca., le Mg. et quelques raies ultimes de l'Al, du Zn, du Ba, du Mn et du Pb. En comparant le spectre 317 avec les spectres 316  $\alpha$  2 et 316  $\alpha$  7 on peut se former une idée des impuretés qui étaient en diminution et de celles qui étaient en augmentations dans les produits divers. En général on peut constater ceci: Le Ca, Mg, Al, Mn, Pb et Zn se trouvent augmentés dans les produits 316 par rapport au produit 317. Tandis qu'on trouve dans le spectre du produit 317 le Nd et le Pr., on ne retrouve même pas les raies ultimes dans les spectres du 316  $\alpha$  2 et 316  $\alpha$  7.

---

<sup>2)</sup> Je tiens à remercier bien vivement Mlle PEREY qui a effectué les préparations des solutions radio-actives, ainsi que la purification du produit 316  $\alpha$  7.

La présence de l'aluminium et du magnésium peut s'expliquer ainsi: le produit 316 a 2 a été employé pour une autre expérience et placé pendant quelque temps dans une cuvette fermée de mica. Comme ce produit est très actif, il a attaqué le mica et un petit morceau peut avoir sali le produit actinifère.

Nous avons employé les clichés du spectrographe à quartz pour la discussion des raies ultimes qui tombent au dessous de 3850 Å.

Parmi les 700 raies que nous avons mesurées, on trouve sept raies d'une intensité assez forte qui n'existent pas sur les clichés du produit 317 et qu'on ne peut pas non plus attribuer à une des impuretés constatées dans les produits 316. Afin d'être sûr de ce que ces raies sont vraiment des raies nouvelles, nous avons comparé notre liste aux listes des raies spectrales de tous les éléments chimiques dont nous avons constaté les raies ultimes dans un des produits 316 et 317. Pour cette comparaison nous avons employé le „Handbuch der Spektroskopie“ de KAYSER et les données qu'on trouve dans la littérature plus récente. Nous avons trouvé comme raies nouvelles, les suivantes:

$\lambda$ air I. Å.	intensité
4812.25	4
4413.17	5
4386.37	5
4359.09	3
4179.93	4
4168.40	5
4088.37	5

A côté de ces raies nous en avons trouvé deux autres, 4507.20 Å et 4061.58 Å, qu'il faut discuter séparément. Sur les clichés des produits actinifères on trouve ces deux raies d'une intensité assez grande: 4507.20 Å, I. (5) et 4061.58 Å, I. (4). Mais sur un des trois clichés du produit 317 existe une raie 4507.15 Å, I. (0) qu'on ne trouve pas sur les autres clichés 317.

Pour la raie 4061.58 Å, la situation est un peu autre. Les trois clichés du produit 317 nous donnent une raie d'une longueur d'onde 4061.65 Å, I. (1). On trouve dans les spectres de trois éléments chimiques des raies spectrales qui peuvent coincider avec cette raie: *Pt.* 4061.66 Å (2), *Tb.* 4061.59 Å (6.2) et *Eu* 4061.55 Å (1 : 2 selon EXNER et HASCHEK échelle de 1—100). Quant à terbium, de toutes ses raies ultimes, il n'y en a qu'une, 3509.18, qui ne soit pas absolument exclue. Sur un des clichés du spectrographe de quartz il n'est pas impossible qu'on trouve la raie 3509.18. D'autre part, de toutes les raies d'analyse du terbium, telles qu'on les trouve dans GERLACH<sup>3)</sup>, il n'y a que cette seule possibilité d'existence

<sup>3)</sup> GERLACH, Die chemische Emissionsspektralanalyse, III, 1936.

de la raie 3509.18. Il nous semble donc improbable qu'on doive attribuer cette raie au terbium.

Quant à l'europtium, on trouve les deux raies ultimes sur les clichés du produit 317, et l'une d'entre elles, bien que plus faible, sur les clichés des produits 316. Quant aux raies d'analyse selon GERLACH, on en trouve une qui puisse coïncider avec une raie du spectre. D'autre part EXNER et HASCHEK<sup>4)</sup> indiquent cette raie comme de très faible intensité, tandis que KING<sup>5)</sup> ne mentionne même pas cette raie dans sa liste. Donc, quoique nous ne puissions pas dire que l'attribution de la raie 4061.66 Å à l'europtium soit absolument exclue, il ne nous semble pas probable qu'on doive attribuer cette raie à l'europtium.

Reste la dernière possibilité, le platine. Sur les divers clichés l'intensité du Pt change, mais toujours dans le même sens pour toutes les raies du même cliché.

Par exemple sur les trois clichés mesurés, le spectre du Pt est plus fort sur le cliché du produit 316 a 2 que sur le cliché du 317, et celui-ci est plus fort que celui du 316 a 7. Nous avons trouvé en total environ 70 raies du Pt et parmi toutes ces raies on ne trouve jamais une différence d'intensité comme nous l'avons signalée plus haut. D'autre part sur tous les clichés du 316 a 2 et du 316 a 7 les raies 4061.58 ont toujours les mêmes intensités par rapport aux raies du Lanthane. Il nous semble donc bien probable qu'on a ici une raie du spectre de l'actinium superposant une raie faible du platine, quoiqu'on n'en ait pas la certitude absolue.

Pour la raie 4507.20 nous avons trois possibilités: Zr. 4507.11 (7.3), Re. 4507.03 (2) et La. 4507.4 de très faible intensité. Comme nous verrons plus bas, le zirconium n'existe pas dans ce produit. Pour le rhénium c'est encore plus simple: aucune des raies ultimes n'est dans les produits et de toutes les raies du spectre celle-ci est la seule coïncidence. Reste la possibilité que la raie 4507.15 sur 317 soit la raie du lanthane 4507.4, quoique l'écart entre la raie mesurée et celle du lanthane soit bien grand. Mais comme cette raie est à peine visible sur le cliché, la mesure ne se prévaut pas d'une grande précision. Conclusion: On a une assez grande probabilité que la raie 4507.20 Å sur les spectres des produits 316 doit être attribuée au spectre de l'actinium, tandis que la raie qu'on trouve sur un des clichés 317 doit probablement être attribuée au spectre du lanthane.

Revenons aux raies nouvelles, c'est à dire aux raies qu'on ne trouve que sur les clichés des produits 316. Quant aux raies 4812.20 et 4413.17, on ne trouve pas d'autre élément chimique qu'on pourrait attribuer à cette raie. Quant à la raie 4413.17, on trouve deux coïncidences, mais à un écart de 0.2 Å, et comme cette raie est très nette et très bien mesurable, l'écart ne peut jamais être plus grand que 0.05 Å.

<sup>4)</sup> F. EXNER und E. HASCHEK, Die Spektren der Elemente bei normalen Druck. 2e Aufl. Leipzig und Wien. 1911/1912.

<sup>5)</sup> A. S. KING, Astrophys. Journal 72, 221/255, 1930.

La raie 4386.35 se trouve dans une région spectrale plus peuplée. On trouve ici l'erbium 4386.40, le cérium 4386.37 et l'oxygène 4386.3. Pourtant l'erbium et le cérium n'existent pas dans ces produits; on ne trouve ni les raies ultimes, ni les raies d'analyse selon GERLACH. La raie 4386.3 de l'oxygène est une raie qui n'existe que dans un tube GEISLER. Les conditions dans cette expérience sont tout autres. De plus le caractère des raies de l'air est tout différent du caractère de cette raie. La seule coïncidence pour la raie 4088.37 est une raie du tungstène 4088.35, mais on ne trouve ni raies ultimes ni raies d'analyses selon GERLACH. Pour les raies 4179.93 et 4168.40, il est possible qu'il faille les attribuer au zirconium ( $Zr$  II 4179.81 (3.7) et  $Zr$  I 4168.45 (3.—)) et comme nous avons rencontré cette possibilité aussi chez la raie 4507, nous avons étudié cette eventualité très attentivement.

Sur les clichés des produits 316, on ne trouve aucune raie ultime du  $Zr$ . Il est donc fort probable qu'on a ici une coïncidence accidentelle. Pour être tout à fait sûr de cela nous avons pris avec le même montage les spectres de solutions de nitrate de lanthane, 1 pour cent, avec des pourcentages différents de nitrate de zirconium: la conduite des raies ultimes est tout à fait telle qu'on l'indique dans la littérature. Dans une solution avec 0.1 %  $Zr$  toutes les raies ultimes du  $Zr$  II sont là, avec intensités 3 à 4, mais on ne trouve pas les raies 4507, 4179 et 4168. Quand on augmente le pourcentage du  $Zr$  jusqu'à 0.1 % on trouve toutes les raies ultimes du  $Zr$  II d'intensité 8, et les r.u. du  $Zr$  I, 1 3—5 et malgré cela les raies 4179 et 4168 n'apparaissent pas. On trouve pourtant sur un des clichés (avec 0.1 % de  $Zr$ ) une trace de la raie 4507, ce qui peut s'accorder avec notre attribution de la faible raie 4507 sur le cliché du produit 317 au lanthane.

Reste la raie 4359.09 qui coincide avec la raie 4359.11 du  $Pr$ . Mais comme on n'a pu constater ni raies ultimes, ni raies d'analyse dans les produits 316, le  $Pr$  aussi est exclu.

L'attribution de ces raies à d'autres éléments chimiques semble être exclue.

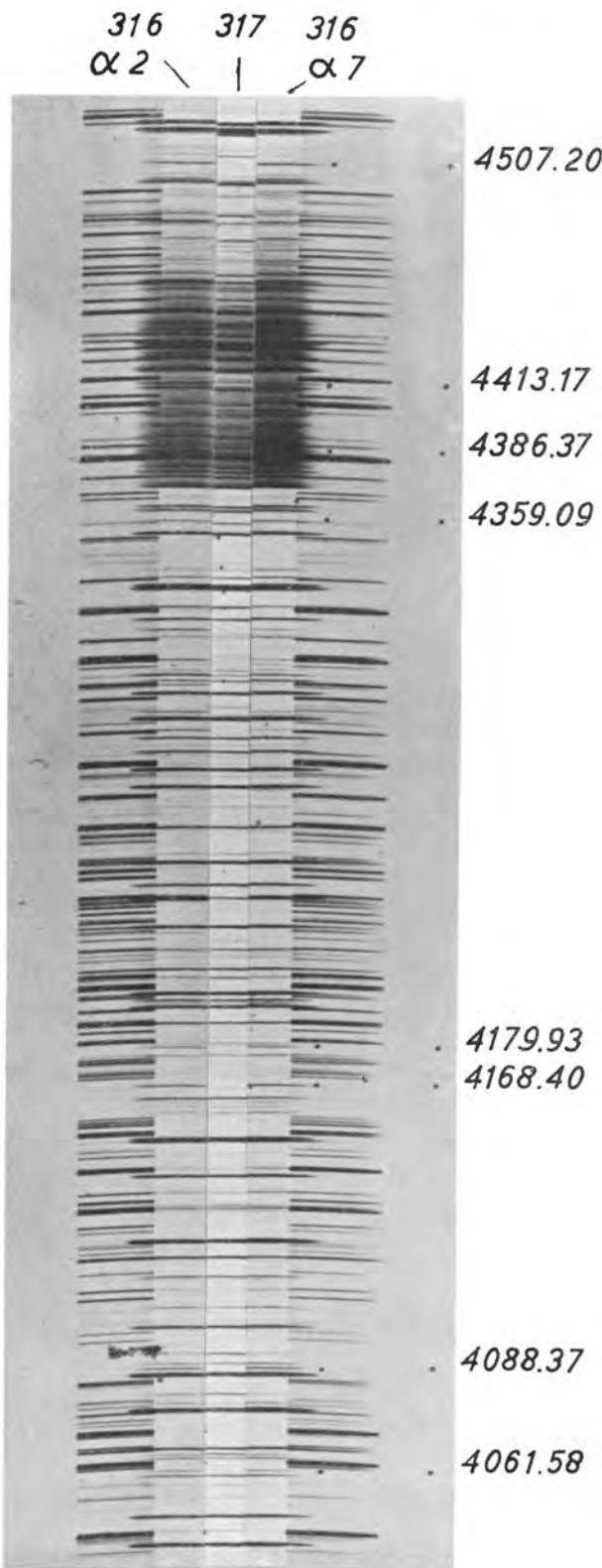
#### *Conclusion.*

Les raies que nous avons trouvées comme nouvelles appartiennent au spectre de l'actinium, l'actinium étant le seul élément chimique qui se trouve considérablement augmenté (20.000 fois) dans les deux produits 316.

Ce travail m'a été proposé par Madame CURIE qui a tenu à participer personnellement aux expériences, aux mesures et aux calculs quelques jours encore avant sa mort.

Les expériences préliminaires ont été effectuées au laboratoire CURIE de l'Institut du Radium. J'ai achevé ce travail au laboratoire „Physica“

MME W. A. LUB: LE SPECTRE OPTIQUE DE L'ACTINIUM.



d'Amsterdam qui dispose d'un spectrographe à dispersion plus grande. Je tiens à remercier M. ZEEMAN de l'intérêt qu'il a pris à mon travail et M. DEBIERNE d'avoir mis à ma disposition les préparations d'actinium à étudier. Je remercie également M. VAN DER ZWAAL pour le soin qu'il a mis aux agrandissements des spectres.

*Légende de la planche.*

On trouve l'un au-dessus de l'autre, le spectre du produit  $316 \alpha 2$  avec spectre du fer comme référence, le spectre du produit  $317$  et le spectre du produit  $316 \alpha 7$  avec le spectre du fer.

Les raies du spectre de l'actinium sont marquées avec un point, et leurs longueurs d'onde indiquées.

**Physics.** — *Protoplasmic Movement in the Avena Coleoptile as related to Oxygen Pressure and Age.* By JOHANNA G. EYMERS and H. P. BOTTELIER. (Communicated by Prof. L. S. ORNSTEIN).

(Communicated at the meeting of June 26, 1937).

In a recent paper (1935) the second author described the influence of aging on the relation between temperature and protoplasmic movement in epidermic cells of *Avena* coleoptiles. The protoplasmic streaming in young coleoptiles, 72 hours old, has a  $Q_5 = 1.05$  between  $3^\circ$  and  $33^\circ$ , while that in plants, 300—450 hours old, shows a VAN 'T HOFF curve corresponding with a  $Q_5$  value of 1.33.

In intermediate stages the  $Q_5$  has a high value (1.33) at lower temperatures, which at higher temperatures turns into the low value (1.05). As the plants grow older the temperature at which the "high value" curve passes into the "low value" curve regularly rises (fig. 1).

By changing the oxygen content of the water surrounding young and old coleoptiles we could prove (1935) that the oxygen concentration in the medium limits the rate of the protoplasmic streaming in those cases, where the  $Q_5 = 1.05$ . The facts mentioned simply can be explained by the hypothesis that the oxygen diffusion from the medium towards the protoplasm is the process with the low  $Q_5$ .

In the stages, investigated here, the growth of a coleoptile consists in cell elongation only (AVERY and BURKHOLDER, 1936), the length of the cells increasing considerably, while the amount of protoplasm practically remains the same. In a given unit of time more oxygen will diffuse into the larger cells of old coleoptiles than into the smaller cells of young coleoptiles. At a given oxygen pressure in the medium a given volume of protoplasm in the first case will get more oxygen than in the second. If this consideration duly explains the fact that the rate of protoplasmic movement in old coleoptiles is limited at much higher temperatures than

in young ones, a relation between streaming velocity, oxygen concentration in the medium and cell surface can be deduced as follows.

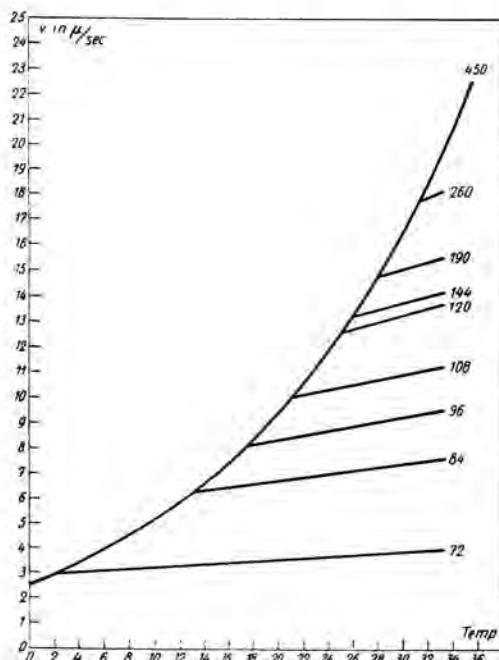


Fig. 1. Influence of the temperature on the velocity of protoplasmic streaming. The figures at each curve indicate the age of the coleoptiles in hours. VAN 'T HOFF curves with  $Q_{28} = 1.33$  and  $1.05$  respectively. (After BOTTELIER, 1935).

23

The ratio between streaming velocity, measured at a given temperature in a coleoptile of a given age, and that in a coleoptile aged 450 hours at the same temperature is a measure of the oxygen deficiency of the coleoptiles of that given age. In the equation:

$$v(T) = f \cdot v_I(T)$$

$v(T)$  = the streaming velocity at a given temperature ( $T$ ) at a given age and  $v_I(T)$  = the streaming velocity at the same temperature, when oxygen is not limiting, i.e. in coleoptiles aged 450 hours. Now  $f$  indicates the lack of oxygen, depending upon: 1) the amount of oxygen available for protoplasmic movement per unit of protoplasmic surface and per unit of time, 2) the cell surface through which the oxygen has to diffuse. Therefore:

$$f = C \cdot Z \cdot \sigma$$

when  $Z$  = the amount of oxygen mentioned under 1);  $\sigma$  = cell surface. According to the definition given above, to  $C$  the value is given at which  $f = 1$ , if the streaming velocity is no longer limited by the oxygen concentration in the medium.

In this formula  $f$  and  $\sigma$  can be determined experimentally.

$f = \frac{v(T)}{v_1(T)}$  can be calculated from fig. 1. Table 1 represents the values of  $f$  at different temperatures and for different ages. In fig. 2  $f$  for

TABLE 1.  $f$ -values at different temperatures for coleoptiles of different ages.

Age in hours	72	84	96	108	120	144	192	264
Temperature								
2°	1.00							
4°	0.88							
6°	0.79							
10°	0.63							
13°	0.55	1.00						
15°	0.49	0.90						
18°	0.43	0.79	1.00					
20°	0.38	0.71	0.89					
23°	0.33	0.61	0.76	1.00				
25°	0.29	0.56	0.69	0.82	1.00			
26°	0.28	0.53	0.66	0.81	0.95	1.00		
28°	0.26	0.49	0.60	0.72	0.87	0.87	1.00	
30°	0.24	0.44	0.55	0.64	0.79	0.82	0.91	
31°	0.22	0.43	0.53	0.57	0.76	0.79	0.87	1.00
33°	0.20	0.39	0.47	0.53	0.69	0.73	0.80	0.92

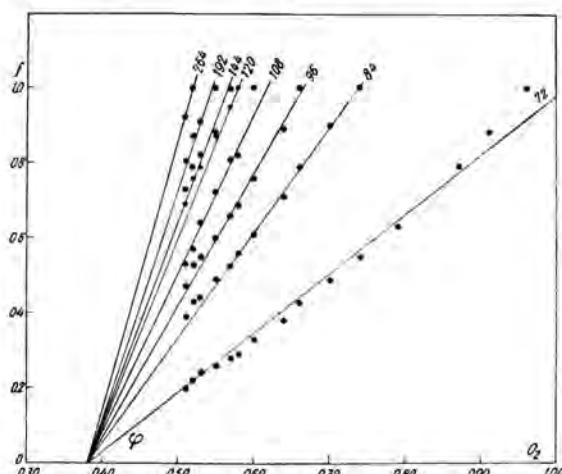


Fig. 2. Ratio of velocities of protoplasmic movement in old coleoptiles and in coleoptiles of different ages ( $f$ ) plotted against oxygen concentration.

different ages is plotted against the oxygen content of the medium (according to LANDOLT and BÖRNSTEIN, 1923; see last column of table 3). From this figure can be derived, that  $f = \varphi (O_2 - 0.38)$ , where  $\varphi$  is depending on the age. When we compare this formula with that given above:  $f = C.Z.\sigma$ , we must conclude:  $Z = O_2 - 0.38$  and  $\varphi$  must be proportionate to  $\sigma$ . From  $Z = O_2 - 0.38$  follows  $Z = 0$ , when  $O_2 = 0.38$ , that means, that the protoplasmic movement in an *Avena* coleoptile stops as soon as the oxygen content of the medium falls below 0.38 vol. %, the amount of oxygen available for the protoplasmic movement ( $Z$ ) then being 0. Fig. 3 gives  $\varphi$  as well as  $\sigma$  (the latter in relative values, derived from those of table 2), plotted against the age of the coleoptiles.

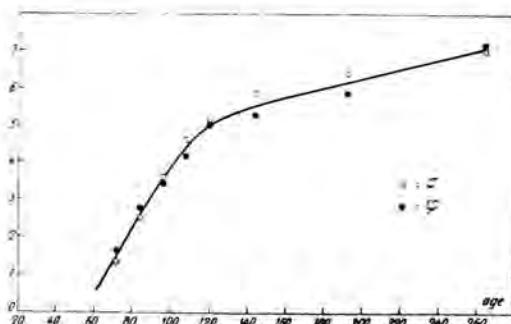


Fig. 3. The dependence of  $\varphi$  on the age and the increase of the surface of the cells ( $\sigma$ ), which runs parallel with the  $\varphi$ -curve.

The figure shows that the values of both depend in exactly the same way on the age.

$\sigma$  has been determined as follows. In all experiments mentioned above the protoplasmic movement has been measured in epidermic cells at 5–10 mm from the top of the coleoptile. The length and diameter of 10–20 cells in this region of coleoptiles of different ages was determined. The epidermic cells are longish bobbin shaped. In the approximate estimation of the cell surface they were supposed to be cylinders, the main diameter of each cell being used as diameter of the cylinder. The values obtained in this way run from 0.003 mm<sup>2</sup> in coleoptiles of 50 hours old to 0.137 mm<sup>2</sup> in 450 hours old ones. In table 2 the relative values are given, 0.137 mm<sup>2</sup> being put 100.

TABLE 2. Surface of epidermic cells 5–10 mm from the top of the coleoptile (relative values).

Age in hours	48	72	84	96	108	120	144	192	264	448
Surface ( $\sigma$ )	2	17	32	46	59	66	75	82	89	100

From the fact, that  $\varphi$  is proportionate to  $\sigma$  can be concluded, that our

supposition:  $f = C.Z.$   $\sigma$  is correct. This supposition, however, can still be tested in a different way:

According to our postulate  $f$  for every temperature should be proportionate to  $\sigma$  as determined for the different ages studied. When now  $\frac{f}{\sigma} = C.Z$  is calculated, for every temperature values must be expected independent of the age. Table 3 shows that  $\frac{f}{\sigma}$  indeed is practically independent of the age for each temperature. If we had not divided by the

TABLE 3.  $C.Z$ -values at different temperatures for coleoptiles of different ages.  
 $O_2$  = amount of oxygen ( $\text{cm}^3$   $0^\circ$ , 760 mm Hg-pressure), dissolved in  $100 \text{ cm}^3$  air-saturated water.

Age in hours Temperature	72	84	96	108	120	144	192	264	mean	$O_2$
2°	0.059								0.059	0.96
4°	0.052								0.052	0.91
6°	0.046								0.046	0.87
10°	0.037								0.037	0.79
13°	0.032	0.031							0.032	0.74
15°	0.029	0.028							0.029	0.70
18°	0.025	0.025	0.022						0.024	0.66
20°	0.022	0.022	0.019						0.021	0.64
23°	0.019	0.019	0.016	0.017					0.018	0.60
25°	0.017	0.018	0.015	0.014	0.015				0.016	0.58
26°	0.016	0.017	0.014	0.014	0.014	0.013			0.015	0.57
28°	0.015	0.015	0.013	0.012	0.013	0.012	0.012		0.013	0.55
30°	0.014	0.013	0.012	0.011	0.012	0.011	0.011		0.012	0.53
31°	0.013	0.013	0.012	0.011	0.012	0.011	0.011	0.011	0.012	0.52
33°	0.012	0.012	0.010	0.009	0.010	0.010	0.010	0.010	0.011	0.51

cell surface ( $\sigma$ ) but for instance by the length of the cells, the divider would have been larger for young cells than now and smaller for old cells. If we had chosen the cell volume the reverse would have been the case. In both cases no independence of the age would have been obtained.

$\frac{f}{\sigma}$  being independent of the age, for each temperature the mean value of  $C.Z$  could be calculated and given in table 3. For temperatures below  $15^\circ$  only one or two values for  $C.Z$  were available. In the last column

of table 3 the amount of oxygen in vol. % is given, dissolved in air saturated water at the given temperatures (from LANDOLT and BÖRNSTEIN, 1923). If the mean C.Z. values are plotted against the amount of oxygen dissolved in water (fig. 4) a straight line is found. This line should reach the X-axis at the same  $O_2$ -value as the curves of fig. 2, namely at  $O_2 = 0.38$ . In fact 0.41 is found. This is a satisfactory accordance, since only the figures from 72 hours old plants are available for the higher values of the curve in fig. 4, the C.Z.-values for this age being somewhat higher than the figures, used for the other values. If in fig. 4 C.Z had been plotted against  $O_2$  for each age separately, the accordance still

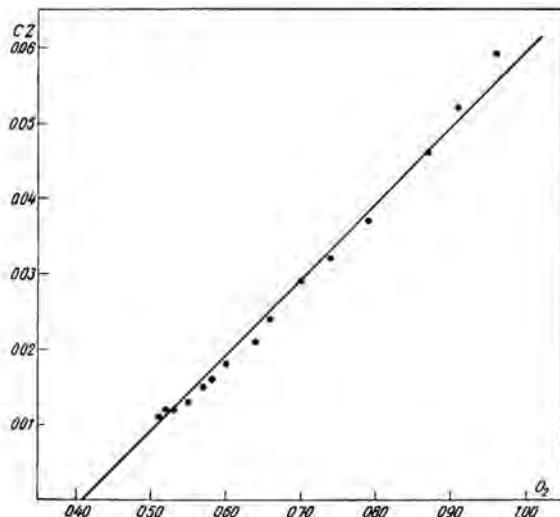


Fig. 4. Relation between oxygen concentration in the medium and the amount of oxygen available for the protoplasmic movement.

would have been more complete, the mean value of  $O_2$  for  $C.Z = 0$  being 0.37. From fig. 4 we may conclude:

$$C.Z = 0.099(O_2 - 0.41)^1)$$

The agreement in the results of the two methods of testing the supposition:  $f = C.Z \cdot \sigma$  is satisfactory.

On account of these considerations the velocity of the protoplasmic movement in an *Avena* coleoptile can be described by the equation:

$$v = 0.11(O_2 - 0.44) \cdot \sigma \cdot v_I$$

for oxygen concentrations where  $0.11(O_2 - 0.44) \cdot \sigma \leq 1$ .

<sup>1)</sup> From unpublished investigations by Miss M. W. MOL follows that, in the micro-thermostat after HILLE RIS LAMBERS (1926) used in our experiments, a diffusion resistance occurs between the coleoptile and the water flowing past it. This resistance being removed, the limiting effect of oxygen on the protoplasmic streaming in a coleoptile of a given age occurs only at much higher temperatures than in our cases. Part of the factor 0.44 therefore will come on the account of this diffusion resistance. This fact, however, does not interfere with the principles of the given reasoning.

When the medium is still richer in oxygen, oxygen diffusion is no longer the limiting process for the streaming velocity.  $v_I$  follows a VAN 'T HOFF formula:

$$v_I = A e^{-\frac{\alpha}{T}} = 3.4 \cdot 10^8 e^{-\frac{5.1 \cdot 10^3}{T}}$$

(A and  $\alpha$  are calculated from the curve of fig. 1;  $Q_{28}$  being 1.33).  
<sup>23</sup>

A temperature-velocity curve for the protoplasmic movement always must be the result of the cooperation of at least two factors: changes in viscosity ( $\eta$ ) of the protoplasm as well as changes in the force(s) causing the movement. A simple equation can be given as follows:

$$v_I = \frac{\text{force}}{\eta}.$$

For most liquids  $\eta$  agrees with a VAN 'T HOFF formula within the given temperature range. If one puts  $\eta = Be^{\frac{\beta}{T}}$ , the "force" then would be  $v_I \eta = A \cdot Be^{\frac{\beta-\alpha}{T}}$ . If we knew  $\eta$  for the protoplasm of *Avena* coleoptiles, the force could be calculated by means of this formula. Parallel determinations of the respiration probably would give an answer to the question whether respiration and protoplasmic movement are really directly related or not.

#### SUMMARY.

Temperature-velocity curves of the protoplasmic movement in epidermic cells of young *Avena* coleoptiles are different from the VAN 'T HOFF curve shown by the protoplasmic movement in old coleoptiles (fig. 1). This difference is caused by oxygen deficiency in the cells. The curves entirely can be explained by assuming that 1) the oxygen concentration of the medium decreases with rising temperature, 2) the surface of the cell through which the oxygen has to diffuse increases with the age of the coleoptile.

#### REFERENCES.

- AVERY, J. G. S., and BURKHOLDER, P. R., Bullet. Torrey Bot. Club, **63**, 1936, 1.  
BOTTELIER, H. P., Rec. d. Trav. bot. néerl. **32**, 1935, 287.  
HILLE RIS LAMBERS, M., Thesis, Utrecht, 1926.  
LANDOLT—BÖRNSTEIN, Physikalisch-chemische Tabellen, 1923, Bd. **1**, 5e Aufl. Berlin.

*Utrecht*, June 1937.

*From the Physical Laboratory and the Botanical Institute  
of the State University, Utrecht.*

**Mathematics.** — *Beziehung zwischen einer metrischen linearen Uebertragung und einer nicht-metrischen in einem allgemeinen metrischen Raume.* Von A. KAWAGUCHI. (Communicated by Prof. R. WEITZENBÖCK).

(Communicated at the meeting of June 26, 1937).

### 1. Einleitung.

In einem  $n$ - (oder unendlich-viel) dimensionalen metrischen Raum mit dem metrischen Tensor  $g_{ij}$  ist es manchmal wünschenswert, eine metrische Uebertragung einzuführen, bei der das kovariante Differential des metrischen Tensors,  $Dg_{ij}$ , identisch gleich Null ist. Die Konstruktion solcher Uebertragungen ist, wie das Beispiel eines FINSLERschen Raumes zeigt, nicht immer leicht. Aber in vielen Fällen lässt sich eine nicht-metrische Uebertragung leicht bestimmen, und wir wollen hier zeigen, wie man eine metrische Uebertragung ohne Schwierigkeit ermitteln kann, wenn eine nicht-metrische Uebertragung gegeben ist. Die CARTANSche Uebertragung<sup>1)</sup> in einem FINSLERschen Raum ergibt sich so z. B. aus einer BERWALDSchen<sup>2)</sup>. Schliesslich wenden wir diese Methode auf einige KAWAGUCHIsche Räume an.

### 2. Hauptsätze.

Es seien zwei lineare Uebertragungen in einem allgemeinen KÖNIGSchen metrischen Raum mit dem Fundamentaltensor  $g_{ij}$  gegeben:

$$\delta v^i = dv^i + A_j^i v^j, \quad Dv^i = dv^i + \Gamma_j^i v^j, \dots \quad (1)$$

von denen eine, z. B.  $Dv^i$  metrisch, d. h.

$$Dg_{ij} \equiv 0, \quad \dots \quad (2)$$

ist, wobei die Uebertragungsparameter  $A_j^i$  und  $\Gamma_j^i$  im allgemeinen PFAFF-sche Ausdrücke sind. Setzt man

$$T_j^i = \Gamma_j^i - A_j^i, \quad T_{ij} = T_i^k g_{kj}, \quad \dots \quad (3)$$

<sup>1)</sup> E. CARTAN, *Les espaces de FINSLER*, Paris, S. 11–16 (1934).

<sup>2)</sup> L. BERWALD, Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus, *Math. Zeits.*, Bd. 25, S. 45 (1926).

dann hat  $T_j^i$  bekanntlich die Tensoreigenschaft, und haben wir

$$Dv^i = \delta v^i + T_j^i v^j.$$

Somit folgt aus (2)

$$0 = Dg_{ij} = \delta g_{ij} - T_{ij} - T_{ji},$$

d. h.

$$T_{(ij)} = \frac{1}{2} \delta g_{ij}.$$

Also gilt

**Satz 1.** Die Parameter einer metrischen linearen Uebertragung mit der Eigenschaft (2) müssen die Form haben

$$\Gamma_j^i = A_j^i + \frac{1}{2} g^{ih} (\delta g_{jh} + S_{jh}), \quad \dots \quad (4)$$

wo  $A_j^i$  die Parameter irgendeiner linearen Uebertragung in demselben Raum darstellen und  $S_{ij}$  beliebige PFAFFSche Ausdrücke sind, die in bezug auf zwei Indizes alternieren und Tensoreigenschaft aufweisen.

**Satz 2.** Die lineare Uebertragung, die die Parameter (4) hat, ist immer metrisch, d. h.

$$Dg_{ij} \equiv 0.$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} Dg_{ij} &= dg_{ij} - \Gamma_i^k g_{kj} - \Gamma_j^k g_{ik} \\ &= dg_{ij} - A_i^k g_{kj} g_{ik} - \delta g_{ij} \\ &= \delta g_{ij} - dg_{ij} = 0. \end{aligned} \quad \text{b.z.w.z.}$$

Die Uebertragungsparameter (4) können auch folgendermassen dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \Gamma_j^i &= A_j^i + \frac{1}{2} g^{ih} (dg_{hj} - A_h^k g_{kj} - A_j^k g_{hk}) \\ &= \frac{1}{2} g^{ih} (dg_{hj} - A_h^k g_{kj} + A_j^k g_{hk}), \end{aligned}$$

d. h.

$$\Gamma_j^i = \frac{1}{2} g^{ih} dg_{hj} - g^{ih} A_{[hj]}, \quad \dots \quad (5)$$

wobei

$$A_{hj} = A_h^k g_{kj} \quad \text{und} \quad S_{ij} = 0.$$

### 3. Anwendung auf FINSLERSche Räume.

In einem FINSLERSchen Raum mit der Bogenlänge  $s = \int F(x, x') dt$  definiert sich die BERWALDSchen Uebertragung durch

$$\delta v^i = dv^i + A_{jk}^i dx^k v^j;$$

sie ist nicht-metrisch. Hierbei setzt man

$$A_{jk}^i = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial x'^j \partial x'^k}, \quad \varphi^i = g^{ij} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x'^j \partial x'^k} x'^k - \frac{\partial F}{\partial x'^j} \right), \quad \dots \quad (6)$$

$$F = \frac{1}{2} F^2,$$

Nach (5) erhalten wir eine metrische Uebertragung, für die

$$\begin{aligned} \Gamma_j^i &= A_{jk}^i dx^k + \frac{1}{2} g^{ih} \{ dg_{hj} - (A_{hk}^i g_{lj} + A_{jk}^l g_{hl}) dx^h \} \\ &= \frac{1}{2} g^{ih} \frac{\partial g_{hj}}{\partial x'^k} dx'^k + \frac{1}{2} g^{ih} \left( \frac{\partial g_{hj}}{\partial x'^k} - A_{hk}^i g_{lj} + A_{jk}^l g_{hl} \right) dx^k \end{aligned}$$

gilt, wobei jetzt  $S_{ij} = 0$  ist. Aus (6) geht hervor, dass

$$\varphi^j g_{jk} = \frac{\partial^2 F}{\partial x'^k \partial x'^i} x'^i - \frac{\partial F}{\partial x'^k}.$$

also, wegen  $g_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial x'^i \partial x'^j}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi^j}{\partial x'^l} g_{jk} &= \frac{\partial g_{kl}}{\partial x'^i} x'^i + \frac{\partial^2 F}{\partial x'^k \partial x'^l} - \frac{\partial^2 F}{\partial x'^k \partial x'^l} - \varphi^j \frac{\partial g_{jk}}{\partial x'^l}, \\ 2 A_{lm}^i g_{jk} &= \frac{\partial^2 \varphi^j}{\partial x'^l \partial x'^m} g_{jk} = \frac{\partial g_{kl}}{\partial x'^m} + \frac{\partial g_{km}}{\partial x'^l} - \frac{\partial g_{lm}}{\partial x'^k} \\ &\quad + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x'^l \partial x'^m} x'^i + \varphi^j \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x'^l \partial x'^m} - \frac{\partial \varphi^j}{\partial x'^m} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x'^l} - \frac{\partial \varphi^j}{\partial x'^l} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x'^m}. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2} g^{ih} \left( \frac{\partial g_{hj}}{\partial x'^k} - A_{hk}^i g_{lj} + A_{jk}^l g_{lh} \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{ih} \left( \frac{\partial g_{hj}}{\partial x'^k} + \frac{\partial g_{hk}}{\partial x'^j} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x'^h} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} g^{ih} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi^m}{\partial x'^h} \frac{\partial g_{mj}}{\partial x'^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi^m}{\partial x'^j} \frac{\partial g_{mh}}{\partial x'^k} \right). \end{aligned}$$

Daraus lesen wir ab, dass  $\Gamma_j^l$  in der CARTANSchen Bezeichnung folgendermassen dargestellt werden:

$$\Gamma_j^l = C_{jk}^l dx'^k + \Gamma_{jk}^l dx^k,$$

d. h. dass die metrische Uebertragung genau mit der CARTANSchen ueber-einstimmt.

#### 4. Anwendung auf KAWAGUCHische Räume.

In einem KAWAGUCHischen Raum  $m$ -ter Ordnung mit bei Parameteränderung invariante Bogenlänge

$$s = \int F(x, x', x'', \dots, x^{(m)}) dt, \quad m \equiv 2$$

definierte der Verfasser eine nicht-metrische Uebertragung <sup>3)</sup> durch

$$\delta v^i = dv^i + \sum_{\alpha=1}^{2m-1} \alpha \frac{\partial A_j^i}{\partial x^{(\alpha)k}} dx^{(\alpha-1)k} v^j,$$

$$A_j^i = \frac{F^{2m-1}}{m} g^{ik} \frac{\partial^2 F}{\partial x^{(m)k} \partial x^{(m-1)j}} + \frac{x'^{m-1}}{F} \sum_{\beta=0}^m (-1)^\beta (\beta - m) \frac{d^\beta}{dt^\beta} \frac{\partial F}{\partial x^{(\beta)j}},$$

wobei

$$g_{ij} = F^{2m-1} \frac{\partial^2 F}{\partial x^{(m)i} \partial x^{(m)j}} + E_i^1 E_j^1,$$

$$E_i^1 = \sum_{\beta=1}^m (-1)^\beta \beta \frac{d^{\beta-1}}{dt^{\beta-1}} \frac{\partial F}{\partial x^{(\beta)i}}.$$

Daraus ergibt sich für die metrische Uebertragung:

$$\begin{aligned} \Gamma_j^l &= \frac{1}{2} g^{ih} \left\{ \sum_{\alpha=0}^{2m-1} \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^{(\alpha)k}} dx^{(\alpha)k} - \sum_{\alpha=1}^{2m-1} \alpha \left( \frac{\partial A_h^l}{\partial x^{(\alpha)k}} g_{lj} - \frac{\partial A_j^l}{\partial x^{(\alpha)k}} g_{lh} \right) dx^{(\alpha-1)k} \right\} \\ &= \frac{1}{2} g^{ih} \frac{\partial g_{hj}}{\partial x^{(2m-1)k}} dx^{(2m-1)k} + \frac{1}{2} g^{ih} \sum_{\alpha=1}^{2m-1} \left\{ \frac{\partial g_{hj}}{\partial x^{(\alpha-1)k}} - \alpha \frac{\partial A_h^l}{\partial x^{(\alpha)k}} g_{lj} + \alpha \frac{\partial A_j^l}{\partial x^{(\alpha)k}} g_{lh} \right\} dx^{(\alpha-1)k} \\ &= g^{ih} \frac{\partial g_{hj}}{\partial x^{(2m-1)k}} dx^{(2m-1)k} + \sum_{\alpha=1}^{2m-1} \left\{ \frac{i}{jk}_{(\alpha-1)} \right\} dx^{(\alpha-1)k} + \frac{1}{2} g^{ih} \sum_{\alpha=1}^{2m-1} \left\{ \Phi_{jhk}^{(\alpha-1)} - \Phi_{hjk}^{(\alpha-1)} \right\} dx^{(\alpha-1)k}, \end{aligned}$$

<sup>3)</sup> A. KAWAGUCHI, Theory of connections in a KAWAGUCHI space of order two; erscheint demnächst in den Proceedings of the Imperial Academy, Bd. 13 (1937).

wobei

$$\left\{ \begin{array}{c} i \\ jk \end{array} \right\}_{(\alpha-1)} = \frac{1}{2} g_{ih} \left( \frac{\partial g_{hj}}{\partial x^{(\alpha-1)k}} + \frac{\partial g_{hk}}{\partial x^{(\alpha-1)j}} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^{(\alpha-1)h}} \right),$$

$$\overset{\alpha-1}{\Phi}_{hjk} = \alpha \frac{\partial A_h^i}{\partial x^{(\alpha)k}} g_{ij} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^{(\alpha-1)h}}$$

gesetzt wurde.

### 5. Anwendung auf den speziellen KAWAGUCHischen Raum.

Eine ähnliche Methode können wir auch die folgenden speziellen Fälle anwenden.

$$F = \{A_i(x, x') x'^i + B(x, x')\}^{\frac{1}{p}} \dots \dots \dots \quad (I)$$

Es ergibt sich eine Uebertragung von der Form<sup>4)</sup>

$$\delta v^i = dv^i + (A_{jk}^i dx^k + C_{jk}^i dx'^k) v^j.$$

Nehmen wir als den metrischen Tensor

$$g_{ij} = \frac{1}{F^{p-3}} \left( \frac{\partial A_i}{\partial x'^j} + \frac{\partial A_j}{\partial x'^i} \right) + T_i T_j,$$

mit

$$T_i = \frac{1}{F^{p-1}} \left( \frac{\partial A_j}{\partial x'^i} x'^j + \frac{\partial B}{\partial x'^i} - 2 \frac{dA_i}{dt} \right),$$

dann bekommt man die metrische Uebertragung

$$Dv^i = dv^i + \sum_{\alpha=0}^2 \overset{\alpha}{\Gamma}_{jk}^i dx^{(\alpha)k} v^j,$$

wobei

$$\overset{0}{\Gamma}_{jk}^i = \left\{ \begin{array}{c} i \\ jk \end{array} \right\}_{(0)} + \frac{1}{2} g^{ih} \left\{ A_{jk}^i g_{ih} - A_{hk}^i g_{ij} - \frac{\partial g_{hk}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^h} \right\},$$

$$\overset{1}{\Gamma}_{jk}^i = \left\{ \begin{array}{c} i \\ jk \end{array} \right\}_{(1)} + \frac{1}{2} g^{ih} \left\{ C_{jk}^i g_{ih} - C_{hk}^i g_{ij} - \frac{\partial g_{hk}}{\partial x'^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x'^h} \right\},$$

$$\overset{2}{\Gamma}_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{ih} \frac{\partial g_{hj}}{\partial x'^k}.$$

$$F = \{A_i(x, x', \dots, x^{(m-2)}) x^{(m)i} + B(x, x', \dots, x^{(m-1)})\}^{\frac{1}{p}} \dots \quad (II)$$

---

<sup>4)</sup> A. KAWAGUCHI, Die Geometrie des Integrals  $\int (A_i x'^i + B)^{\frac{1}{p}} dt$ , Proceedings of the Imperial Academy, Bd. 12, S. 205–208 (1936).

Bekannt ist in diesem Falle die Existenz der Uebertragung<sup>5)</sup>

$$\delta v^i = dv^i + \frac{1}{m} \sum_{\alpha=1}^{m-1} \alpha \frac{\partial^2 A^i}{\partial x^{(m-1)i} \partial x^{(\alpha)k}} dx^{(\alpha-1)k} v^j$$

und der symmetrischen Tensoren  $G_{(ij)}$  und  $\frac{\partial^2 B}{\partial x^{(m-1)i} \partial x^{(m-1)j}}$  ( $m-1$ )-ter Ordnung, von denen je einer als metrischer Tensor angesehen werden darf. Daraus kann man unmittelbar die metrische Uebertragung ableiten.

$$F = \{A_i(x, x', \dots, x^{(m-1)}) x^{(m)i} + B(x, x', \dots, x^{(m-1)})\}^{\frac{1}{p}}. \quad . \quad (III)$$

Auf analoge Weise wie in Nr. 4 erhalten wir hier die Uebertragung

$$\delta v^i = dv^i + \sum_{\alpha=1}^{2m-2} \alpha \frac{\partial A_j^i}{\partial x^{(\alpha)k}} dx^{(\alpha-1)k} v^j,$$

$$A_j^i = \frac{1}{m-1} \frac{1}{F^{p-2m+1}} G^{ik} \frac{\partial A_k}{\partial x^{(m-2)j}} + \frac{x'^i}{F^p} \frac{d}{dt} \overset{1}{E}_j,$$

wobei

$$G_{ij} = \frac{1}{F^{p-2m+1}} \frac{\partial A_i}{\partial x^{(m-1)j}} + \frac{1}{F^{2(p-1)}} \overset{1}{E}_i \overset{1}{E}_j,$$

$$\overset{1}{E}_i = \sum_{\alpha=1}^m (-1)^\alpha \alpha \frac{d^{\alpha-1}}{dt^{\alpha-1}} \frac{\partial F^p}{\partial x^{(\alpha)i}}$$

unter der Voraussetzung  $|G_{ij}| \neq 0$ . Wir dürfen hier  $G_{(ij)}$  als den metrischen Tensor annehmen und bekommen wieder mühelos die metrische Uebertragung.

---

<sup>5)</sup> T. OKUBO, Base connections in a special KAWAGUCHI space, Journal of the Faculty of Science, Hokkaido Imperial University, Ser. I, Bd. 5, S. 167—188 (1937).

**Chemistry. — The Crystalforms of Some Complex Salts of Triaminopropane with trivalent Cobaltum and Rhodium.** By P. TERPSTRA and J. TER BERG. (Communicated by Prof. F. M. JAEGER).

(Communicated at the meeting of June 26, 1937).

§ 1. In the following we communicate the results of the crystallographical study of a series of complex salts of *triaminopropane*:  $CH_2(NH_2)_3 \cdot CH(NH_2) \cdot CH_2(NH_2)$  of the general type  $\{Me(tpn)_2\} X_3$ , in which  $Me = Co^{III}$  or  $Rh^{III}$ , whilst  $X = Cl$ ,  $Br$ ,  $I$  or  $SCN$ . Salts of this type were first prepared by POPE and MANN<sup>1</sup>). Besides the salts mentioned, which all could be obtained in beautiful crystals, we also studied the crystalform of the hydrochloride of *triaminopropane* itself, which crystallizes with  $1 H_2O$ .

In general these salts were prepared after the method indicated by MANN and POPE (*loco cit.*) by dissolving 5 grammes of the hydrochloride:  $C_3H_{11}N_3 \cdot 3HCl + H_2O$  in a solution of 2 grammes of  $NaOH$  in  $25 \text{ cm}^3$  of water and heating this at a reflux-cooler on the waterbath during 10 hours with 2 grammes of *monochloro-pentammino-cobaltic-chloride* or with the corresponding quantity of *monochloro-pentammino-rhodium-chloride*<sup>2</sup>). The solution obtained then was filtered off and left standing for crystallisation: after some days small crystals were deposited which, on analysis, proved to have the composition:  $\{Co(tpn)_2\} Cl_3$  or  $\{Rh(tpn)_2\} Cl_3$  respectively. The corresponding *bromides*, *iodides* and *rhodanides* were prepared by treating the *chlorides* with a concentrated solution of  $NaBr$ ,  $NaI$  or  $KCNS$ . After recrystallisation from water, the salts mentioned all proved to be deposited in measurable crystals of the anhydrous compounds.

§ 2. *Triaminopropane-hydrochloride-monohydrate* crystallizes over sulphuric acid from its aqueous solution in colourless, flattened needles or prisms (Fig. 1).

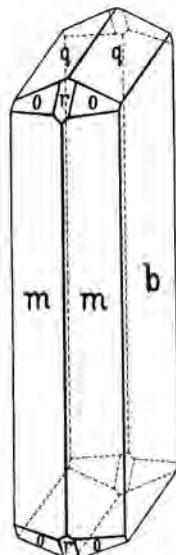


Fig. 1. Crystalform of Triaminopropane-hydrochloride (+  $1 H_2O$ ).

<sup>1</sup>) F. G. MANN and W. J. POPE, Proceed. R. Soc. London, A, **107**, 80, (1925); Journ. Chem. Soc. (1926) 2675.

<sup>2</sup>) S. M. JÖRGENSEN, Zeits. f. anorg. Chem., **5**, 369, (1894); C. CLAUS, Journ. f. Prakt. Chem., **63**, 99, (1854).

*Rhombic-bipyramidal.*

$$a : b : c = 0.510 : 1 : 0.488.$$

*Forms observed:*  $m = \{110\}$  and  $b = \{010\}$ , large;  $q = \{011\}$ , well developed;  $o = \{111\}$  and  $r = \{101\}$  small, commonly present with only a part of their planes. The crystals are flattened parallel to  $\{010\}$  and elongated in the direction of the  $c$ -axis.

<i>Angular Values:</i>	<i>Observed:</i>	<i>Calculated:</i>
$b : m = (010) : (110) = *62^\circ 58'$		—
$b : o = (010) : (111) = *70^\circ 34$		—
$r : r = (101) : (\bar{1}01) = 87^\circ 26$		$87^\circ 28'$
$m : o = (110) : (111) = 43^\circ 1$		$42^\circ 57$
$b : q = (010) : (011) = 63^\circ 50$		$63^\circ 59$
$q : o = (011) : (111) = 40^\circ 46$		$40^\circ 41$

Optically biaxial, with  $\{001\}$  as the plane of the optical axes and the  $b$ -axis as first bissectrix of negative character. The apparent axial angle  $2V$  is  $77^\circ$ . No piezo-electricity was observed.

**§ 3. Cobaltic Salts.**

1. *Di-triaminopropane-cobaltic-chloride* crystallizes from its aqueous solutions in rhombohedrally-shaped crystals (Fig. 2).

*Monoclinic-prismatic.*

$$a : b : c = 1.522 : 1 : 1.819; \\ \beta = 63^\circ 9'.$$

*Forms observed:*  $m = \{110\}$  and  $c = \{001\}$ , about equally large;  $R = \{101\}$ , rarely present and only very small.

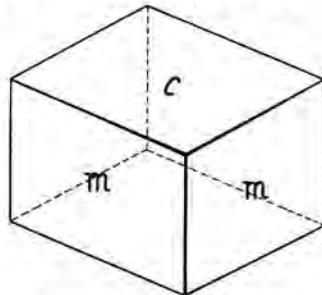


Fig. 2. Crystalform of  $\{\text{Co(tpn)}_2\}\text{Cl}_3$ .

<i>Angular Values:</i>	<i>Observed:</i>	<i>Calculated:</i>
$m : m = (110) : (\bar{1}\bar{1}0) = *107^\circ 14'$		—
$m : c = (110) : (001) = *74^\circ 28$		—
$c : R = (001) : (101) = *66^\circ 38$		—
$m : R = (110) : (\bar{1}01) = 112^\circ 24$		$112^\circ 28'$

Geometrically the crystals are pseudo-rhombohedral.

Optically biaxial, with  $\{010\}$  as the axial plane; one optical axis strongly excentrically emerges on  $\{001\}$ . The optical character is negative. The crystals melt at  $310^\circ\text{C}$ . under decomposition; their specific gravity is: 1.680.

## 2. Di-triaminopropane-cobaltic-bromide.

Also this salt crystallizes in small, red-brown crystals, which are perfectly isomorphous with those of the chloride.

The form  $R=\{101\}$  was here, however, well developed and the habitus was elongated in the direction of the  $c$ -axis (Fig. 3).

### *Monoclinic-prismatic.*

$$a:b:c = 1.522 : 1 : 1.780$$

$$\beta = 61^\circ 36'.$$

*Forms observed:*  $m=\{110\}$ ,  $c=\{001\}$  and  $R=\{101\}$ .

*Angular Values:*      *Observed:*      *Calculated:*

$$m:m=(110):(1\bar{1}0)=^*106^\circ 30' \quad -$$

$$m:c=(110):(001)=^*73^\circ 28' \quad -$$

$$c:R=(001):(\bar{1}01)=^*66^\circ 39' \quad -$$

$$m:R=(110):(\bar{1}01)=111^\circ 48' \quad 111^\circ 52'$$

Optically biaxial, with  $\{010\}$  as the axial plane; one axis very excentrically emerges on  $\{001\}$ . The double refraction is negative. The crystals melt, under decomposition, at  $322^\circ\text{C}.$ ; their specific gravity is: 2.165.

## 3. Di-triaminopropane-cobaltic-iodide.

Whilst the *chloride* and *bromide* mentioned obviously manifested a pseudo-trigonal form, the *iodide* is really rhombohedral and truly uniaxial.

On slow evaporation ditrigonal crystals are deposited, having the form of Fig. 4, which closely resemble flattened octahedra. The crystals are badly measurable because of they having cracked planes and often being aggregated in big, star-like clusters. Better crystals were obtained by cooling a hot, saturated solution: they then look as thin, hexagonal tables parallel to  $\{0001\}$ .

A LAUE-pattern perpendicular to  $\{0001\}$  showed a trigonal axis and three planes of symmetry passing through this axis. The possible space-groups are:  $C_{3V}$ ,  $D_{3m}$  or  $D_{3D}$  (SCHOENFLIES).

As no piezo-electricity nor an optical rotation were observed, they most probably belong to the group  $D_{3D}$ .

### *Ditrigonal-scalenohedral.*

$$a:c=1:2.962. (\alpha=51^\circ 52').$$

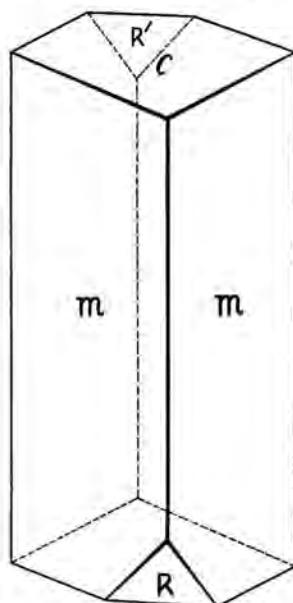


Fig. 3. Crystalform of  
 $\{Co(tpn)_2\}Br_3$ .

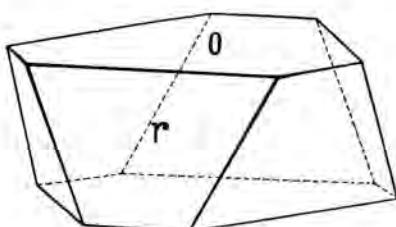


Fig. 4. Crystalform of  
 $\{Co(tpn)_2\}I_3$ .

*Forms observed:*  $\text{o} = \{111\}$  (trigonal axes)  $= \{0001\}$  and  $\tau = \{100\} = \{10\bar{1}\}$ .

<i>Angular Values:</i>	<i>Observed:</i>	<i>Calculated:</i>
$\text{o} : \tau = (111) : (100) = 73^\circ 42'$		—
$\tau : \tau = (100) : (010) = 112^\circ 24'$		$112^\circ 26'$

The crystals are uniaxial, positive.

They melt at  $332^\circ \text{C}$ . under decomposition; their specific gravity is: 2.552.

#### 4. *Di-triaminopropane-cobaltic-rhodanide.*

The salt crystallizes from its aqueous solutions in red-brown, strongly pleochroitic crystals with rather oscillating angular values.

##### *Triclinic-pinacoidal.*

$$a : b : c = 1.882 : 1 : 1.691;$$

$$A = 93^\circ 44\frac{2}{3}'; a = 93^\circ 59'.$$

$$B = 123^\circ 42\frac{2}{3}'; \beta = 123^\circ 44'.$$

$$C = 90^\circ 46\frac{2}{3}'; \gamma = 88^\circ 26'.$$

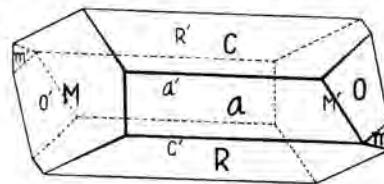


Fig. 5. Crystalform of  
 $\{\text{Co(tpn)}_2\}(\text{SCN})_3$ .

*Forms observed:*  $R = \{101\}$ ;  $a = \{100\}$  and  $c = \{001\}$ , all about equally well developed;  $M = \{1\bar{1}0\}$  and  $O = \{111\}$ , rather large;  $m = \{110\}$ , small. The crystals are prismatic with an elongation in the direction of the  $b$ -axis (Fig. 5).

<i>Angular Values:</i>	<i>Observed:</i>	<i>Calculated:</i>
$a : c = (100) : (001) = 56^\circ 17\frac{1}{3}'$		—
$c : R = (001) : (101) = 57^\circ 1'$		—
$a : O = (100) : (111) = 48^\circ 14'$		—
$[z_c] : [z_b] = [001] : [010] = 93^\circ 59'$		—
$[z_b] : [z_q] = [010] : [0\bar{1}1] = 55^\circ 23'$		—
$a : m = (100) : (110) = 56^\circ 25'$		$56^\circ 20'$
$a : M = (100) : (1\bar{1}0) = 54^\circ 50'$		$54^\circ 46'$
$R : M = (101) : (1\bar{1}0) = 106^\circ 23'$		$106^\circ 31'$
$[z_b] : [z_o] = [010] : [111] = 57^\circ 55'$		$58^\circ 12'$

#### § 4. Rhodium salts.

##### 1. *Di-triaminopropane-rhodium-chloride.*

Although this salt and the other rhodium salts do not crystallize as well as the corresponding cobaltic salts, yet they could fairly well be measured. Their habitus is exactly the same as that of the cobaltic salts; they are with the latter perfectly isomorphous.

The chloride is *monoclinic-prismatic*, with:  $a : b : c = 1.512 : 1 : 1.840$  and  $\beta = 64^\circ 6'$ . The forms observed are:  $m = \{110\}$ ,  $c = \{001\}$  and  $R = \{101\}$ . The crystals are quite analogous to those in Fig. 3.

Angular Values:	Observed:	Calculated:
-----------------	-----------	-------------

$m:m = (110):(1\bar{1}0) = *107^\circ 20'$	—	—
$m:c = (110):(001) = *75 \quad 0$	—	—
$c:R = (001):(\bar{1}01) = *66 \quad 51$	—	—
$m:R = (110):(\bar{1}01) = 112 \quad 40$	$112^\circ 51'$	—

Optically biaxial, with  $\{010\}$  as the axial plane; the optical character is negative.

2. *Ditriaminopropane-rhodium-bromide.*

The crystals are *monoclinic-prismatic*, with:  $a:b:c = 1.518:1:1.786$  and  $\beta = 61^\circ 58'$ .

Forms observed:  $m = \{110\}$ ,  $c = \{001\}$  and  $R = \{\bar{1}01\}$ ; the habitus is that of Fig. 3.

Angular Values:	Observed:	Calculated:
-----------------	-----------	-------------

$m:m = (110):(1\bar{1}0) = *106^\circ 30'$	—	—
$m:c = (110):(001) = *73 \quad 40$	—	—
$c:R = (001):(\bar{1}01) = *66 \quad 44$	—	—
$m:R = (110):(\bar{1}01) = 111 \quad 52$	$111^\circ 58'$	—

Optically biaxial;  $\{010\}$  is the plane of the optical axes; the double refraction is negative.

3. *Di-triaminopropane-rhodium-iodide.*

Only very small crystals proved to be sufficiently well measurable; on further growth they get dull and rough, so that they no longer yield good reflections. The crystals are rigorously isomorphous with those of the corresponding cobaltic salt (Fig. 4).

*Ditrigonal-scalenohedral.*

$$a:c = 1:3.004, \quad (a = 51^\circ 16').$$

Forms observed:  $o = \{111\} = \{0001\}$ ;  $r = \{100\} = \{10\bar{1}\}$ .

Angular Values:	Observed:	Calculated:
-----------------	-----------	-------------

$o:r = (111):(100) = *73^\circ 55'$	—	—
$r:r = (100):(010) = 112 \quad 30$	$112^\circ 38'$	—

Optically uniaxial, positive.

The specific gravity is: 2,680.

An X-ray-investigation of the salts described will soon be published.

*Groningen, Laboratory for Inorganic and  
Physical Chemistry of the University.*

**Botany.** — *Die chemischen Vorgänge im Sauromatum-Kolben.* II. Mitteilung. By A. W. H. VAN HERK. (Communicated by Prof. J. C. SCHOUTE.)

(Communicated at the meeting of June 26, 1937).

### *Einleitung.*

Die Temperaturerhöhung der Infloreszenz von *Sauromatum guttatum* steht in engem Zusammenhang mit der Blütenentwicklung. Die Spatha öffnet sich etwa um Mitternacht und wenige Stunden später erwärmt sich der nackte Appendix stark. Der Zeitpunkt der maximalen Erwärmung ist meistens zwischen 7 und 11 Uhr Vormittags. Die Narben der weiblichen Blüten sind dann reif, während die Staubbeutel der männlichen Blüten noch fest geschlossen sind. Diese brechen erst einen Tag nach der Entfaltung auf. Wenige Tage später geht der Appendix zugrunde. Niemals ändert sich die Reihenfolge dieser Erscheinungen. Man wäre vielleicht zur Annahme berechtigt, dass ein einziger Faktor (oder ein bestimmter Komplex von Faktoren) diese Reihenfolge bedingen würde.

In dieser Arbeit versuche ich die Frage zu beantworten, ob der Faktorkomplex in einem bestimmten Teil des Blütenstandes lokalisiert vorhanden sein könnte. Trifft dies zu, so muss nach Entfernung dieses Teiles der normale Verlauf der Blüte gestört sein. Ich beschränke mich hier auf die Wärmeentwicklung im Appendix.

Auch andere Araceen haben eine ähnliche Blütenentwicklung wie der *Sauromatum*, doch bietet die Untersuchung dieser Pflanze besondere Vorteile, da die männlichen und weiblichen Blüten und der sterile Teil in scharf getrennten Zonen im Spadix vorhanden sind.

### *Methodisches.*

Die Spatha wurde an der Basis abgeschnitten und die Oberflächentemperatur der verschiedenen Organe thermoelektrisch gemessen. Als Messinstrumente dienten kleine Thermoelemente ( $3 \times 1$  mm) in Verbindung mit einem Spiegelgalvanometer von mässigem Widerstande. Die Wärmekapazität und die Wärmeausstrahlung der Lötstellen waren gering. Von je zwei Lötstellen wurde die eine in üblicher Weise auf konstanter Temperatur ( $20,3^\circ \pm 0,05$ ) gehalten. Der Ausschlag des Galvanometers wurde photographisch registriert; der Abstand zwischen Galvanometer und Aufnahmeapparat war 70 cm. Die Abweichung war 30 mm pro 1 Grad Temperaturdifferenz (bei maximaler Empfindlichkeit). Die Temperaturregistrierung wurde halbstündlich an 6 bis 12 verschiedenen Stellen vorgenommen. Die Messungen fanden bei konstanter Aussentemperatur statt.

Immer wurden zwei Thermoelemente in derselben Höhe fest an das Organ angelegt. Die Pflanze darf nicht geschädigt werden, da sonst eine Änderung in der Wärmeentwicklung zu befürchten ist. Da der Prozess sich nur in einem 1—2 mm dünnen Rindenmantel des Kolbens abspielt, wird die gemessene Oberflächentemperatur des Organs wahrscheinlich wenig von seiner Innentemperatur abweichen.

#### *Die Wärmeentwicklung der normalen Pflanze.*

Die Grösse der Temperaturerhöhung eines pflanzlichen Organs wird stark beeinflusst von den Versuchsbedingungen, unter welchen die Beobachtungen stattfinden. Insbesondere gilt das für die Aussentemperatur und die relative Luftfeuchtigkeit. Z.B. erhält man bei  $\pm 10^\circ$  eine kaum nachweisbare Erwärmung im Appendix; bei grosser Feuchtigkeit wird die Transpiration gehemmt, was wiederum die Höhe des Temperaturüberschusses ausserordentlich vergrössert. Ich versuchte in dieser Untersuchung den ganzen Vorgang unter physiologisch normalen Bedingungen zu erforschen. Die Pflanzen wurden im warmen Gewächshaus gezüchtet und spätestens einen Tag vor dem Anfang der Messungen in das Versuchszimmer gestellt. Die relative Feuchtigkeit war nicht konstant; sie schwankte meistens zwischen 70 % und 80 %.

Man erhält oft abweichende Versuchswerte. Die Differenzen sind teilweise auf die individuellen Unterschiede der Pflanzen zurückzuführen:

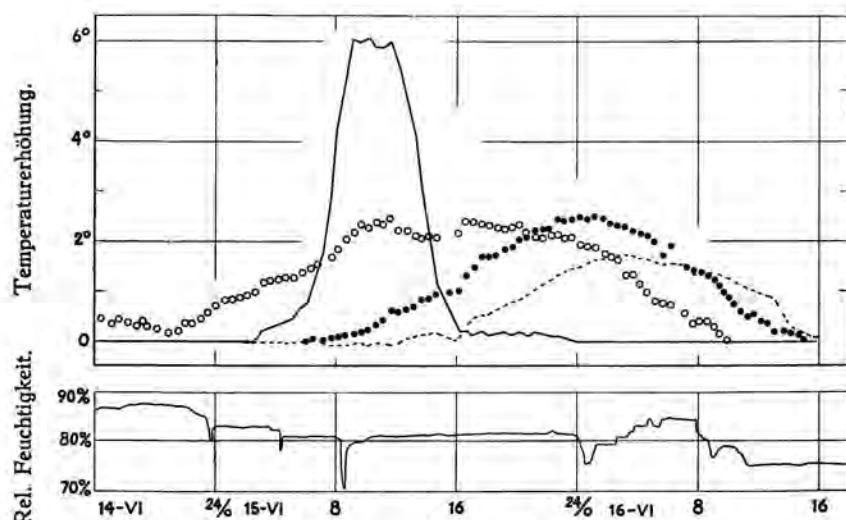


Abb. 1. Die Erwärmungskurven der normalen Pflanze.

<span style="color: black;">—</span> Appendix <span style="color: open-circled;">○</span> Männliche Blüten <span style="color: filled-circled;">●</span> Sterile Teile <span style="color: dashed;">—</span> Weibliche Blüten
--

Temperatur des Versuchszimmers:  $24,5^\circ \pm 0,1$ .

zum Teil werden sie von den äusseren Verhältnissen während der Entwicklung des Blütenstandes hervorgerufen. Bei warmem, sonnigem Wetter entwickeln sich die Kolben in etwa 2 Wochen und die maximale Temperatursteigerung beträgt  $10^{\circ}$ — $12^{\circ}$ . Wachsen die Pflanzen bei trübem Wetter auf, so kann die Entwicklungszeit sich bis auf 6 Wochen verlängern und die Erwärmung beträgt nur  $\pm 5^{\circ}$ . ARCANGELI und KRAUS, die einzigen Forscher, die Temperaturmessungen an Sauromatumkolben angestellt haben (soweit mir bekannt ist), berichten über Erhöhungen von  $8^{\circ}$  bis  $11^{\circ}$ .

Die Belichtung der Pflanzen hat einen grossen Einfluss auf das Phänomen. Stellt man den Blütenstand einige Tage vor der Entfaltung in's Dunkle oder belichtet man ihn mit schwachem Lichte, so beobachtet man keine oder nur eine geringe Temperatursteigerung ( $0,5^{\circ}$ — $1^{\circ}$ ). Im letzterwähnten Falle tritt sie mehrere Tage zu spät auf. Bringt man die nicht-blühenden Kolben wieder ins helle Licht zurück, so können sie in normaler Weise reagieren. Durch diese Behandlung kann man den Prozess der Wärmebildung höchstens einige Tage verschieben.

Belichtet man die Kolben am frühen Morgen des Tages vor der Entfaltung stark, dann tritt die Erwärmung am nächsten Tage auch im Dunkeln unvermindert auf. Aus diesen Beobachtungen geht hervor, dass die Belichtung noch ihren grossen Einfluss hat bis etwa 20 Stunden vor der Erwärmung.

Die Versuchspflanzen wurden im Dunkelzimmer immer mit konstantem Lichte bestrahlt. Die Beleuchtungsstärke war in allen Teilen des Strahlbündels nicht gleich gross und variierte zwischen 7000—14000 Lux. Die Lichtquelle befindet sich ausserhalb des Versuchszimmers. Ein strömendes Wasserbad steht im Wege der Lichtstrahlen zur Verhütung einer übermässigen Wärmewirkung. Die Kolben entwickeln sich bei dieser Belichtung normal. Während bei normalem Licht- und Dunkelwechsel das Maximum der Erwärmung Vormittags zwischen 7 und 11 Uhr fällt, besteht diese Regelmässigkeit in konstantem Lichte nicht; die Erwärmung ist zu jeder Stunde möglich.

Die Erwärmung fängt in der Spitze und in der Basis des Appendix ungefähr zu gleicher Zeit an; Differenzen von 1 bis  $1\frac{1}{2}$  Stunden sind möglich. (Abb. 2.) Bald tritt die Temperaturerhöhung im Appendixgipfel

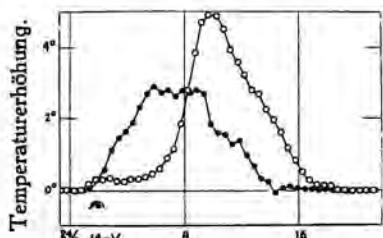


Abb. 2. Die Erwärmungskurven des Appendix einer normalen Pflanze.

● — Appendix-Gipfel  
○ — Basaler Teil

Temperatur des Versuchszimmers:  $22,0^{\circ} \pm 0,1$ .  
Relative Feuchtigkeit: 73%—80%.

am stärksten hervor; dieser kann einige Grade wärmer sein als die Basis. Nach und nach erwärmt sich der basale Teil stärker und hier erreicht man

die höchsten Werte. Das Maximum der Erwärmung verschiebt sich also von oben nach unten. Es tritt durchschnittlich 3—6 Stunden nach dem Beginn der Temperatursteigerung auf; in einigen wenigen Ausnahmefällen wird es in 2 Stunden erreicht. Nach Ueberschreiten des Höhenpunktes erfolgt eine rasche Abnahme der Wärmeproduktion und in 8—16 Stunden ist der ganze Vorgang beendet. Nach raschem Absinken der Temperatur kann der Appendix sogar während kurzer Zeit  $0,1^{\circ}$ — $0,3^{\circ}$  kälter sein als die Umgebung. Das wird durch die kräftige Transpiration hervorgerufen.

In der ersten Arbeit wurde nachgewiesen, dass die Atmung am intensivsten ist in der Appendixspitze. Dass ich trotzdem die höchsten Temperaturwerte im basalen Teil erhalten habe, ist darauf zurückzuführen, dass hier die aktive Gewebsmasse am grössten ist.

Auch die männlichen Blüten zeigen eine Temperaturerhöhung, welche schon vor der Erwärmung des Appendix anfängt. Sie steigt jedoch sehr langsam an. Das Maximum beträgt  $2^{\circ}$ — $5^{\circ}$  und fällt zeitlich mit dem völligen Erkalten des Appendix zusammen. Nach Ueberschreiten des Maximums nimmt die Eigenwärme erst langsam ab. Der Prozess ist vor der Pollenemission beendet.

Die Erwärmungskurven der sterilen Teile zeigen grosse Aehnlichkeit mit den der männlichen Blüten; nur sind sie um viele Stunden verschoben. Der Anstieg fällt etwa mit dem Maximum der Appendixwärme zusammen. Das Maximum beträgt  $2^{\circ}$ — $5^{\circ}$ .

Die mit den weiblichen Blüten bedeckte Kolbenbasis wird nur wenig wärmer als ihre Umgebung.

#### *Die Wärmeentwicklung im Appendix nach Entfernung verschiedener Teile der Pflanze.*

Der Erwärmungsprozess ändert sich nicht, wenn man den Kolben einige Tage vor der Blüte unter Wasser abschneidet. Die gemessenen Temperatursteigerungen der Versuchspflanzen sind ebenso gross wie die der Kontrollpflanzen; auch der Zeitpunkt der Erwärmung ändert sich nicht.

Schneidet man die Infloreszenz in einem frühen Entwicklungsstadium ab, — z.B.  $\pm 10$  Tage vor der Blüte (normale Entwicklungszeit:  $\pm 4$  Wochen) —, so kann man noch eine geringe Erwärmung feststellen. Sie beträgt  $1^{\circ}$ — $2^{\circ}$ . Entfernt man die Knolle bei einer ganz jungen Pflanze (Appendixlänge höchstens 10 cm), dann stirbt der Blütenstand ohne nachweisbare Wärmeproduktion.

Diese Differenzen kann man in folgender Weise erklären. Entfernt man die Knolle bevor die Infloreszenz ihre maximale Grösse erreicht hat, so entsteht bald ein Defizit an Reservesubstanzen. Dadurch entwickelt der Appendix sich kümmерlich und werden die Oxydationsprozesse, nach der Aktivierung der Atmungsfermente, bald wieder gehemmt; man beobachtet nur eine geringe Temperaturerhöhung. Da schon einige Tage vor der Blüte das Verbrennungsmaterial in maximaler Menge im Appendix

aufgespeichert ist, kann zu diesem Zeitpunkt nie ein Defizit durch das Abschneiden der Knolle entstehen und die Erwärmung ist normal.

Der Appendix ist vor der Entfaltung intensiv hell-rot gefärbt und wird einen halben Tag vor der Blüte rötlich-braun. Diese Verfärbung tritt auch bei der geringsten Temperatursteigerung auf.

Aehnliche Temperaturkurven wie nach der Entfernung der Knolle erhält man, wenn die Infloreszenzen zwischen den weiblichen Blüten und dem sterilen Teil oder zwischen dem sterilen Teil und den männlichen Blüten durchgeschnitten sind. Nach 6 Tagen sind die Maxima noch  $4^{\circ}$ — $9^{\circ}$ ; nach längerer Zeit werden sie niedriger.

Bei der Exstirpation der weiblichen Blüten wird die darunter sich befindende gelbe Gewebeschicht teilweise zerstört; das weisse Markgewebe wird nicht geschädigt. Um Austrocknen zu verhindern habe ich die Schnittfläche mit Kakaobutter geschlossen. Die Operation hemmt die Wärmeentwicklung der älteren Pflanzen nicht; man beobachtet nach einer Woche noch Maxima von  $5^{\circ}$ — $10^{\circ}$  (Abb. 3). Dagegen stört die Operation die jüngeren Pflanzen stark: die Temperaturerhöhung ist  $1^{\circ}$ — $2^{\circ}$  (Abb. 4).

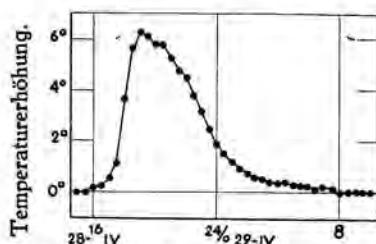


Abb. 3. Die Erwärmungskurve des Appendix.

Am 24—IV—9 wurden die weiblichen Blüten entfernt.

Temperatur des Versuchszimmers:  
 $21.9^{\circ} \pm 0.1$ . Sättigungsgrad der Luft:  
 71%—80%.

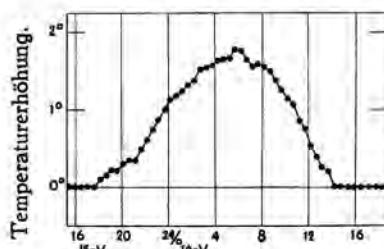


Abb. 4. Die Erwärmungskurve des Appendix.

Am 6—V—17 wurden die weiblichen Blüten entfernt.

Temperatur des Versuchszimmers:  
 $22.0^{\circ} \pm 0.1$ . Relative Feuchtigkeit:  
 70%—83%.

Die Entfernung des Rindenmantels des sterilen Teiles ändert die Erwärmungskurven wenig; nach längerer Versuchsdauer (1—2 Wochen) beobachtet man Hemmungsscheinungen.

Ich kann die Ursache dieser Hemmungen nicht genau angeben. Man könnte daran denken, dass durch die Verwundung der Stofftransport zum Appendix ungünstig beeinflusst wird. Tatsächlich ist bei längeren Versuchszeiten die Wachstumsgeschwindigkeit nach der Operation etwas herabgesetzt, doch erreichte der Appendix in mehreren Fällen seine normale Länge, in anderen Fällen war die Entwicklung mangelhaft. In allen operierten Pflanzen, die eine kleine Temperaturerhöhung hatten, war auch zuvor die Menge der Reservesubstanzen (Stärke) gering. Immer ist am Ende der Reaktion das Atmungsmaterial fast völlig verschwunden, sogar

nach der geringsten Erwärmung. Ich möchte darauf hinweisen, dass in normalen Pflanzen die Stärke nicht immer ganz verschwindet; kleine Gruppen von Zellen können sich mit Jodium noch blau färben. Schon KRAUS hat auf diese Erscheinung hingewiesen. Aus Obigem geht hervor, dass die Hemmung der Wärmeproduktion von einer Störung in der Entwicklung verursacht wird.

Auch wäre es möglich, dass die weiblichen Blüten oder der sterile Teil den Erwärmungsvorgang beeinflussen. Allerdings müsste der Einfluss dann auf ein junges Entwicklungsstadium einwirken und könnte nicht spezifisch wirksam sein. Ich betrachte diese letzte Erklärung als wenig wahrscheinlich.

Welchen Einfluss hat die Exstirpation der männlichen Blüten? Auch hier ist die Grenze zwischen den Blüten und der gelben Gewebeschicht nicht scharf und wird diese Schicht oft teilweise zerstört; das weisse Markgewebe bleibt völlig unversehrt.

Der Reaktionsverlauf ist vollkommen normal, wenn man die Operation wenige Stunden (höchstens 16—18) vor der Entfaltung der Blütenkolben ausführt. Je nach der Vorgesichte der Pflanzen sind die Temperatursteigerungen 5° bis 12°; ich konnte keine Differenzen mit den Kontrollpflanzen feststellen. (Abb. 5.)

Drei Versuchspflanzen erwärmten sich wenig (1,3°; 0,7° und 0,5°). Zwischen der Operation und dem Anfang der Reaktion war ein grosser

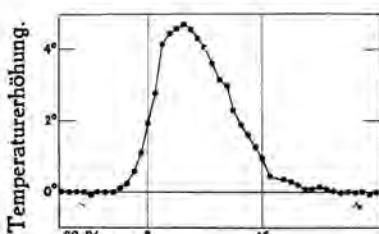


Abb. 5. Die Erwärmungskurve des Appendix.

Am 28—IV—17 wurden die männlichen Blüten entfernt.

Temperatur des Versuchszimmers: 21,9° ± 0,1.  
Sättigungsgrad der Luft: 72%—78%.

Zeitraum: 20, 20 und 21 Stunden. Das Reservematerial der Appendices wurde sehr unvollkommen verbrannt.

In allen andern untersuchten Pflanzen konnte ich keine Temperaturerhöhung nachweisen (Genauigkeit der Messungen: 0,1°). Das Ergebnis ist unabhängig davon, ob man die männlichen Blüten zwei Wochen oder 24 Stunden vor der Blüte entfernt. Die Atmungssubstanzen verschwinden nicht; die oben erwähnte Verfärbung der Appendices tritt nicht auf.

Man könnte vielleicht meinen, dass auch in diesem Falle die Hemmung des Prozesses einer allgemeinen Schädigung der Pflanze zuzuschreiben wäre. Ich kann dieser Anschauung nicht zustimmen. Die Operation ändert das Längenwachstum nicht, wenn der Appendix etwa 24 cm lang ist (Abb. 6a). In einem jungen Stadium ist die Wachstumsgeschwindigkeit verringert, jedoch kann der Appendix sich normal entwickeln (Abb. 6b). Er enthält die normale Menge der Atmungssubstanzen; trotzdem tritt keine

Erwärmung auf! Bei sehr jungen Pflanzen (Appendixlänge: 5 cm) wirkt die Operation tödlich.

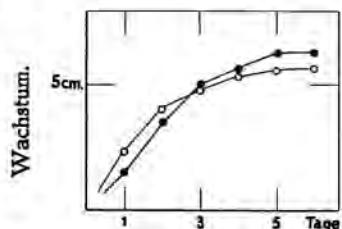


Abb. 6A. Die Wachstumskurve des Appendix (Länge: 254 mm)

○—○ einer normalen Pflanze  
●—● nach Entfernung der männlichen Blüten (6 Tage von der Blüte).

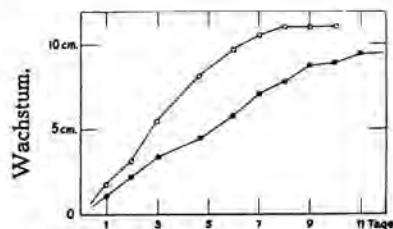


Abb. 6B. Die Wachstumskurve des Appendix (Länge 176 und 179 mm)

○—○ einer normalen Pflanze  
●—● nach Entfernung der männlichen Blüten (10 Tage von der Blüte).

Auf die folgende Parallelität sei noch hingewiesen. Während der 16 bis 18 Stunden vor der Blüte hängt der Erwärmungsprozess weder ab von der An- oder Abwesenheit der männlichen Blüten, noch von der Beleuchtung. Das weist darauf hin, dass der ganze Reaktionsverlauf zu diesem Zeitpunkte schon völlig bestimmt ist.

Trennt man den Appendix vom Blütenstande, so beobachtet man entweder eine normale, oder keine Temperaturerhöhung. Ohne jede Ausnahme tritt der zuerstgenannte Fall ein, wenn man den Eingriff spätestens 16—18 Stunden vor der Erwärmung ausführt; und der zuletzt erwähnte Fall, wenn man den Appendix mehr als 20 Stunden vor der Blüte abschneidet. Gerade bei diesen Versuchen ist die Blütezeit genau bekannt durch die Bestimmung des Zeitpunktes der Pollenemission, der durch die Operation nicht geändert wird.

Aus Abb. 7 geht hervor, dass der Erwärmungsvorgang nicht durch das Abschneiden des Appendix gestört wird. Bei diesem Versuch zerlegte ich

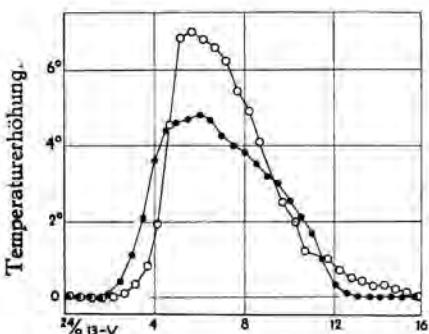


Abb. 7. Die Erwärmungskurve:

●—● der Appendixspitze (abgeschnitten)  
○—○ des basalen Teiles (abgeschnitten)

Der Appendix wurde am 12-V-17 abgeschnitten.

Temperatur des Versuchszimmers:  $22,5^\circ \pm 0,1$ . Sättigungsgrad der Luft: 70 %—80 %.

den abgeschnittenen Appendix in zwei Hälften: in den Gipfel und die Basis. Die obere Schnittfläche des basalen Teiles ist mit Kakaobutter

bedeckt. Die Erwärmungskurven der beiden Teile stimmen vollkommen mit denen der normalen Pflanzen überein (vgl. Abb. 7 und Abb. 2). Die Spitze und die Basis werden, unabhängig von einander, zur gleichen Zeit warm.

Scheidet man die Spitze etwa 24 Stunden und die Basis 16 Stunden vor der Entfaltung vom Blütenstande ab, so erwärmt sich allein die Basis.

Aus diesen Versuchen komme ich zu folgendem Schluss:

1. Im Allgemeinen wird durch das Entfernen der Knolle, der weiblichen Blüten oder der sterilen Teile, die normale Erwärmung im Appendix nicht gestört. Führt man die Operation in einem jungen Entwicklungsstadium aus, so können das Wachstum, die Speicherung der Reservesubstanzen und die Erwärmung gehemmt werden. Ich konnte nicht feststellen, ob diese Organe einen Faktor enthalten, welcher die Erwärmung reguliert. Würde ein solcher Faktor bestehen, so könnte er nur die sehr jungen Appendices beeinflussen und wäre seine Wirkung eine unspezifische.

2. In den männlichen Blüten befindet sich ein Komplex von Faktoren, der den Erwärmungsprozess im Appendix bedingt. Der Komplex übt seine Wirkung  $\pm$  20 Stunden vor dem Anfang der Temperaturerhöhung aus (unter Innehaltung der von mir gewählten Versuchsbedingungen!): denn entfernt man die männlichen Blüten nach diesem Zeitpunkte, so tritt die Erwärmung normal auf, führt man dagegen die Operation vor diesem Zeitpunkte aus, so erwärmt der Appendix sich nie.

*Amsterdam, Pflanzenphysiologisches Institut der Universität.*

---

**Histology. — Grundlinien einer Theorie der Golgikörper. I. Die Golgikörper im Raum. (Vorläufige Mitteilung.) Von GOTTWALT CHRISTIAN HIRSCH. (Aus dem Labor. für experimentelle Morphologie des Zoologischen Instituts Utrecht.) (Communicated by Prof. H. J. JORDAN.)**

(Communicated at the meeting of June 26, 1937).

#### *Fragestellung.*

Die Golgikörper sind durch GOLGI vor 40 Jahren entdeckt worden. Seitdem sind über diesen „Apparat“, etwa 400 Untersuchungen erschienen. Eine klärende Zusammenfassung haben COWDRY (1924), W. JACOBS (1927) und G. HERTWIG (1929) geschrieben. Seitdem sind Tatsachen zu Tage gefördert worden, die es mich wagen lassen, eine allgemeine Theorie darüber aufzustellen, was die Golgikörper sind und welche Rolle sie im Zellleben spielen. Die Kürze des mir zur Verfügung stehenden Raumes zwingt mich, auf nur relativ wenige der bisherigen Untersuchungen ein-

zugehen; doch erscheint alsbald meine ausführliche Darstellung in den „Ergebnissen der Biologie“.

Eine Theorie hat zur Aufgabe, Tatsachen zu sammeln, sie kritisch nach ihrem Beobachtungswerte zu sieben und dann eine gemeinsame Erklärung für sie zu finden. Diese Erklärung soll alle sicheren Tatsachen zu einem harmonischen Ganzen zusammenfügen. Ich glaube, dass heute der Zeitpunkt gekommen ist, wo man die widersprechenden Beobachtungen und Hypothesen über den Golgikörper zusammenfassen kann zu einer Theorie, welche — soweit ich es sehe — mit keiner gut beobachteten und kritisch analysierten Tatsache im Widerspruch steht. Das Finden einer solchen Theorie war nur durch folgende Einsicht möglich: wie alle Zellstrukturen sind auch die Golgikörper keine feststehenden starren „Apparate“, sondern sie stellen *wechselnde Systeme* in Zellen dar: wechselnd in ihrer äusseren Erscheinung und wechselnd in ihrer Funktion. Durch diese Einsicht sind wir imstande, einen guten Teil der Widersprüche aufzulösen, welche sich zwischen den Forschern finden.

Aufgabe einer Theorie der Golgikörper im besonderen ist es, zahlreiche Erscheinungen mit noch zahlreicheren wissenschaftlichen Namen zusammenzufassen zu einem einheitlichen Körper und einem einheitlichen Prozesse. Das ist sehr schwer! Die 1898 durch GOLGI entdeckten, mit Silbernitrat imprägnierbaren „Netze“ (Apparato reticulare interno) müssen in der Theorie ebenso verarbeitet werden, wie die „*Trophospongien*“ von HOLMGREN, von denen u.A. CAJAL und GUILLIERMOND meinen, dass sie identisch sind und man sprechen müsste von „GOLGI-HOLMGREN-Kanälen“. Weiterhin müssen die „*Binnengerüste*“ oder „*Endopegmata*“, welche Osmiumsäure reduzieren und von KOPSCHE 1902 entdeckt wurden, neben den „*Osmophilic platelets*“ von BOWEN in diese Theorie aufgenommen werden. Es muss entschieden werden, ob die „*Dictyosomen*“ der Geschlechtszellen identisch sind mit dem „Apparat“. Auch die Frage der Vitalfärbung (ein komplexes und noch sehr verworrenes Problem) muss in die Theorie mit hinein verarbeitet werden, besonders hinsichtlich der Auffassung von PARAT, dass der Golgiapparat identisch sei mit dem „*Vacuom*“: d.h. mit Vakuolen, welche sich mit Neutralrot vital färben. Vorallem müssen stark beachtet werden die Arbeiten von J. HIRSCHLER über „*Apparatum internum*“ und „*externum*“, und die physico-chemischen Beobachtungen von B. KEDROWSKI über den „*Segregationsapparat*“. Auch die Untersuchungen von E. RIES über die „*Lipochondrien*“ und von CHLOPIN über das „*Krinom*“, von H. W. BEAMS über „*Golgi bodies*“ müssen in das Theorem aufgenommen werden. Dies ist nur ein Teil der Erscheinungen, Apparate und Theorien, die seit 40 Jahren in der Cytologie durcheinander wirbeln und zahlreiche Cytologen schliesslich zu der Überzeugung geführt haben, dass ein „Golgiapparat“ überhaupt nicht existiere, oder dass er identisch sei mit den Mitochondrien, oder dass wir (wie z.B. R. CHAMBERS meint) nichts Vernünftiges über all dieses aussagen können. Es ist zuzugeben, dass es eine Sisyphus-arbeit ist, sich durch all

die Beobachtungen und Meinungen hindurchzuschlagen. Ich würde es auch nicht gewagt haben, wenn nicht B. KEDROWSKI (1931) weitgehende physiko-chemische Untersuchungen angestellt hätte, und wenn wir nicht in meinem Laboratorium in den letzten Jahren zwei Objekte gefunden hätten, an welchen die für eine Theorie der Golgikörper notwendigen Grundlagen gut zu verfolgen sind.

#### *Das Vorkommen.*

In allen Zellen, welche noch einen allgemeinen Stoffwechsel besitzen, finden sich Körper oder Vorgänge, welche mit den obengenannten Erscheinungen irgendetwas zu tun haben. Überall findet man Strukturen, die Osmiumsäure oder Silbernitrat zu einer bestimmten Zeit reduzieren, oder die im Werdegange der Zellarbeit *bestimmte* andere Stoffe zu bestimmten Zeiten adsorbieren und verarbeiten. Ich glaube, dass man heute sagen kann: „Golgikörper“ finden sich in allen Zellen, mit Ausnahme derjenigen, in denen keine höher zusammengesetzten Stoffe mehr aufgenommen, transportiert und verarbeitet werden. Wir kennen hier bisher nur zwei Endstadien von Zellen: nämlich die fertigen roten Blutkörper der Säugetiere und die reifen Spermien nach dem Durchlaufen der spermiohistogenetischen Umwandlung; es wird Einige mehr geben.

#### *Mitochondrien und Golgikörper.*

Mitochondrien sind unterscheidbar von Golgikörpern. Es ist schon NASSONOV und JACOBS 1928 gelungen, beide nebeneinander darzustellen; ebenso sagt die Theorie von PARAT, dass „Chondriom“ und „Vacuom“ verschiedene Zellstrukturen sind; und schliesslich haben BEAMS und GATENBY 1936 durch Zentrifugierung beide Körper von einander trennen können; Golgikörper sind relativ leichter, Mitochondrien relativ schwerer als Plasma. Man kann also beide Systeme vorläufig nicht in eine gemeinsame Theorie zusammenfassen, trotzdem es in vielen Fällen wahrscheinlich ist, dass beide Systeme in der Zelle Hand in Hand arbeiten, es sei nebeneinander oder hintereinander geschaltet. Funktionell stehen wohl alle Mikronensysteme der Zelle im Zusammenhange, weit mehr als man allgemein annimmt. Das schliesst nicht aus, jedes System zunächst für sich selbst zu betrachten und seine Struktur und seine Funktion apart zu analysieren.

Das Hauptkennzeichen für die Mitochondrien liegt darin, dass sie vital mit Janusgrün spezifisch färbbar sind. Hierdurch, und auch noch durch zahlreiche andere Punkte, die wir später besprechen, unterscheiden sie sich von dem Golgikörper.

#### *Erster Teil der Theorie: die Struktur des Golgikörpers.*

Die erste Frage ist: wie erscheint uns ein Golgikörper im mikroskopischen Bilde gebaut? Hier gibt es zwei Meinungen:

1. *Die Netztheorie.* Ursprünglich hat man nur Netze von schwarzen Linien beschrieben, welche nach „Imprägnation“ mit Silbernitrat oder Osmiumsäure erkennbar sind; in diesen schwarzen Linien hat man den „klassischen Apparat“ gesehen. Dabei hat man wiederholt die Meinung geäussert, dass Wirbeltiere einen „netzförmigen Golgiapparat“ besitzen sollten, wirbellose Tiere dagegen einen „diffusen“. Diese Unterscheidung ist nur insofern richtig, als Zellen der Wirbeltiere oft — aber nicht immer — ein bestimmtes „Golgifeld“ besitzen, in welchem die Golgikörper dicht zusammengedrängt liegen, und Zellen der Wirbellosen die Golgikörper mehr zerstreut in der Zelle verteilt haben — aber auch nicht immer.

Die Untersuchungen an Wirbeltieren u.A. von DORNESCO und BLESNITZA 1936 (Ganglienzellen), von H. OKKELS (Thyreoidea), E. RIES 1935 (Pankreas Abb. 2), O. JÄRWI 1936 (Schleimzellen)<sup>1)</sup> haben gezeigt, dass es bei dem Bau der Golgikörper der Wirbeltiere nicht allein auf die schwarzen „Netze“ ankommt, sondern ebenso sehr auf diejenige Substanz, welche sich in den *Maschen* des Netzes findet. Die grösste Uneinstimmigkeit ist dadurch entstanden, dass diese erste Gruppe Forscher nur sah auf das Netz selbst. DORNESCO (und wir müssen diese Untersuchung bestätigen), hat aber u.A. gezeigt, dass die klassischen „Netze“ in den Ganglienzellen des Frosches bei richtiger Behandlung mit Osmiumsäure garnicht als Netz existieren, sondern als Schalen oder Aussenränder von einzelnen komplizierten Körpern, welche bei anderer Gelegenheit auch „Dictyosomata“ genannt worden sind. Dasselbe fanden BEAMS und KING bei den Magenzellen der Ratte, J. W. SLUITER (aus meinem Labor. noch unveröffentlicht) am Hühnerei. Untersuchungen der Genese und des Produktes im Werden des Golginetzes zeigen nun je länger je mehr, dass es bei dem „Netze“ mehr ankommt auf die Substanz *in* den Maschen des „Netzes“ oder *innerhalb* der schwarzen Kappen, als auf das, was mit Osmiumsäure oder Silbernitrat schwarz „darstellbar“ ist. Vorallem: wenn man dem ganzen Entwicklungsgang des „Apparates“ oder „Netzwerkes“ nachgeht, dann sieht man, dass die sich schwärzende „Substanz“ nur selten allein im Protoplasma vorkommt, sondern *auf bestimmten Stufen der Entwicklung* stets in Verbindung mit anderen circumscripten Strukturen der Zelle: mit Einschlusskörpern, Granula oder Vakuolen, die sich im Inneren mit Osmiumsäure oder Silbernitrat nicht schwärzen.

2. *Die Systemtheorie.* Die Grundlage zu einer umfassenderen Theorie hat J. HIRSCHLER gelegt, indem er an embryonalen Zellen und bei Protozoen von einem sich schwärzenden „Apparatum externum“ oder einer Apparathülle und einem hellen „Apparatum internum“ sprach; er betonte den „lamellösen Bau“. Ebenso hat HYMAN 1923 und SOKOLOS eine „chromophobe“, zentral gelegte Substanz und eine „chromophile“ Aussen-

<sup>1)</sup> Die Arbeit von D. NARAIN 1937 an den Eiern von Fischen erschien während des Druckes dieser Abhandlung: sie zeigt, dass auch bei diesen Wirbeltieren die Golgikörper in den Eiern ein System aus Innenkörper und Aussenschicht bilden.

schicht beschrieben. Auch MORELLE hat 1924 ausgesprochen, dass es sich regelmässig um Körper handle, welche am Rande mit Metallen imprägnierbar seien. Und BOWEN definierte: „Golgi body = Golgi rodlet + idiosomic substance“; er beschrieb 1928 „osmiophilic platelets“ an der Oberfläche von Pflanzenvakuen. Die Auffassung von J. HIRSCHLER konnte nicht durchdringen, weil man immer wieder annahm, dass bei den Wirbeltieren nur „Netze“ vorkämen, man also nur auf die Aussen-schicht sah, weniger auf den nicht-färbbaren Innenkörper — und weil man die Genese des gesamten Körpers nicht beachtete. W. JACOBS konnte dann 1928 in einer genauen Stufenuntersuchung an der Mitteldarmdrüse von Astacus den Werdegang eines aus mehreren Schichten zusammengesetzten Körpers genetisch verfolgen (Abb. 1). CAJAL sagt 1933, dass die Golgikörper aus einem System von Höhlen beständen, welche begrenzt werden durch eine „corticale Cuticula“ und einen granulären *Inhalt* besässen, dessen Menge und Verteilung variere nach dem physiologischen Zustand des Protoplasmas. Der von B. KEDROWSKI sehr ausführlich untersuchte „Segregationsapparat“ der Opalina besteht aus Granula oder Vakuolen, deren Oberflächen bestimmte physiko-chemische Eigenschaften besitzen; ebenso bestehen die „Lipochondrien“ von E. RIES aus Körpern, an deren Oberfläche die „Golgsubstanz ausgeschwitzt wird“. Schliesslich haben HIRSCH und BRETSCHNEIDER 1937 im Darm von Ascaris die Genese auffallend grosser Körper beobachten können (Abb. 4), welche aus zwei, oder mehreren konzentrischen Schichten zusammengesetzt sind und alle Kennzeichen besitzen, welche wir den Golgikörpern heute zuschreiben.

Wenn man die Befunde anderer Forscher nachuntersucht oder ihre Abbildungen näher betrachtet, so findet man bei Wirbellosen *und* bei Wirbeltieren fast stets Körper, welche nach Silber- oder Osmiumbehandlung aus verschiedenen Substanzen bestehen, auch wenn der Untersucher nur einseitig das schwarze Netzwerk beschrieben hat. Nur ein Beispiel unter vielen: JÄRWI 1937 spricht in einer genauen Untersuchung der Schleim- und Eiweisszellen nicht von einem komplizierten Golgikörper, denn er blickt nur auf das imprägnierbare „Netzwerk“; er zeichnet aber Systeme, welche deutlich aus mehreren Schichten bestehen und spricht auch selbst davon, dass der „Apparat“ auseinanderfallen könne in Ringe, welche mit Fasern verbunden sind.

Ich glaube daher, dass wir heute diese erste These wagen dürfen: jeder Golgikörper ist ein *System aus mehreren Schichten*, welche jedoch in ihrer Verteilung, in ihrer Dicke und in ihrer Zahl während des Lebens einer bestimmten Zelle variieren. Es ist einseitig zu sagen, dass die Golgikörper nur beständen aus „imprägnierbaren“ Netzen, Schalen, Kappen, Ringen oder nur aus Golgi-substanz, Vakuolen, Granula. Man kommt aber zu einer synthetischen Theorie, wenn man die Golgikörper auffasst als sehr komplizierte Systeme: bestehend wenigstens aus einer *Grenzschicht* zwischen dem Innenkörper und dem Protoplasma, mit wichtigen Eigenschaften, welche wir gleich näher kennen lernen werden. Und

zweitens besteht das System aus einem *Innenkörper*, dessen Grösse, Struktur und Tätigkeit durchaus wechseln kann. Ist die Dichte der Stoffe des Innenkörpers eine geringere als in dem anliegenden Protoplasma, so sprechen wir von einer Vakuole, bei einer langgerekteren Form auch von einem Kanale. Sind die Stoffe im Inneren dichter als im Protoplasma, so sprechen wir von einem Granulum; der Unterschied ist kein prinzipieller, weil beide Zustände oft nur verschiedene Entwicklungsstadien in der Genese des Innenkörpers darstellen.

### *Zweiter Teil der Theorie: Die Eigenschaften des Golgikörpers.*

#### *1. Der Körper als Ganzes.*

Die Eigenschaften eines solchen, aus mehreren Schichten aufgebauten Golgikörpers sind nicht konstant, sondern wechselnd. Die verschiedenen Untersucher blicken bei ein und demselben Objekte vielfach auf verschiedene Stadien im Werdegange des Golgikörpers und kommen dadurch zu verschiedenen Behauptungen über dessen Eigenschaften. Daher die sehr auseinandergehenden Meinungen. Untersucht man aber das Leben einer bestimmten Zelle längere Zeit und unter verschiedenen Arbeitsbedingungen, so erfährt man, dass ein Golgikörper in der Zelle nichts Feststehendes ist, sondern ein Werdendes und ein Vergehendes, dessen Eigenschaften im Arbeitsgange der Zelle wechseln. Dies zu beobachten ist J. HIRSCHLER und P. WEINER an Geschlechtszellen gelungen, vor allem B. KEDROWSKI an dem Infusor Opalina 1931; das Gleiche zeigen die Befunde von G. C. HIRSCH 1931 und E. RIES 1935 am Pankreas und von G. C. HIRSCH und L. H. BRETSCHNEIDER 1937 am Ascarisdarm.

Die wechselnde stoffliche Zusammensetzung der Golgikörper ist der Grund, warum man kaum Aussagen machen kann über konstant vorhandene chemische Stoffe. Da die Haupteigenschaft der Golgikörper in der Aufnahme und Verarbeitung von Stoffen beruht, so findet man zu verschiedenen Zeiten eben verschiedene chemische Stoffe. Die eingehendsten mikrochemischen Untersuchungen hat B. KEDROWSKI 1931 bei Opalina angestellt: der Golgikörper ist kein einfacher Eiweisskörper, sondern enthält neben dem Eiweisskern (Tyrosin und Tryptophan) auch Kohlehydrate, die teilweise aus Eiweißen entstehen, maskierte Eiweisskörper, die ein chemisch sehr widerstandsfähiges Gerüst bilden, und vermutlich auch lipoidartige Stoffe. Alle Stoffe zusammen bilden einen zusammenhängenden Körper! — Bei anderen Objekten jedoch stehen sich zwei Meinungen gegenüber: PARAT z.B. meint, dass die „Vakuome“ nur Kristalloide und saure Eiweisse besässen, aber kein Fett und kein Lipoid; andererseits vermuten unter anderen Forschen KARPOWA, NASSONOV, BOWEN, ESCHER und RIES, dass die Golgikörper Lipide enthalten. LAURA HAHN glaubt, dass es sich um ungesättigte Fettsäuren handle. Modellversuche sind von WALKER und ALLEN 1928 angestellt, welche Gemische von Eiweißen und Lecithin gebrauchten, wie JUST und MC NORTON 1927

Mayonaise; beide Untersucher konnten an der Oberfläche der sich im Gemisch bildenden Tropfen durch Osmiumsäure Erscheinungen nachweisen, welche den mehrphasischen Systemen in Zellen ähneln nach Behandlung mit Osmiumsäure. Der Schluss, den manche Untersucher hieraus gezogen haben: die Golgikörper seien Artefakte, ist aber falsch, denn man verwechselt hier einen Körper mit seiner Reaktion. *Die Golgikörper als Ganzes sind vorhanden und auch im ungefärbten Zustande in den lebenden Zellen sichtbar sobald sie eine gewisse Grösse erreichten.* Der schwarze Niederschlag jedoch von Silbernitrat oder von Osmiumsäure an ihrer Grenzschicht ist allerdings im gewissen Sinne eine künstliche Hinzufügung; wir können aus dieser von uns angestellten Reaktion nur erkennen, dass die Grenzschicht bestimmte Eigenschaften besitzt. Die Darstellungsweisen des Golgikörpers sind wie all unsere Färbungen in diesem Sinne „Artefakte“: wir bieten den Zellstrukturen bestimmte chemische Stoffe an und beobachten, dass die einen Strukturen mit diesen chemischen Stoffen reagieren, die anderen nicht.

Physikalisch-chemisch lassen sich über den Gesamtkörper bisher auch nur wenige Aussagen machen. Der Zustand kann wechseln von flüssig zu fest und wiederum in flüssig übergehen; dies wurde u.a.z.B. bei Opalina (B. KEDROWSKI), an der Mittelarmdrüse von Astacus (W. JACOBS), beim Pankreas (G. C. HIRSCH) und am Darm von Ascaris (HIRSCH und BRETSCHNEIDER 1937) beobachtet. Das heisst: die Golgikörper bestehen entweder aus, dem Protoplasma gegenüber, dichteren Substanzen, d.h. Granula, — oder aus Vakuolen wie CHAMBERS mit dem Mikromanipulator nachwies und wie BEAMS und GATENBY 1936 durch Zentrifugieren beweisen konnten: die Golgikörper sind relativ leichter als das Protoplasma.

## 2. Die Eigenschaften der Grenzschicht.

1. Die Grenzschicht ist zu bestimmten Zeiten in der Genese des Golgikörpers — aber nicht immer! — „imprägnierbar“ mit Silbernitrat oder Osmiumsäure. Von dieser Eigenschaft haben vor allem GOLGI, DA FANO, CAJAL und GATENBY für das Silbernitrat Gebrauch gemacht, nach vorhergehender Behandlung mit Uran oder Arsen. Die Eigenschaft, Osmiumsäure zu reduzieren, haben MANN, KOPSCHE, KOLLATSCHEW und NASSONOV entdeckt; dies ist noch heute der sicherste Nachweis für ein bestimmtes Stadium des Golgikörpers. Beide Eigenschaften der Grenzschicht scheinen mir dies zu bedeuten: die Grenzschicht ist imstande, die genannten Stoffe aus dem umgebenden Protoplasma zu adsorbieren, aufzuspeichern und zu reduzieren. Dass die Adsorption über die Reduktion überwiegt, wie B. KEDROWSKI 1932 meint, ist wahrscheinlich, denn bei Opalina speichern die „Segregationsapparate“ auch Kollargol. Die Reaktion ist aber vor allem gebunden an eine bestimmte Geschwindigkeit. Es haben ja auch viele andere Systeme in der Zelle die Eigenschaft, Osmiumsäure und Silbernitrat zu reduzieren. Aber die Golgikörper sind in einem gewissen Stadium ihrer Genese gekennzeichnet durch die Zeit, welche für die

Reaktion nötig ist, d.h. durch eine spezifische Reaktionsgeschwindigkeit. Deswegen sind die Modellversuche von B. KEDROWSKI 1932: Zusatz von Osmiumsäure zu Ferment- und Eiweissuspensionen und Reaktion nach  $1\frac{1}{2}$  Stunden bei  $37^\circ$  in dieser abnehmenden Reihenfolge: Pepsin, Trypsin, Nutrose, Serum, Pepton, noch kein Beweis für die Anwesenheit von Proteasen in der Grenzphase des Golgikörpers; die Reaktionszeit ist zu kurz. Doch sprechen andererseits seine schönen Versuche mit Silbernitrat und Farbstoffen für die Protease.

2. Die Golgikörper sind in ihrer Grenzschicht, (nicht immer, aber wohl zu bestimmten Zeiten ihrer Genese) im Stande, bestimmte Vitalfarbstoffe aus dem umgebenden Protoplasma stärker zu adsorbieren als andere Systeme in der Zelle es tun. Diese Eigenschaft wechselt in der Genese des Golgikörpers: sie kann zeitlich zusammenfallen mit der Eigenschaft, Osmiumsäure zu adsorbieren und zu reduzieren, wie z.B. in den Darmzellen von Ascaris. Die beiden Eigenschaften können aber auch zeitlich hintereinander auftreten: die Golgikörper haben dann z.B. erst die Fähigkeit, Neutralrot zu adsorbieren, verlieren dann jedoch diese Eigenschaft und erhalten später erst die Möglichkeit, Osmiumsäure zu reduzieren. (HIRSCHLER 1928 bei den Spermien; HIRSCH 1931 und E. RIES 1935 am Pankreas der weissen Maus (Abb. 2)). Einseitig ist daher die Auffassung von PARAT, dass die Golgikörper stets zu erkennen seien an ihrer Eigenschaft, Neutralrot zu speichern. Und leider muss auch die Meinung von PARAT als irrig bezeichnet werden, dass, was sich in den Zellen mit Neutralrot färbt, identisch sei mit dem Golgikörper. Zahlreiche Untersuchungen von BOWEN, WEINER, LUDFORD, SCHLOTTKE, CHLOPIN, KEDROWSKI, BEAMS, GATENBY u.s.w. haben gezeigt, dass sich mit Neutralrot alle möglichen Körper in den Zellen färben, und dass nach längerer Einwirkung das Neutralrot in Form eines sogenannten Krinoms niedergeschlagen werden kann, welche Vakuolen nach meiner Meinung nicht identisch sind mit dem Golgikörper. Und schliesslich hat sich besonders durch die Untersuchungen von AVEL herausgestellt, dass die Reduktion von Silbernitrat und Osmiumsäure nicht immer an denjenigen Vakuolen zu finden ist, welche Neutralrot gespeichert haben. Die Synthese jedoch ist wohl hierin zu suchen: die Golgikörper haben in manchen Fällen nur zu bestimmten Zeiten die Fähigkeit, Neutralrot an ihrer Oberfläche zu adsorbieren, und zwar oft im Anfang ihrer Genese. Vergleiche hierüber den II. Teil dieser Abhandlung.

Zahlreiche andere Farbstoffe sind auf die Golgikörper losgelassen worden. So fand NASSONOV eine Speicherung von Trypanblau in einem topographischen Zusammenhange mit den Golgikörpern; es liegen aber in seinem Falle die Golgikörper so dicht bei einander, dass man nur schwer sie einzeln unterscheiden kann. Es bleibt deswegen die Möglichkeit, dass sich der Farbstoff nicht an der Grenzphase der Golgikörper niedergeschlagen hat, sondern im Protoplasma zwischen den Golgikörpern. Durch sehr eingehende Untersuchungen haben besonders B. KEDROWSKI

an den „Ektosomen“ von Opalina 1931 und E. RIES 1935 am Pankreas festgestellt, dass an der Oberfläche der Golgikörper nur *basische* Farbstoffe niedergeschlagen werden. Schliesslich haben HIRSCH und BRETSCHNEIDER 1937 am Ascarisdarm gefunden, dass die Grenzschicht zu derselben Zeit basische Farbstoffe adsorbiert, in welcher Osmiumsäure und Silbernitrat adsorbiert und reduziert werden; saure Farben wurden nicht adsorbiert. Eine Anfärbung mit sauren Farbstoffen bei Opalina erklärte KEDROWSKI durch die Annahme, dass diese Stoffe mit Eiweissen mitgeführt werden. Auf Grund der Untersuchungen von KELLER und GICKLHORN und zahlreicher eigener Experimente schliesst KEDROWSKI, dass die Grenzschicht der Golgikörper eine *positiv elektrische Ladung* besitze. Hier vor allem müssen weitere Untersuchungen einsetzen.

3. Eine weitere Eigenschaft, die an einigen Golgikörpern, und auch nur zu einer bestimmten Zeit ihrer Genese, gefunden wurde, ist die *Adsorption von Eisen*. G. C. HIRSCH beschrieb 1925 die aufeinanderfolgende Verarbeitung von Eisen in diffusem Zustande, in Vakuolen und in Granula. CHLOPIN beobachtete 1930, dass Eisen in den Kupferschen Sternzellen der Leber niedergeschlagen wird in Verbindung mit einem eiweißartigen Substrat. Er meint aber, dass in diesem Falle das durch Neutralrotfärbung entstehende Krinom und die „Eisengranula“ nebeneinander liegen. P. MAKAROV sah 1931—33, dass die Zellen der Leber, Niere, des Pankreas und Darmes in derselben Zellgegend Eisen niedergeschlagen, in welcher bei Paralleluntersuchungen die Golgikörper sich finden. In denselben Jahren beobachtete B. KEDROWSKI, dass Eisenzucker an der Oberfläche des „Segregationsapparates“ von Opalina gespeichert wird — und an Fibrocyten im Explantat, dass nach Hinzufügung von Ferratin eine gewisse Ähnlichkeit der Bilder nach der Berlinerblaureaktion auftritt, wie nach der Färbung mit Neutralrot und Trypanblau. Dann haben HIRSCH und BRETSCHNEIDER 1937 in den Darmzellen von Ascaris gefunden, dass diejenigen Körper, an denen Osmiumsäure reduziert und Eisen absorbiert wird, an derselben Stelle der Zelle liegen; dass die statistische Häufigkeit der Zellen mit Osmiumsäure reduzierenden Golgikörpern und Eisen-adsorbierenden Granula parallel läuft; und dass 3. die Erscheinungen nach beiden Adsorptionen an der Grenzschicht vollkommen gleich sind (Abb. 5). An den Golgikörpern des Ascarisdarmes werden also zu gleicher Zeit und in der gleichen Weise an der Oberfläche Osmiumsäure, Silbernitrat und Vitalfarbstoffe wie auch Eisen adsorbiert.

4. Schliesslich hat B. KEDROWSKI 1931 an dem „Segregationsapparat“ von Opalina gesehen, dass auch *Tuschepartikel* und Eiweiss plus Wismut an der Grenzschicht gespeichert werden, wenn sie aus dem Darme der Frösche aufgenommen werden. Er hat auch im Anschluss an ROBERTSON eine Hypothese aufgestellt über die Möglichkeit der Adsorption an der Grenzschicht.

In der Erklärung dieser Adsorptionsvorgänge 1—4 kann man hypothetisch nun noch einen Schritt weitergehen. Wenn diese Vorgänge in ihrem

GOTTWALT CHRISTIAN HIRSCH: GRUNDLINIEN EINER THEORIE  
DER GOLGIKÖRPER. I. DIE GOLGIKÖRPER IM RAUM.



Abb. 1. Genese des Golgikörpers aus der Mitteldarmdrüse von *Astacus*. Wiedergegeben nach den Zeichnungen von W. JACOBS 1928.

Ein schematisches Diagramm, das die Stufen der Golgi-Genese in einer Pankreaszelle darstellt. Es beginnt mit einem kleinen Kreis (A), der sich zu einem größeren Kreis (B<sub>1</sub>) und schließlich zu einem weiteren Kreis (B<sub>2</sub>) mit einem zentralen Punkt entwickelt. Von B<sub>2</sub> führt ein Pfeil zu einem kleinen Kreis (C).

Abb. 2. Schematische Vorstellung der Genese des Golgikörpers in der Pankreaszelle der weißen Maus, kombiniert nach den Angaben von G. C. HIRSCH 1931 und E. RIES 1935. Die Granula A entstehen an den Mitochondrien. Die Granula B bilden den eigentlichen Golgikörper: B<sub>1</sub> kann Neutralrot adsorbieren, B<sub>2</sub> Osmiumsäure reduzieren. B<sub>1</sub> und B<sub>2</sub> können sich durchschnüren (E. RIES). C sind die fertigen Proenzymgranula, die kein Adsorptionsvermögen mehr besitzen.



Abb. 3. Die Genese des Golgikörpers in den Eizellen von *Ascaris*.

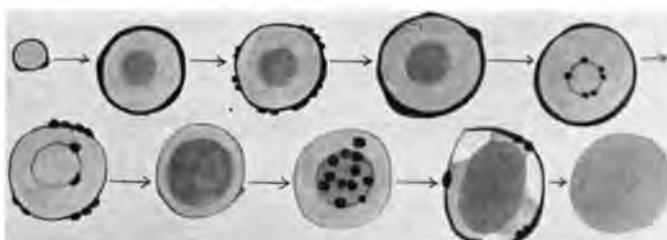


Abb. 4. Genese des Golgikörpers in den Darmzellen von *Ascaris* nach der Adsorption und Reduktion von Osmiumsäure.

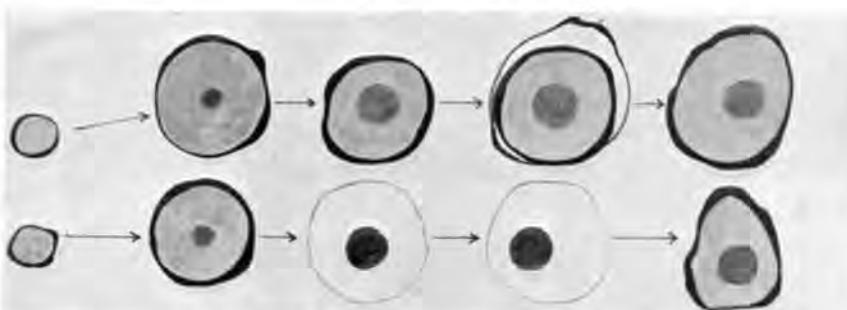


Abb. 5. Golgikörper in den Darmzellen von *Ascaris*. Obere Reihe: nach Adsorption und Reduktion von Osmiumsäure. Untere Reihe: nach Adsorption von Eisen (schwarz gezeichnet).

Beginn mit der adsorptiven Tätigkeit einer monomolekularen Grenzschicht erklärt werden können, dann wäre der Stand der Frage heute so: das, was z.B. als „Golgsubstanz“ sich schwarz färbt und als „Golginativ“ nachzuweisen ist, wäre nur eine Schicht von adsorbiertem Osmium an bestimmten Stellen. Diese Schwärzung wäre demnach nur das Kennzeichen für eine *besondere adsorptieve Fähigkeit der Grenzschicht* des Golgikörpers. Wir würden demnach z.B. mit der Osmiumtechnik nicht eine besondere „Substanz“ darstellen, sondern die *Adsorbierungsfähigkeit an besonderen Stellen der Grenzschicht* nachweisen. Es würde demnach keinen besonderen „Golgiapparat“ geben und keine besondere schwarze „Golgsubstanz“ — sondern nur die vorübergehende *Fähigkeit* der Golgikörper, z.B. Osmium an ihrer Grenzschicht zu adsorbieren. Jedermann begreift, dass dies ein ganz anderer Standpunkt ist; weitere Untersuchungen müssen zeigen, in wieweit diese *Hypothese* gerechtfertigt ist.

5. Weiterhin leisten die Golgikörper noch *eine Transportarbeit der adsorbierten Stoffe von der Grenzphase nach dem Innenkörper*. Schon NASSONOV wies 1924 auf das Analogon zwischen Kontr. Vakuole und Golgikörper. Transport konnte G. C. HIRSCH 1925 bei die Eisenverarbeitung in den Darmzellen von Murex zeigen; aber er kannte damals noch nicht den Zusammenhang mit der Absorption von anderen Stoffen. B. KEDROWSKI hat 1931 nachgewiesen, dass Kollargol an der Oberfläche des „Segregationsapparates“ von Opalina gespeichert und im weiteren Stadium bei der Verflüssigung des „Apparates“ in das Innere der Vakuole transportiert wird. Auch vermutet B. KEDROWSKI mit Recht, dass Eiweiss in den Granula des „Apparates“ synthetisiert und gespeichert wird: nach Aufnahme von Aminosäuren und Wittepepton erscheinen „Alveolen“. Schliesslich wiesen 1937 HIRSCH und BRETSCHNEIDER bei den Darmzellen von Ascaris durch eine Stufenuntersuchung die Transportarbeit ebenfalls nach: Eisen und auch Neutralrot werden zuerst an der Grenzschicht adsorbiert (Abb. 5) und dann nach dem Innenkörper zu transportiert, wo sie stark zusammengeballt, sich in Form einer Kugel aufhäufen. Dieselbe Aufstapelung zeigen die Eiweisse, welche im Innenkörper bei Ascaris allmählich entstehen und das Produkt der Arbeit des Golgikörpers sind. Eine ähnliche Verdichtung der Fermentträger ist beim Übergang der Granula B in C beim Pankreas zu sehen (G. C. HIRSCH 1931) (Abb. 2).

Vielleicht lässt sich hiermit die durch H. OKKELS in Stufenuntersuchungen beobachtete Tatsache in Zusammenhang bringen, dass die Mitochondrien beim Aufbau des Sekretes der Thyreoidea eine wichtige Rolle spielen, dass aber die Golgikörper bei dem Zurücktransport des Kolloids aus dem Lumen durch die Zelle in das Blut die Transportarbeit leisten.

6. Es eröffnet sich demnach die Möglichkeit, dass *adsorbierte Stoffe während oder nach der Aufhäufung an der Grenzschicht chemisch umgebaut werden*. Hierfür hat besonders B. KEDROWSKI Argumente beigebracht. Dies wäre eine Erklärung für die vielfach angestellte Beobachtung,

dass der Innenkörper im Anfangsstadium sehr klein ist und dann immer mehr anwächst, um schliesslich das eigentliche Produkt des ganzen Prozesses des Golgikörpers zu bilden. Eisen, Osmiumsäure, Silbernitrat, Kollargol und basische Farbstoffe zeigen uns *nur* den Weg der Adsorption und der *Synthetisierung* von Stoffen, welche schliesslich als Fermentträger, Reservestoffe oder als Akrosom wichtige Zellprodukte darstellen.

Somit sagt der zweite Teil der Theorie: *Der Golgikörper adsorbiert an seiner Grenzschicht Metalle, basische Farbstoffe und Aminosäuren; er transportiert diese zum Innenkörper. Wahrscheinlich synthetisiert er im Innenkörper wichtige Stoffe, offenbar vorallem Eiweise.*

Der II. Teil der Abhandlung wird den wechselnden Zustand und den Werdegang des Golgikörpers behandeln, neben einigen anderen Fragen. Die angezogene Litteratur wird am Ende des II. Teiles erscheinen.

**Histology.** — *Ueber die Hormonkette: Wirksame Harnsubstanz → Ovar → Legeröhre bei Rhodeus amarus; bewiesen durch die histologische Stufenzählmethode.* Von L. H. BRETSCHNEIDER und J. J. DUYVENÉ DE WIT. (Aus dem Labor. für experimentelle Morphologie des Zool. Inst. d. Universität Utrecht; Leiter: G. C. HIRSCH). (Vorläufige Mitteilung.) (Communicated by Prof. H. F. NIERSTRASZ.)

(Communicated at the meeting of June 26, 1937).

J. J. DUYVENÉ DE WIT hat 1937 mitgeteilt<sup>1)</sup>, dass nach Verabreichung von wirksamem Harn an weibliche Bitterlinge erst eine  $5\frac{1}{2}$  bis 6 stündige Latenzzeit eintritt und dann ein 6 bis  $6\frac{1}{2}$  stündiges Legeröhrenwachstum folgt. Wir wollen auch in dieser Diskussion die wirksame Substanz aus dem Harn wieder *Lutidin* nennen. Es wurde die Hypothese ausgesprochen, dass das Lutidin nicht direkt auf die Legeröhre einwirkt, sondern indirekt. Diese Meinung wurde gewonnen aus der Tatsache, dass nach Verabreichung von Saft aus den Graafschen Follikeln vom Schweineovar die Legeröhre schon nach 1 bis  $1\frac{1}{2}$  Stunden zu wachsen beginnt. Die Frage war nun: welches Organ reagiert im Bitterling auf das Lutidin und scheidet seinerseits dasjenige Hormon ab, welches das Legeröhrenwachstum ankurbelt? DUYVENÉ DE WIT kam durch mehrere Ueberlegungen zu dem Ergebnis, dass wahrscheinlich das Ovar als Sekretor in der Hormonkette des Rhodeus Dienst tut. Und er stellte folgende hypothetische Verkettung auf: eine gonadotrope Harnsubstanz (Lutidin) → Transformation des Ovars → Sekretion eines oestrogenen Hormons (Oviductin) → Wachstum der Legeröhre.

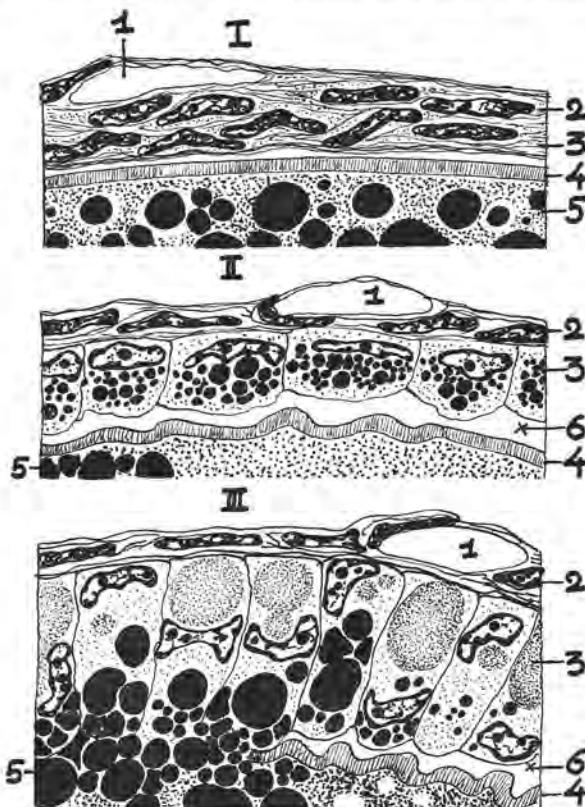
1) Proc. Royal Acad. Amsterdam, 40, 6, p. 559 (1937).

Diese Hypothese musste nun geprüft werden. Wir wählten als Methode dazu die histologische *Stufenzählmethode*, welche G. C. HIRSCH (1914—1929)<sup>1)</sup> angegeben hat und verwendeten nur Tiere, die schon mehrere Male auf das Lutidin reagiert hatten.

### 1. Die histologische Struktur des normalen Ovariums.

In der Wand der sackartigen Gonade befinden sich zahlreiche Zellnester von Urgeschlechtszellen und heranwachsenden Jungiern (vor Beginn der Dotterbildung), während im Lumen der Gonade die älteren, bereits dotterführenden Eizellen liegen.

Neben diesen Eistadien als Resultanten der normalen Wachstumsvorgänge einer Gonade, fanden wir in allen untersuchten Ovarien eine merkwürdige Erscheinung, welche wir kurzweg als *Eiabbau* bezeichnen möchten. Bekanntlich wird jedes Ei der Fischgonade von zwei bis drei Follikelzellenschichten umhüllt (Figur I); sie sind bei Rhodeus sehr dünn. Von diesem Follikelgewebe aus vollzieht sich nun der Eiabbau, welcher



(S. für Unterschrift nächste Seite.)

<sup>1)</sup> Zusammengefasst in G. C. HIRSCH, Dynamik organischer Strukturen. Roux' Arch. 117, 511 (1929).

zu einer vollständigen Auflösung des hinzugehörigen Eies führt und in die folgenden *vier Arbeitsphasen* verteilt werden kann.

**1. Phase.** Die Zellen der inneren Follikelschicht (3) schwollen an (Figur II), ihre Kerne vergrössern sich und im Plasma treten zahlreiche Granula auf. Gleichzeitig hiermit schrumpft die Eimembran (Wasserverlust), wodurch ein Spalt (6) entsteht; das Eiplasma entmischt sich (Trennung von Dotter und Plasma), der Eikern platzt und sein Inhalt vermischt sich mit dem Plasma.

**2. Phase.** Sie wird gekennzeichnet durch ein abermaliges Wachstum der inneren Follikelzellen zu hohen pallisadenförmigen Zellen (Fig. III). Es findet eine lebhafte Aufnahme von Eidotter und Plasma durch diese Follikelzellen aus dem Ei (5) statt; ihr Zelleib ist vollständig von grossen, dem Dotter ähnlichen Granula erfüllt; auch scheint an vielen Stellen Dotter als solcher phagocytiert zu werden. Der ursprünglich (1. Phase) basal liegende Follikelzellkern wandert in diesem Arbeitsstadium in die Nähe des Zellapex, während sich basal von ihm die bereits verarbeiteten Stoffe als Sekret in der Zelle anhäufen.

**3. Phase.** Infolge dieser resorbierenden und phagocytierenden Tätigkeit der Follikelzellen schwindet der frühere Eiinhalt zusehends, bis schliesslich auch die letzten Eireste aufgezehrt sind (Fig. IV). Durch den Druck der umliegenden Eizellen kollabiert schliesslich die Follikelwand (Fig. VII). Innerhalb der Follikelzellen findet nun noch die letzte Verarbeitung des aufgenommenen Eimaterials statt, jedoch geben die Follikelzellen ständig ihr Sekret an die Blutbahn ab, sodass der Follikel in dieser Phase um vieles kleiner ist als das ursprüngliche Ei.

**4. Phase.** Diese Phase führt zu einer Liquidierung der vorhergegangenen Prozesse und ihres Materials. Die Follikelzellen schrumpfen, ihre Kerne werden wieder kleiner und nekrotisieren (Fig. VI); im Plasma bildet sich ein gelbgefärbtes Pigment; am frischen Ovar fallen diese Zellgruppen sofort durch ihre orangegelbe Farbe auf. Auch die Zellen der äusseren Follikelschicht entdifferenzieren sich und bleiben gemeinsam mit den gelben Zellen lange Zeit zwischen den Eiern liegen. Damit ist der Eiabbau vollendet.

## 2. *Die histologische Struktur des auf Lutidin reagierenden Ovars.*

Während sich die Eiabbauprozesse im nicht-reagierenden Ovar in der oben beschriebenen Weise abspielen, und eine periodische, normale Erscheinung in der autonomen Tätigkeit der Gonade sind, (ähnlich den atretischen Follikeln im Sägerovär), — unterscheiden sich die gleichen Prozesse im reagierenden Bitterling nach Hinzufügung von Lutidin im wirksamen Harn durch die folgenden zwei Merkmale:

1. In der 3. Phase wird der Raum des resorbierten Eies schrittweise durch wuchernde und *aus der Follikelwand ausschwärrende Follikelzellen erfüllt*, sodass also kein leerer Spalt entsteht (Fig. V). Diese wuchernden Zellen durchsetzen schliesslich als kompakte Masse den gesamten Follikel; während ausserdem aus der äusseren Follikelschicht Zellstränge

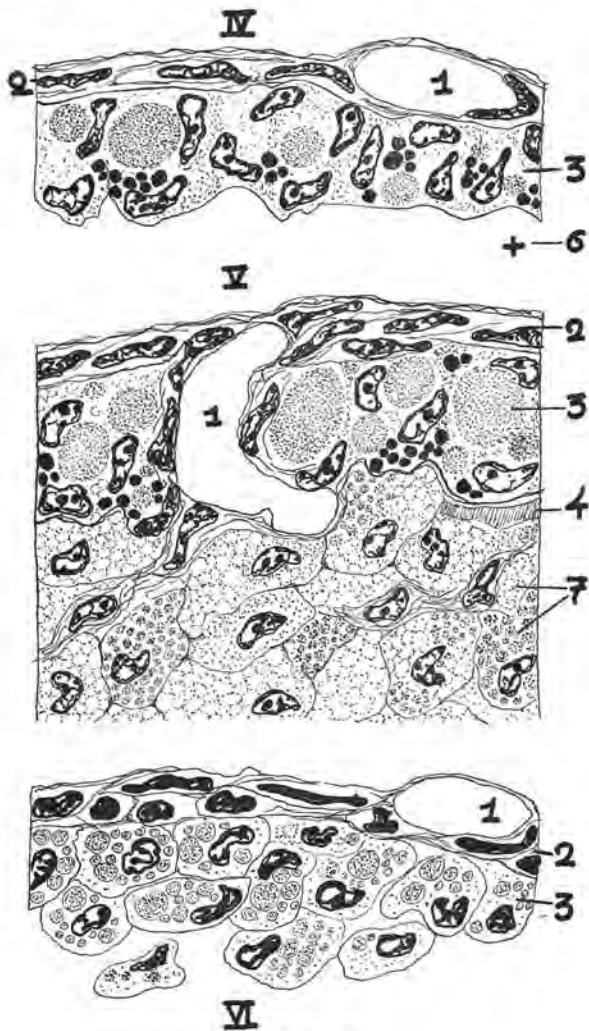


Abb. I bis VI.

Ausschnitt aus der Oberfläche von Abbaueiern resp. Follikeln.

- |   |   |
|---|---|
| I. Normales, fertig gebildetes Ei mit dazugehöriger Follikelwand. | 1. Blutgefäß.                           |
| II. Abbauei: 1. Phase.  | 2. Zellen der äusseren Follikelschicht. |
| III. „ : 2. Phase.  | 3. Zellen der inneren Follikelschicht.  |
| IV. „ : 3. Phase,   | 4. Eimembran.                           |
| V. luteinisierter Follikel.                                       | 5. Eiplasma mit Dotter.                 |
| VI. Abbauei: 4. Phase.  | 6. Spalt zwischen Ei und Follikel.      |
|   | 7. luteinierte Zellen.                  |

mit *Blut-gefässen* in den Follikel hineinwachsen (Fig. VIII). Auch entstehen cystenförmige Zellnester, innerhalb welcher noch nicht-resorbierte Stücke der Eimembran und Dotterreste-partikel eingekapselt werden. Es entsteht durch all diese Vorgänge ein mit einer Drüse zu vergleichendes Organ, da die eingewanderten Follikelzellen der inneren Schicht vollständig von kleinen gelbgefärbten Granula und Sekretträpfchen erfüllt sind (V, 7).

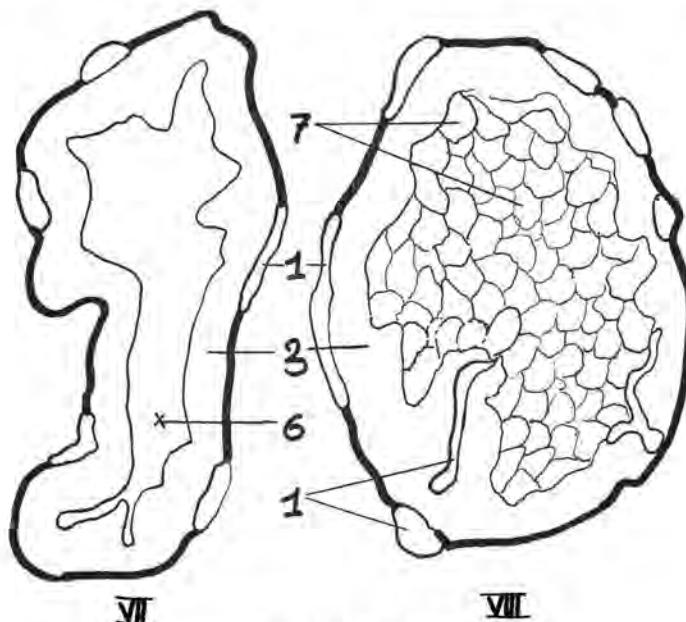


Abb. VII und VIII.

VII. Follikel in der 3. Phase aus einem nichtreagierenden Ovars.

VIII. Lutéinisierter Follikel.

Die Ziffern stimmen mit der Bilderklärung von Figur I—VI überein.

Wir nennen diesen Vorgang dann auch die *Lutéinisation des Follikels* und stellen die Hypothese auf, dass in diesen, von Blutgefäßen durchsetzten und mit Sekretzellen erfüllten Gebilden ein Hormon: nämlich das *Oviductin* produziert wird.

2. Ein zweiter Unterschied im Gegensatz zum Eiabbau im nicht-reagierenden Ovar ist die Intensität des Ablaufes. Vielfach überstürzen sich die einzelnen Phasen, sodass schon in der zweiten Phase das noch bestehende Ei von auswandernden Follikelzellen durchsetzt wird, Lutéinzellen auftreten —, kurzum: es wird der normaliter langsame Ablauf auf die Zeit von wenigen Stunden zusammengedrängt.

Nun sind alle diese Vorgänge nicht nur qualitativ von jenen des normalen Ovars verschieden, sondern auch quantitativ. Und dies führte uns schliesslich zu einer statistischen Erfassung des vorliegenden Materials durch die histologische Stufenzählmethode.

### 3. Die statistische Auswertung

Wenn es wahr ist, dass die wirksame Substanz aus dem Harn eine überstürzte Umbildung der Follikel von der ersten Phase bis zum lutéinisierten Follikel zur Folge hat, dann muss man erwarten, dass nach einem 1, 2, 3 u.s.w.-ständigem Aufenthalt der Fische im wirksamen Harn eine bedeutende Zunahme des lutéinisierten Follikels auftreten muss.

Wir zählten auf jeder untersuchten Stufe u.a. sowohl die fertig gebildeten Eier (Abb. I) als auch die lutéinisierten Follikel (Abb. V). Als auffallend konstanter Wert ergab sich durch alle Stufen hindurch die Anzahl der fertiggebildeten Eier. Ihre Zahl haben wir gleich 100 gesetzt und dann berechnet, in welchem prozentualen Verhältnis die lutéinisierten Follikel (Abb. V) dazu stehen. Wir erhielten dann folgende Zahlen:

Stunden	0	2	3	4	6	8	9	10	12.
%	11.5	20	28.5	54	37	90	90	15	4.

Jede Zahl ist ein Mittelwert aus mehreren Tieren.

Diese prozentualen Ergebnisse haben wir in Abb. IX graphisch darge-

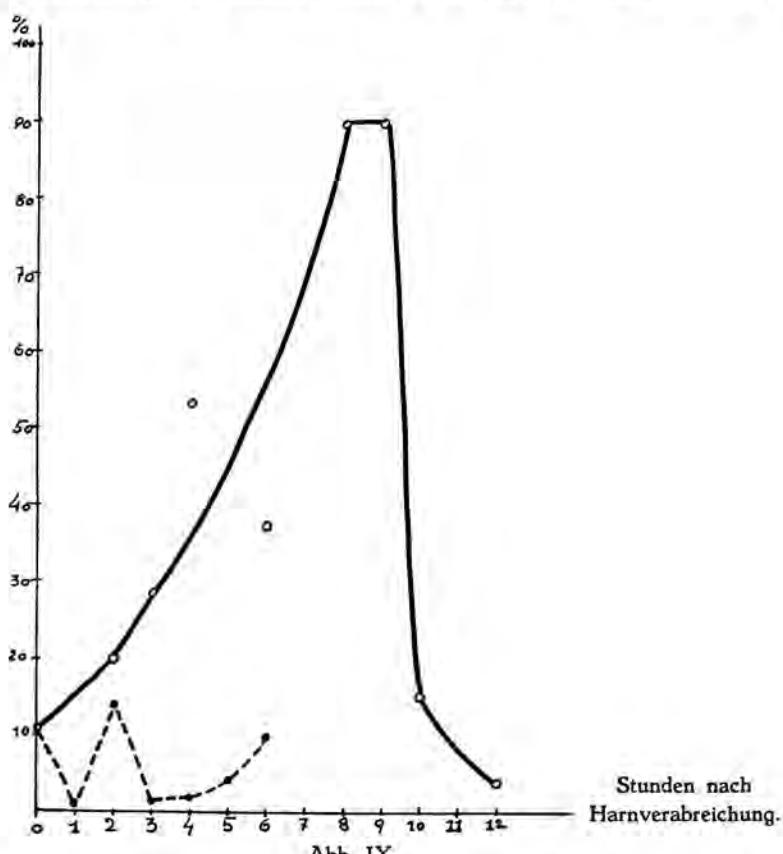


Abb. IX.

Die ausgezogene Kurve bezieht sich auf die lutéinisierten Follikel während der Einwirkung von Lutidin; die gestrichelte Kurve auf die Follikel der 3. Phase nach Hinzufügung von Follikelsaft des Schweineovars zum Wasser der Bitterlinge.

stellt. Diese Berechnungen wurden auf 3 verschiedenen anderen Wegen wiederholt; ihre gleichen Ergebnisse werden später veröffentlicht werden.

Schon aus dieser Statistik ergibt sich: auf Grund der Einwirkung des Lutidin steigt nach einer Latenzzeit von etwa 6 Stunden die Anzahl der luteinisierten Follikel von 11 auf 90 % zwischen 8 und 9 Stunden. Daraus schliessen wir, dass *der Einfluss des Lutidins eine enorme Lutéinisation der Abbaueier zur Folge hat*. Aus der histologischen Struktur des luteinisierten Follikels kann man schliessen, dass er ein völlig sekretionsfähiges Gebilde ist. Wir stellen daher die Theorie auf, dass diese Drüse ein neues Hormon abscheidet, welches wir in dieser Diskussion wieder *Oviductin* nennen wollen; dieses hat ein Wachstum der Legeröhre zur Folge wie die Arbeit von J. J. DUYVENÉ DE WIT 1937 erwies.

Diese Theorie wird durch den Befund TOMIZU TEZAWA's<sup>1)</sup> gestützt, der bei kastrierten Bitterlingen kein Legeröhrenwachstum in der Laichzeit fand. Daraus ergibt sich, dass die Legeröhre nicht nur im Experiment, sondern auch in der Natur durch das Ovarium gesteuert wird.

Es erübrigt sich jetzt noch zu untersuchen, welchen Einfluss Follikelsaft aus Schweineovarien auf das Ovarium hat. Wir fanden folgende Zahlen; die in gleicher Weise ermittelt wurden (Abb. IX unten):

Stunden	0	1	2	3	4	5	6
%	11.5	1	14	1.2	2	4.3	10
Mittelwerte mehrerer Versuchstiere.							

Es zeigt sich also, dass *Follikelsaft tatsächlich keinen Einfluss auf das Ovarium hat*; andererseits bewies J. J. DUYVENÉ DE WIT 1937, dass nach Hinzufügung von Follikelsaft aus Schweineovar zum Wasser die Legeröhre stark anwächst nach einer Latenzzeit von 1—1½ Stunden. Hierdurch gewinnt unsere Theorie sehr an Wahrscheinlichkeit, dass *die wirksame Substanz aus dem Follikelsaft des Schweineovars und diejenige Substanz, welche im luteinisierten Abbaufollikel im Bitterlingovar abgeschieden wird* (also induziert vom Lutidin) *identisch sind*. Beide wirken unmittelbar auf die Legeröhre und haben im Gegensatz zu Lutidin eine nur sehr kurze Latenzzeit gemein.

Die Verkettung der Hormone lässt sich nun auch vom histologischen Gesichtspunkte aus folgendermassen beschreiben: Eine wirksame Substanz aus dem Harn (Lutidin) verursacht eine Lutéinisation der Abbaueier im Bitterlingovar. Diese luteinisierten Follikel bilden ein Hormon (*Oviductin*), welches das Legeröhrenwachstum auslöst.

Diese Untersuchungen werden in histologischer, cytologischer und hormonaler Hinsicht fortgesetzt.

<sup>1)</sup> T. TOZAWA, Fol. anat. Japonica 7, 407, 1929.

**Anthropology.** — *Distribution of the bloodgroups in some peoples of Liberia and Sierra Leone.* By PAUL JULIEN. (Communicated by Prof. C. U. ARIËNS KAPPERS).

(Communicated at the meeting of June 26, 1937).

Regarding the numerical distribution of the bloodgroups in West Africa south of the Sahara very little is known. In 1918 L. and H. HIRSZFELD<sup>1)</sup> investigated 500 Senegalese of different tribes, who served as soldiers in Europe. This investigation, comprising males only, is the only one known in literature which comes up to statistical requirements. Two smaller investigations, comprising 325 and 144 individuals respectively, one regarding Yoruba-negroes, by MÜLLER<sup>2)</sup> in 1927 and one by SNIJDER<sup>3)</sup> in 1929, regarding North-Nigerian natives, living in Jamaica, must be rejected on account of an insufficient number of individuals investigated<sup>4)</sup>.

In order to throw some light on the ethno-serological position of the West-Africans, we started during the years 1932—1934 two series of investigations in the hinterland of Liberia and later in the adjacent Sierra Leone Protectorate. We devoted our attention to the aboriginal population only. The Americo-Liberians of Liberia, the so-called Creoles of Sierra Leone, who both are of recent importation and have absorbed much strange (white) blood and other natives of foreign origin, were totally precluded from our researches.

#### *Technique.*

The technique we followed is similar to that used by M. A. VAN HERWERDEN and her collaborators and described in these Proceedings<sup>5)</sup>. We give here a brief description of the method as used by us for several years of field work in the tropics. The bloodsample was taken from the top of the left small finger after desinfection with a two percent solution of o. oxyquinoleine in alcohol. When taking bloodsamples from natives who were working in the woods or in their fields, they first were told to wash their hands with a strong carbolated soap. In collecting the bloodsamples we seldom encountered severe difficulties. The taking of blood from the lobe of the ear proved unsatisfactory, especially with women, as they wanted to see what happened to them. The blood — 3 to 5 drops — was collected in numbered tubes, containing 2—3 ml of a slightly hypertonic citrated saltsolution (1% salt, 1% sodium citrate and 1% o. oxyquinoleine sulphate in boiled water). This citrated saltsolution, containing oxy-quinolein, has no marked action on the sensitivity of the red corpuscles. In our laboratory at Utrecht we kept red corpuscles

<sup>1)</sup> L. and H. HIRSZFELD, *l'Anthropologie*, T. 29, 505, 1918—1919.

<sup>2)</sup> H. MÜLLER, *Proc. Soc. Exp. Biol. and Med.* 24, 437, 1927.

<sup>3)</sup> SNIJDER, *Public. 395 Carn. Inst. of Washington*, 277, 1929.

<sup>4)</sup> As WIECHMAN and PAAL, *Münch. Med. Wochenschr.* 73, 606, 1926, demonstrated, at least 500 individuals must be investigated in order to avoid serious statistical errors. Our results agree with the statements of these authors and we generally discarded researches with less than 500 individuals. In some special cases a minimum of 400 individuals could be accepted as statistically sufficient.

<sup>5)</sup> M. A. VAN HERWERDEN and TH. J. BOELE-NIJLAND, *Vol. 33, N°. 6, 1930.*

of different bloodgroups in contact with this solution for more than one year at changing temperatures. Only traces of haemolysis occurred and the bloodgroup could easily be determined. In order to avoid, however, every possible source of error, the bloodtyping was always executed within 6 hours after taking the sample.

*The sera.*

The human A-anti-B and B-anti-A sera were prepared by Dr. A. B. F. A. PONDMAN, Director of the serological Department of the Government Hygienical Institute at Utrecht, to whom we express our sincere thanks. Dr. PONDMAN has also been so kind as to undertake the control of the activity of the serum samples sent to Europe during the work of the expeditions. These samples traveled several weeks by porter caravan through the interior and were shipped to Utrecht from Freetown, Monrovia or Conakry. In spite of the very unfavourable conditions of these transports, the samples showed no diminished activity when titrated by Dr. PONDMAN. The sera were partially preserved with 0.5% percent carbolic acid, partially with the same quantity of o. oxyquinoleinesulphate. Both preservatives<sup>1)</sup> proved excellent and no difference in activity could be determined.

*The Agglutination.*

We used the objectglass method of LEE-VINCENT<sup>2)</sup>, which is the most convenient for field researchwork for its simplicity. This method is by no means less accurate than the centrifugal method of SCHIFF<sup>3)</sup>. In the Serological Institute at Utrecht the former is regularly applied and Dr. PONDMAN (Private communication) deems it at least as reliable as the centrifugal method. BOS<sup>4)</sup> followed the same way without encountering any difficulties and our personal experiences during many years of field work in tropical Africa perfectly agree with the authors cited. The only disadvantage of the objectglass-method is that it requires certain conditions of temperature and humidity of the air. Too high a temperature delays the agglutination and the drying up of the serum in the mean time is apt to cause false readings. As a rule above 27°C feeble agglutinogens run the risk to be overlooked. We usually executed our agglutinations during the nighttime. The gathering of mist, which in the rainforest is very frequent during the first hours of the night, simplifies the researchwork extremely in consequence of the relatively low temperature and high humidity. When the air was very dry, we worked under a small tent, which was kept soaked with water. As a rule we used serum diluted with the same volume of physiological salt solution. The corpuscle suspension was added to a drop of the diluted serum, the mixture well stirred and rocked for 15–20 minutes. Then the result was read with the naked eye and with a loupe (6×). After another 15 minutes the result was checked. Agglutinations, which did not give clearcut results during the first minutes, were repeated in duplicate.

*The peoples investigated.*

In Liberia we studied 808 individuals, 717 men and 91 women. A small part of these were investigated during our stay in Monrovia, thanks to the collaboration of the Roman Catholic Mission. Most of the investigation was executed during a porter expedition from Monrovia to Kankan on the Milo river (French Guinea).

<sup>1)</sup> W. P. C. STOUTENBEEK, Diss. Utrecht, 1934, p. 94, prefers o. oxyquinoleine sulphate as a preservative, because it keeps the solutions in clearer condition than carbolic acid does.

<sup>2)</sup> SCHIFF, Technik der Blutgruppenuntersuchung, Berlin 1932, p. 25.

<sup>3)</sup> SCHIFF, ibidem, p. 22.

<sup>4)</sup> H. C. BOS, Bijdrage tot de antropologie van de bevolking der Schouteneilanden, Diss. Amsterdam, 1935, p. 141.

During this expedition, which covered nearly 3 months, the following native villages served as research basecamps: Gbarnga, Suakokota, Ngumbe, Ganta, Sanequelleh and smaller towns, where the caravan passed. The material includes the following tribes: Kroo (Kru), Bassa, Bele, Grebo, Krhan, Geh (Guéré), Gio (Giu), Mano, Gbande, Kpelle (Kpesse, Guerzé), Busi (Buzi, Toma, Loma), Kono, Mandingo, Vai (Vey), Gola, Kissi (Kisi, Ghisi, Kissiens) and is typical for Central and North Liberia.

As to their physical anthropology almost nothing is known of these tribes. According to WESTERMANN<sup>1)</sup> they can be divided into the following language-groups:

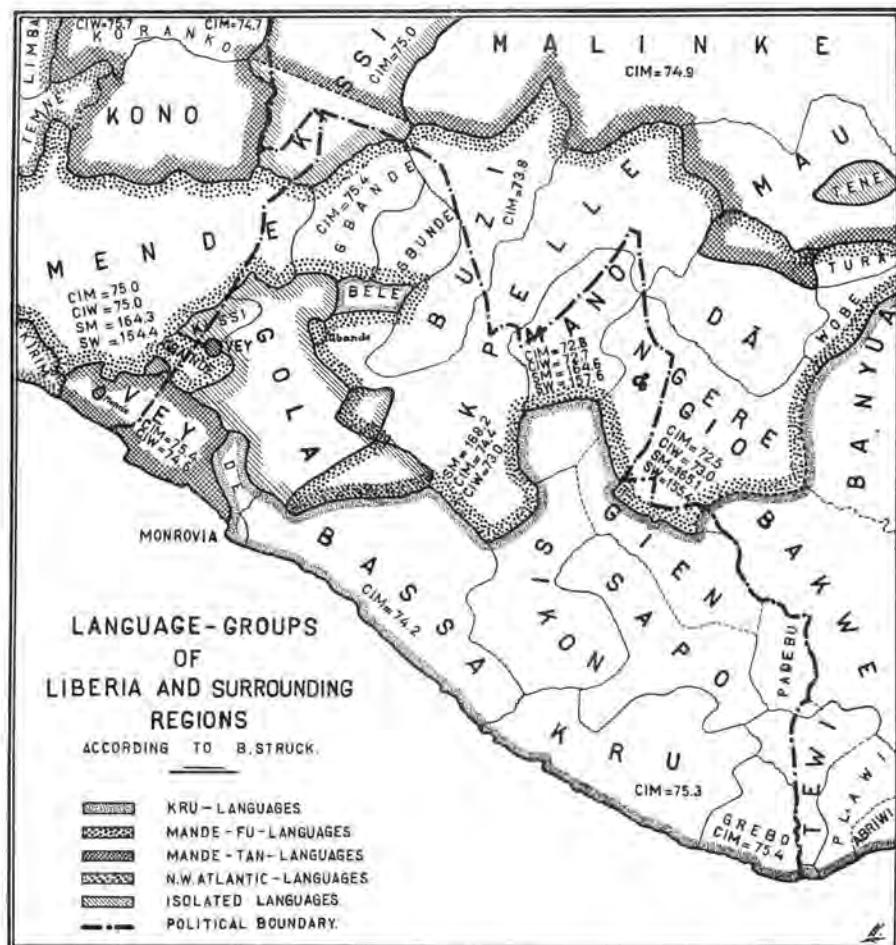


Fig. 1. Languagegroups of Liberia and surrounding regions, according to Prof. B. STRUCK.  
CIM = cephalic index men, CIW = cephalic index women, SM = height men,  
SW = height women, averages calculated from our measurements.

<sup>1)</sup> D. WESTERMANN, Die Kpelle, Sprachenkarte von Liberia, gez. von B. STRUCK. We express our gratitude towards Prof. WESTERMANN for his kindness to allow us the reproduction of the linguistical map, drawn by Prof. STRUCK.

Kroo-languages, comprising Kroo, Bassa, Grebo, Bele.

Mande-languages, which group can be divided into two subgroups:

Mande-fu and Mande-tan. The former is the most important on Liberian territory. To the Mande-fu belong: Geh (Guéré, Ngéré) and the related Gio (Giu), Mano, Kpelle (Kpesse, Guerzé), Busi (Buzi, Toma, Loma), Gbande, Gbunde. The Mande-tan are represented in Liberia by the Vai (Vey). Kono and Malinke, a branch of the Mandingo, belong to the same group.

**Isolater Languages.** The Kissi (Kisi, Ghisi, Kissiens) and the Gola, who in our material are but scarcely represented, have unknown linguistical affinities.

The spread of the bloodgroups in our Liberian material showed the following figures<sup>1)</sup>:

Bloodgroup	Number	$\% \pm m$	
O	405	$50.12 \pm 1.76$	$p = 15.79 \pm 1.28$
A	198	$24.50 \pm 1.51$	$q = 13.62 \pm 1.21$
B	168	$20.70 \pm 1.43$	$r = 70.80 \pm 1.60$
AB	37	$4.58 \pm 0.74$	$p + q + r = 100.21 \pm 0.16$
All	808	99.99	$p_0 = 15.77 \pm 1.28$
			$q_0 = 13.61 \pm 1.21$
			$r_0 = 70.62 \pm 1.60$
			$p_0 + q_0 + r_0 = 100.00$

For the different tribes<sup>2)</sup> the distribution was as follows:

Kroo-group	Number	O	A	B	AB
Kroo	73	38	20	10	5
Bassa	42	28	11	3	0
Bele	7	2	2	3	0
Grebo	8	6	1	0	1
Total Kroo	130	74	34	16	6

<sup>1)</sup>  $p_0$ ,  $q_0$  and  $r_0$  represent the gen-figures corrected according to F. BERNSTEIN, Zeitschr. f. Rassenphysiologie, Band 6, 36, 1933. As our Liberian material consists almost entirely of men, we refrain from calculating separate figures for the two sexes.

<sup>2)</sup> The number of individuals tested of the separate tribes being below 400, we of course refrain from calculating percent figures for each of them.

Mande-Fu-group	Number	O	A	B	AB
Geh + Gio	144	78	26	32	8
Mano	128	75	26	22	5
Kpelle	174	71	56	41	6
Busi	98	40	21	30	7
Gbande	23	11	4	7	1
Total Mande-Fu	567	275	133	132	27

As the Mande-Fu investigated exceed 500 individuals, we are entitled to calculate the BERNSTEIN-figures for this group separately. So we find for 567 Mande-Fu:

$$p = 15.28 \pm 1.51$$

$$p_0 = 15.27 \pm 1.51$$

$$q = 15.17 \pm 1.49$$

$$q_0 = 15.17 \pm 1.49$$

$$r = 69.64 \pm 1.93$$

$$r_0 = 69.56 \pm 1.93$$

$$p + q + r = 100.09 \pm 0.13$$

$$p_0 + q_0 + r_0 = 100.00$$

Mande-Tan-group	Number	O	A	B	AB
Vai	40	20	8	10	2
Malinke	17	8	6	2	1
Kono	3	2	0	0	1
Koranko	35	17	12	6	0
Total Mande-Tan	95	47	26	18	4

Isolated group	Number	O	A	B	AB
Gola	5	3	1	1	0
Kissi	11	6	4	1	0
Total	16	9	5	2	0

In Sierra Leone we determined the bloodgroups of 1105 individuals, 635 men and 470 women. Of these 1015 (584 men, 431 women) belonged

to the important Mende-tribe, which almost can be called a nation and especially to the Gbah-Mende, a linguistical subdivision of it. Most of our researches were executed in the Bo-district of Southern Province and especially in the valley of the upper and middle Tabe-river. With porters we marched through the country, using the villages Negbema, Sahun, Yamandu near Sengema, Goahun, Baiima, Bo and Bumpe as bases. A small part of the work was executed in the neighbourhood of Moyamba.

For the 1105 individuals, including 1015 Gbah-Mende and 90 individuals of different tribes of the protectorate, we find these figures:

Bloodgroup	Number Men	$\% \pm m$	Number Women	$\% \pm m$	Total	$\% \pm m$
A	301	$47.40 \pm 1.98$	220	$46.81 \pm 2.30$	521	$47.15 \pm 1.50$
O	159	$25.04 \pm 1.72$	121	$25.74 \pm 2.02$	280	$25.34 \pm 1.30$
B	153	$24.09 \pm 1.70$	116	$24.68 \pm 1.99$	269	$24.34 \pm 1.29$
AB	22	$3.46 \pm 0.73$	13	$2.77 \pm 0.76$	35	$3.16 \pm 0.53$
All	635		470		1105	

From this we calculate for 635 men:

$$p = 15.45 \pm 1.43$$

$$p_0 = 15.51 \pm 1.43$$

$$q = 14.89 \pm 1.41$$

$$q_0 = 14.95 \pm 1.42$$

$$r = 68.85 \pm 1.84$$

$$r_0 = 69.53 \pm 1.83$$

$$p + q + r = 99.19 \pm 0.36$$

$$p_0 + q_0 + r_0 = 99.99$$

and for 470 women:

$$p = 15.45 \pm 1.67$$

$$p_0 = 15.55 \pm 1.67$$

$$q = 14.82 \pm 1.64$$

$$q_0 = 14.92 \pm 1.64$$

$$r = 68.42 \pm 2.14$$

$$r_0 = 69.52 \pm 2.12$$

$$p + q + r = 98.69 \pm 0.52$$

$$p_0 + q_0 + r_0 = 99.99$$

Which gives for 635 men + 470 women = 1105 individuals:

$$p = 15.45 \pm 1.09$$

$$p_0 = 15.53 \pm 1.09$$

$$q = 14.86 \pm 1.07$$

$$q_0 = 14.94 \pm 1.07$$

$$r = 68.67 \pm 1.40$$

$$r_0 = 69.53 \pm 1.39$$

$$p + q + r = 98.98 \pm 0.34$$

$$p_0 + q_0 + r_0 = 100.00$$

As we mentioned above of these 1105 Sierra-Leonean natives 1015 belonged to the Gbah-Mende (584 men, 431 women).

For these 1015 Gbah-Mende we find the following bloodgroup-distribution:

Bloodgroup	Number Men	$\% \pm m$	Number Women	$\% \pm m$	Total	$\% \pm m$
O	270	46.23 $\pm$ 2.02	203	47.10 $\pm$ 2.40	473	46.60 $\pm$ 1.57
A	150	25.68 $\pm$ 1.81	110	25.52 $\pm$ 2.10	260	25.62 $\pm$ 1.37
B	142	24.32 $\pm$ 1.76	105	24.36 $\pm$ 2.07	247	24.33 $\pm$ 1.33
AB	22	3.77 $\pm$ 0.79	13	3.02 $\pm$ 0.82	35	3.45 $\pm$ 0.57
All	584		431		1015	

From this we calculate for 584 Gbah-Mende men:

$$p = 16.01 \pm 1.52$$

$$p_0 = 16.07 \pm 1.52$$

$$q = 15.20 \pm 1.49$$

$$q_0 = 15.26 \pm 1.49$$

$$r = 67.99 \pm 1.93$$

$$r_0 = 68.66 \pm 1.92$$

---


$$p + q + r = 99.20 \pm 1.17$$

---


$$p_0 + q_0 + r_0 = 99.99$$

and for 431 Gbah-Mende women:

$$p = 15.47 \pm 1.74$$

$$p_0 = 15.56 \pm 1.75$$

$$q = 14.78 \pm 1.69$$

$$q_0 = 14.86 \pm 1.71$$

$$r = 68.63 \pm 2.24$$

$$r_0 = 69.57 \pm 2.22$$

---


$$p + q + r = 98.88 \pm 0.51$$

---


$$p_0 + q_0 + r_0 = 99.99$$

which gives for 1015 Gbah-Mende (584 men + 431 women):

$$p = 15.78 \pm 1.14$$

$$p_0 = 15.85 \pm 1.15$$

$$q = 15.02 \pm 1.12$$

$$q_0 = 15.09 \pm 1.12$$

$$r = 68.26 \pm 1.46$$

$$r_0 = 69.05 \pm 1.45$$

---


$$p + q + r = 99.06 \pm 0.34$$

---


$$p_0 + q_0 + r_0 = 99.99$$

#### *Discussion of Results.*

It is evident that the distribution of the bloodgroups is almost entirely the same for both regions studied, though they are some 200 miles distant

from each other as the crow flies. This fact speaks in favour of a fundamental unity of the two populations. The agreement between the two groups is very clearly demonstrated if we plot our results in a ternary trianglesystem, using the figures  $p_0$ ,  $q_0$  and  $r_0$ , corrected according to BERNSTEIN, as components. As the sum of the corrected gen-figures gives unity when added, the bloodgroup distribution of a certain population is completely characterised by a point within a triangle, if the perpendiculars let down from this point on the sides<sup>1)</sup>, represent the values of  $p_0$ ,  $q_0$  and  $r_0$  and the angles represent the "pure" components.

As is shown in fig. 2, the positions within the triangle of the Liberian

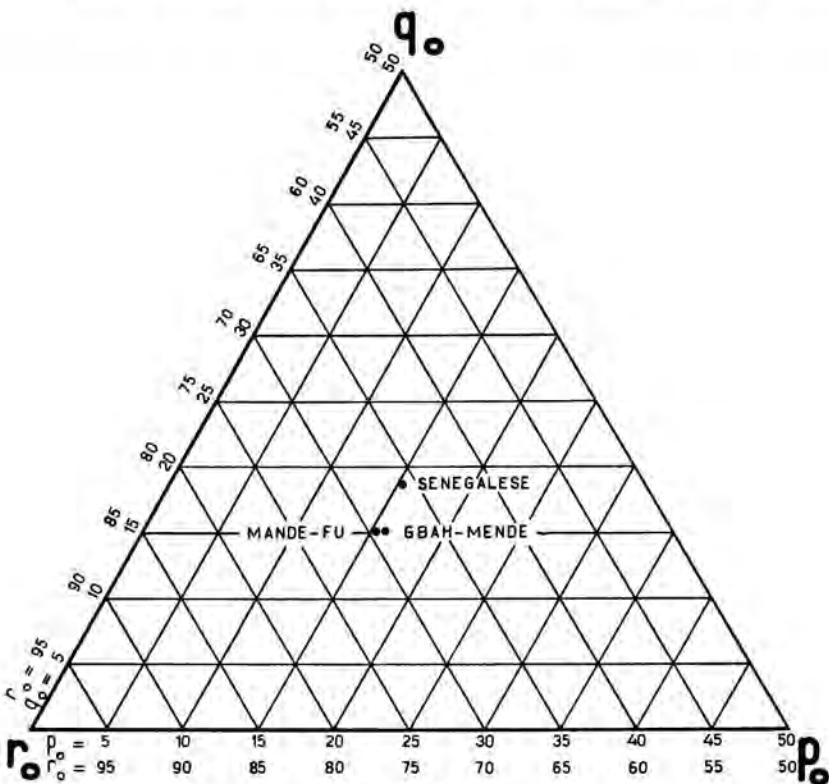


Fig. 2.

Graphical representation of the ethnoserological position of the Gbah-Mende of Sierra Leone and the Mande-Fu speaking peoples of Liberia. The points for the Mande-Fu and the Gbah-Mende almost coincide. The Senegalese, studied by the HIRSZFELDS, show a higher percentage of the bloodgroup *B*; their point approaches more to the  $q_0$ -pole of the system. Two sides of the equilateral triangle  $p_0$   $q_0$   $r_0$  are cut off at the point  $r_0 = 50$ , since the majority of all peoples show a value of  $r_0$  greater than 50 and are therefore localized in this region of the system, which permits the representation of the results on a double scale.

<sup>1)</sup> The system is based on the wellknown fact that within an equilateral triangle the sum of the perpendiculars from a point on the sides is constant and equal to the height of the triangle.

and Sierra Leonean natives are very near each other and the points representing the Gbah-Mende and the Mande-Fu group of the Liberians almost coincide. As the Mende too must be classified with the Mande-Fu-speaking peoples, this coincidence yields a clear instance how serological methods confirm the linguistical indication of fundamental ethnic unity of both regions. It is therefore highly probable that both groups have separated in the recent past and are to be considered as branches of one mothergroup. We remark by the way that the figures given for the Gbah-Mende prove the entire independence of bloodgroup and sex in this tribe, the BERNSTEIN points for the two sexes, if plotted in a ternary system, falling almost entirely together.

We strongly recommend the use of this ternary system for graphical representation of bloodgroupwork. The system has the great advantage that the gens  $p$ ,  $q$  and  $r$  are treated symmetrically and that the relation between different peoples can be surveyed in a moment. It deserves much more application in ethnoserology and physical anthropology than it has hitherto found. Of course its use must be restricted to groups of at least 400 individuals.

#### *Summary.*

1. Of 808 natives of Liberia and of 1105 natives of Sierra Leone the bloodgroup distribution was studied. The investigation includes autochthones only. Americo-Liberians, "Creoles" and other negroes of foreign or mixed origin were precluded.
  2. A short summary is given of the method used by us in tropical Africa.
  3. Between the two groups investigated a pronounced conformity in the distribution of the bloodgroups could be determined. The agreement between the Mande-Fu speaking natives of Liberia and the Gbah-Mende of Sierra Leone, who linguistically must be classified as Mande-Fu, is so great as to be called an identity. In harmony with linguistical facts from these researches the probability results of a close somatical relation between the two groups investigated.
  4. We recommend the use of graphical methods in representing results of ethno-serological researches, especially a ternary system, which is based on the fact that addition of the corrected gen-figures gives unity.
-

**Anthropology.** — *Studies in bloodgroup correlations in some peoples of Liberia and Sierra Leone.* By PAUL JULIEN. (Communicated by Prof. C U. ARIËNS KAPPERS).

(Communicated at the meeting of June 26, 1937).

In our preceding paper we communicated the results of our blood-group studies in Liberia and Sierra Leone. When the circumstances allowed us to do so, we took measurements of our native blooddonors and so had the opportunity to investigate the problem if in these Westafrican negroes a correlation could be found between the bloodgroups and some anthropometrical functions. As the existence of such a correlation never has been well established, it could be expected that this study, which was limited to adults only, would prove the absence of any correlation<sup>1</sup>).

#### *Method.*

In our Liberian material we studied the correlation between bloodgroup and cephalic index and height; in the Mende material we investigated the correlation of the bloodgroup with cephalic index, height, nasal index and skincolour.

The problem requires the classification of our measurements into two series of variables, one of continuous character (measurements, indices), the other of discontinuous, groupcharacter, the bloodgroups. We treat this problem according to the theorem of BRAVAIS<sup>2</sup>). In order to calculate the coefficient of correlation it is necessary to divide the noncontinuous variables into two alternative groups. We chose the alternative: Zero -non zero as the most convenient. Any other, however, can be studied in the same way.

According to BRAVAIS the coefficient of correlation  $r$  has the value:

$$r = \frac{\sum p a_x a_y - nb_x b_y}{n \sigma_x \sigma_y}$$

<sup>1)</sup> See e.g. P. F. J. A. JULIEN, Bloedgroeponderzoek der Efé-pygmeën en der omwonende negerstammen, Mémoires de l'Institut Royal Colonial Belge, T. 4, fasc. 2, Brussels, 1935, p. 23.

<sup>2)</sup> W. JOHANNSEN, Elemente der exakten Erblichkeitslehre, Jena, 1913, p. 351.

In this formula represent:

- $n$  total number of variables
- $p$  number of individuals within a single class of continuous variables
- $a_x$  deviation of a discontinuous variable from the starting point for the calculation of the average  $A_x$ ; in our case  $a_x = 1$
- $a_y$  deviation of a discontinuous variable from the starting point for the calculation of the average  $A_y$
- $b_x$  deviation of the average from  $A_x$ , here from 0
- $b_y$  deviation of the average from  $A_y$
- $\sigma_x$  standarddeviation for the discontinuous series
- $\sigma_y$  standarddeviation for the continuous series.

In the case of an existing correlation between the two series  $r$  has a value deviating from 0, positive with positive correlation, negative with negative correlation. In the (theoretical) case of perfect correlation (+ or -),  $r$  becomes +1 or -1; in cases of completely lacking correlation  $r = 0$ . In all other cases its value lies between +1 and -1 and deviates more from zero the more pronounced the correlation is.

Of course it is necessary to check the reality of a calculated coefficient of correlation by calculating its average error  $m_r$ , which according to Pearson and Filon has the value

$$m_r = \frac{1 - r^2}{\sqrt{n}}.$$

In several cases, however, to establish the non-existence of a correlation it is sufficient to draw frequency curves — one for every bloodgroup — of the studied quality, e.g. the index cephalicus, the bodylength etc. If the curves for the different bloodgroups show the same topvalue and no pronounced asymmetry, than in the formula of BRAVAIS  $-nb_x b_y$  approximates to  $\sum p a_x a_y$  and  $r$  to zero, rendering the complicated calculation of the coefficient of correlation superfluous. In simple cases even the calculation of the average can be sufficient to establish the absence of correlation. In all cases studied by us, the BRAVAIS formula yields very small coefficient values, which moreover have no real meaning, as is shown by their average error.

Against this method of course the objection can be made that the chosen alternative: zero — non zero, includes a certain error as the quality O is present in a great number of non-zero individuals in a heterozygotic form. Strictly the calculation of the coefficient of correlation should be limited to homozygotic A and B individuals, which of course is impracticable in an African material, or to the alternative zero — AB, which owing to the scantiness of AB-individuals, requires an enormous number of investigated cases.

*Cephalic Index and Bloodgroup with Liberian Autochthones.*

The Liberian natives yield these values for the cephalic index:

MEN (Fig. 1)			WOMEN		
Bloodgroup	Number	Average Cephalic Index $\pm m$	Bloodgroup	Number	Average Cephalic Index $\pm m$
O	366	74.00 $\pm$ 0.15	O	34	73.64 $\pm$ 0.51
A	172	73.81 $\pm$ 0.20	A	20	72.76 $\pm$ 0.76
B	146	74.09 $\pm$ 0.25	B	20	73.75 $\pm$ 0.80
AB	26	74.15 $\pm$ 0.68	AB	10	72.85 $\pm$ 0.32
All	710	73.98 $\pm$ 0.11	All	84	73.36 $\pm$ 0.35

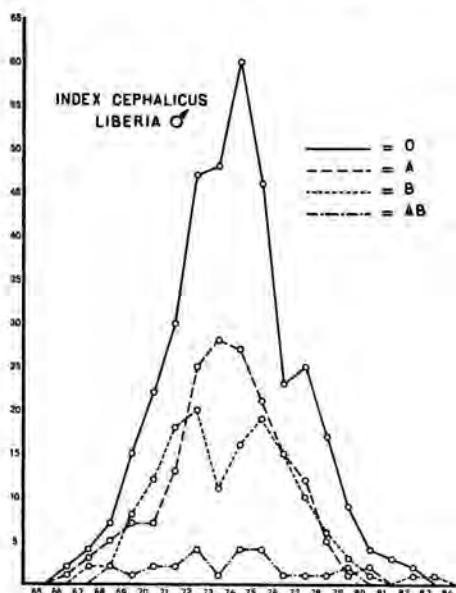


Fig. 1.

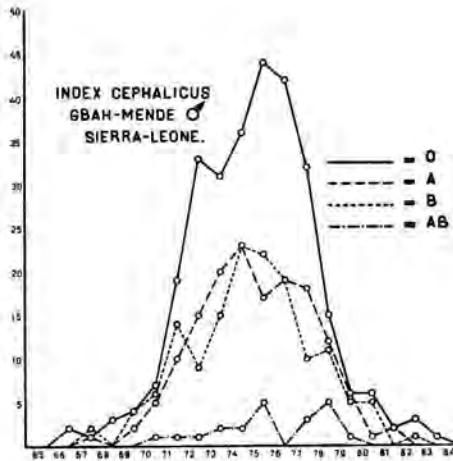


Fig. 2.

Fig. 1. Frequency curves of the cephalic index of 710 male Liberian natives of different tribes (specified list in the text) for every bloodgroup separately. The indices are calculated as follows: All values from 72.00 to 72.99 are taken together and represented by a point between the figures 72 and 73, as the average of the group has the value 72.5 etc. For details regarding the form of the curves see C. U. ARIËNS KAPPERS, Introduction to the anthropology of the Near East, Amsterdam 1934, and several publications of the same author in these proceedings, especially Vol. XXXIX, N°. 1, 32 (1936); N°. 10, 1156 (1936); Vol. XL, N°. 1, 29 (1937).

Fig. 2. Frequency curves of the cephalic index of 608 male Gbah-Mende of Sierra Leone, for every bloodgroup separately.

Fig. 1 gives frequency curves of the cephalic index for males of the four bloodgroups separately. As could be expected from the averages and

is corroborated by the general form of the frequency curves, no correlation exists between cephalic index and bloodgroup. This is exactly shown by the coefficient of correlation, which for the combination: Group O — high index against non zero-low index has the value:

$$r \pm m_r = -0.032 \pm 0.038,$$

where the average error surpasses the coefficient.

The sexual difference has the value

$$\text{Diff.} = 0.62 \pm 0.37$$

which means that the difference probably has no real meaning.

#### *Height and bloodgroup in Liberian Autochthones.*

For this correlation we find:

MEN			WOMEN		
Bloodgroup	Number	Average Height in cM $\pm$ m	Bloodgroup	Number	Average Height in cM $\pm$ m
O	85	165.9 $\pm$ 0.6	O	25	156.8 $\pm$ 1.1
A	34	165.3 $\pm$ 1.2	A	13	154.3 $\pm$ 1.3
B	27	165.2 $\pm$ 1.2	B	8	157.3 $\pm$ 1.9
AB	6	165.7 $\pm$ 1.3	AB	5	155 $\pm$ 1
All	152	165.6 $\pm$ 0.5	All	51	156.1 $\pm$ 0.7

No correlation is present between height and bloodgroup. The sexual difference of height is  $9.5 \pm 0.9$  cM.

#### *Studies in bloodgroup correlations in the Gbah-Mende of Sierra Leone.*

##### *Cephalic Index and Bloodgroup.*

We investigated 608 men and 457 women, which yielded these figures:

MEN (Fig. 2)			WOMEN		
Bloodgroup	Number	Average Cephalic Index $\pm$ m	Bloodgroup	Number	Average Cephalic Index $\pm$ m
O	288	75.00 $\pm$ 0.17	O	215	74.82 $\pm$ 0.18
A	152	75.04 $\pm$ 0.20	A	118	75.07 $\pm$ 0.25
B	146	74.91 $\pm$ 0.23	B	112	75.16 $\pm$ 0.25
AB	22	75.4 $\pm$ 0.6	AB	12	74.6 $\pm$ 1.0
All	608	75.00 $\pm$ 0.11	All	457	74.96 $\pm$ 0.13

The coefficients of correlation have these values:

$$\text{for 608 men } r \pm m_r = 0.021 \pm 0.041$$

$$\text{for 457 women } r \pm m_r = 0.009 \pm 0.047$$

which shows that no correlation is present, as could be expected from the averages for the different bloodgroups. The sexual difference of the cephalic index is almost zero.

#### *Height and Bloodgroup in the Gbah-Mende of Sierra Leone.*

MEN			WOMEN		
Bloodgroup	Number	Average Height in cM. $\pm m$	Bloodgroup	Number	Average Height in cM. $\pm m$
O	168	164.5 $\pm$ 0.5	O	166	154.2 $\pm$ 0.4
A	99	163.3 $\pm$ 0.6	A	92	154.3 $\pm$ 0.6
B	103	164.3 $\pm$ 0.5	B	87	154.5 $\pm$ 0.6
AB	16	166.9 $\pm$ 0.8	AB	8	156.5 $\pm$ 2.1
All	386	164.3 $\pm$ 0.3	All	353	154.4 $\pm$ 0.3

No correlation is present between cephalic index and bloodgroup.

The sexual difference of height in this material is

$$\text{Diff.} = 9.9 \pm 0.4 \text{ cM.}$$

The Gbah-Mende of Sierra Leone seems to be a little shorter than the average native of Liberia. The mean difference is

$$\text{for the men } \text{Diff.} = 1.3 \pm 0.6 \text{ cM.}$$

$$\text{for the women } \text{Diff.} = 1.7 \pm 0.8 \text{ cM.}$$

The values of the average errors show that these differences probably have no real meaning.

#### *Nose-index and Bloodgroup in the Gbah-Mende of Sierra Leone.*

The restricted number of measurements allows us the calculation of the mean nasal index for males only. So we find for 182 Gbah-Mende-men:

MEN		
Bloodgroup	Number	Mean Nasal Index $\pm m$
O	94	101.7 $\pm$ 1.0
A	42	100.2 $\pm$ 1.1
B	43	100.1 $\pm$ 1.5
AB	3	100. $\pm$ 2
All	182	100.9 $\pm$ 0.7

20 women of all bloodgroups yielded a mean nasalindex of  $100 \pm 2$ .  
The figures for the 182 males show the absence of correlation.

Men as well as women are hyperchamaerrhinic, on the verge of chamaerrhiny.

*Skincolour and Bloodgroup in the Gbah-Mende of Sierra Leone.*

In order to establish this correlation, we divided our Gbah-Mende material into two groups according to their skincolour, light or dark. Only adults were studied, 520 males and 399 females. The results of this investigation are given in Fig. 3 and in the following table.

MALES				FEMALES			
Blood-group	Number	%	Skincolor	Blood-group	Number	%	Skincolor
O	67	27.6	Light		93	49.5	Light
	176	72.4	Dark		95	50.5	Dark
	243	100.0	Total		188	100.0	Total
A	29	22.1	Light		58	54.7	Light
	102	77.9	Dark		48	45.3	Dark
	131	100.0	Total		106	100.0	Total
B	30	22.2	Light		51	51.5	Light
	105	77.8	Dark		48	48.5	Dark
	135	100.0	Total		99	100.0	Total
AB	2	18	Light		2	33	Light
	9	82	Dark		4	67	Dark
	11	100	Total		6	100	Total

From these figures we calculate the following coefficients of correlation, using this pair of alternatives:

Bloodgroup O -non O against Dark-Light

and find for

$$520 \text{ men } r \pm m_r = -0.064 \pm 0.044$$

$$399 \text{ women } r \pm m_r = 0.031 \pm 0.050$$

The values of the mean errors prove that no relation exists between skincolour and bloodgroup with the Gbah-Mende of Sierra Leone.

If we calculate for the same material the correlation Sex-Skincolour, we find for the pair of alternatives: Man-Woman against Dark-Light:

$$r \pm m_r = 0.274 \pm 0.031.$$

Here is a pronounced positive correlation, which shows that as a rule Gbah-Mende men have a darker skin than women. The number of light-skinned individuals among the Gbah-Mende women is more than twice as great as that among the men, as is clearly shown in Fig. 3. As the

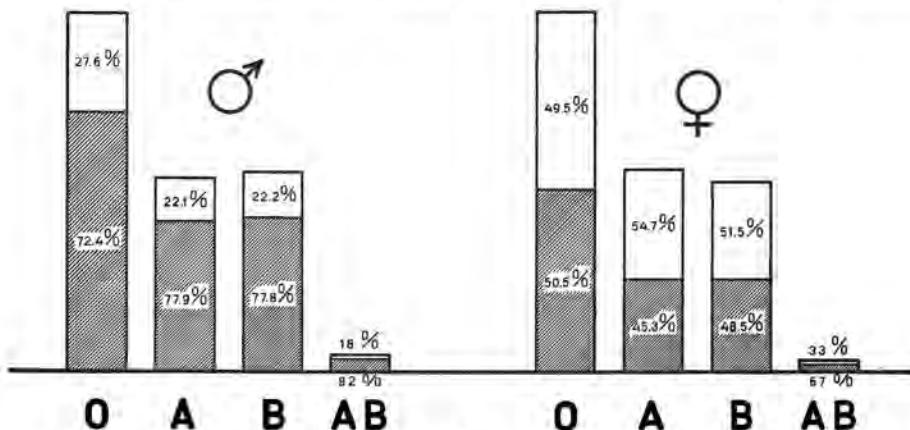


Fig. 3. Bloodgroup and skincolour with the Gbah-Mende of Sierra Leone (520 men, 399 women). White = lightskinned, black = darkskinned. The ratio light-dark is the same for the different bloodgroups within a sex, but is different for men and women. The columns for the females are drawn on the same scale (same total number of individuals) as for the males.

classification into two colourclasses is a very rough one, this investigation, of course, can have a preliminary value only.

#### *Summary.*

1. In some peoples of Liberia and in the Gbah-Mende of Sierra Leone we studied the correlation between the bloodgroup and cephalic index, height, nasal index and skincolour. The investigation was limited to adults and includes autochthonous peoples only.
2. No trace of correlation could be established with the material mentioned.
3. Frequency curves, averages and mean errors of our measurements are given.
4. With the Gbah-Mende a pronounced correlation between sex and skincolour could be determined.

The researches were executed with the high assent of the Government of the Colony and Protectorate Sierra Leone and of the Government of the Republic Liberia. We want to express here our sincere gratitude to both Governments for all they have done to promote our researches. Especially we thank His Excellency the President of the Republic Liberia, for the permission granted to our expedition to visit the hinterland of the Republic and the interest shown in our work.

The execution of the researches has only been possible by the energetical collaboration and many preliminary researches of Dr. A. B. F. A. PONDMAN, Director of the Serological

Department of the Rijks Instituut voor de Volksgezondheid at Utrecht. Dr. PONDMAN not only prepared all sera required for the expeditions, but also charged himself with the control of their activity.

We thank him sincerely for the work of decisive importance done by him for these researches.

We are greatly indebted to the Roman Catholic Mission in Monrovia, especially to H. E. the Prefect Apostolic Mgr. JOHN COLLINS, Nuncio of the Vatican to the Liberian Government, for help and advice received when preparing the expedition through the Liberian hinterland, to Mr. REIDER of the S.D.A. Mission in Ngumbe, Liberia, and to Dr. and Mrs. HARLEY of Ganta Mission, Liberia, for all they have done for our work.

The Vereeniging tot het bevorderen van de beoefening der wetenschap onder de Katholieken in Nederland, the Nederlandsch Nationaal Bureau voor Anthropologie and the Provinciaal Utrechtsch Genootschap supported our researches in Sierra Leone by a grant, for which we express here our sincere gratitude.

---



KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN  
TE AMSTERDAM

---

PROCEEDINGS

VOLUME XL

No. 8

President: J. VAN DER HOEVE  
Acting-Secretary: H. R. KRUYT

---

CONTENTS

- VENING MEINESZ, F. A.: "Second order disturbance terms in pendulum observations at sea", p. 650.  
VENING MEINESZ, F. A.: "The Determination of the Earth's plasticity from the post-glacial uplift of Scandinavia; Isostatic adjustment", p. 654.  
CLAY, J., and G. VAN KLEEF: "Conductivity of pure Gases at high pressures", p. 663.  
CORPUT, J. G. VAN DER: "Sur la méthode de WEYL dans la théorie des nombres". (Première communication), p. 668.  
WEITZENBÖCK, R.: "Ueber Trivektoren". I, p. 676.  
COHEN, ERNST, und W. A. T. COHEN-DE MEESTER: "DANIEL GABRIEL FAHRENHEIT, geb. zu Danzig 24. Mai 1686, gest. im Haag 16. Sept. 1736". (Zweite Mitteilung), p. 682.  
BREMEKAMP, H.: "Ueber die CARSONSche Integralgleichung". (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE), p. 689.  
HWA-CHUNG LEE: "On the differential geometry of contact transformations". (Communicated by Prof. J. A. SCHOUTEN), p. 695.  
HAANTJES, J.: "Conformal representations of an  $n$ -dimensional euclidean space with a non-definite fundamental form on itself". (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE), p. 700.  
ZANDEN, J. M. V. D.: "On polymerides of methylchavicol". (Communicated by Prof. P. VAN ROMBURGH<sup>1</sup>), p. 706.  
HERK, A. W. H. VAN: "Die chemischen Vorgänge im Sauromatum-Kolben". III. Mitteilung. (Communicated by Prof. J. C. SCHOUTE), p. 709.  
WILLEMS, H. W. V.: "On the relation between the optical properties and the chemical composition of glaucophane". (Communicated by Prof. H. A. BROUWER) p. 720.  
HIRSCH, GOTTWALT CHRISTIAN: "Grundlinien einer Theorie der Golgikörper. II. Die Golgikörper in der Zeit". (Vorläufige Mitteilung). (Communicated by Prof. H. J. JORDAN), p. 725.  
STIASNY, G.: "Parerythropodium maris-tenebrosi n. sp., eine neue Alcyonarie von der Küste Nordwest-Afrikas". (With one plate). (Communicated bij Prof. H. J. JORDAN), p. 735.
-

**Physics.** — *Second order disturbance terms in pendulum observations at sea.* By F. A. VENING MEINESZ.

(Communicated at the meeting of September 25, 1937.)

An investigation of Mr. B. C. BROWNE, Cambridge, about the measurement of gravity at sea, which by kind courtesy of Mr. B. the writer has been able to study before it appeared in the Geophysical Supplement of the Monthly Notices of the R.A.S., has revealed that there are some second order terms of the disturbances caused by the ship's movements in these measurements, which cannot always be neglected and which, even for measurements in submerged submarines, may attain values of more than 10 milligals. The writer feels deeply indebted for this study. In this note he wishes to give a few general remarks about it as far as it concerns the measurement of gravity at sea by means of pendulum observations in a submerged submarine.

In this case the second order disturbance term is

$$\delta g = -\frac{\ddot{x}^2}{4g} + \frac{\ddot{y}^2}{2g} + \frac{\ddot{z}^2}{2g} \dots \dots \dots \quad (1)$$

$\ddot{x}$  is the vertical acceleration of the apparatus and  $\ddot{y}$  and  $\ddot{z}$  the horizontal accelerations perpendicular to the ship's axis and in the direction of the ship's axis resp. The dashes above the terms indicate mean values over the time of observation. The first term originates from the fact that the pendulum observations provide us with the mean value of  $\sqrt{g}$ ; in general this does not equal the root of the mean value of  $g$  — which last quantity is undisturbed by the vertical accelerations of the apparatus — but differs from it by terms of second and higher order. The two last terms result from the vectorial addition to  $g$  of the horizontal accelerations in  $y$  and  $z$  sense; the resultant differs likewise from  $g$  by second and higher order terms of these accelerations. The formula for this effect, however, is only true for accelerations whose periods are long compared with the periods of the pendulums and of the damped pendulums of the pendulum apparatus; for smaller periods the formulas change. In the case of quickly varying accelerations of a period small compared to that of the pendulums and of the damped pendulums, the effect becomes negligible. This explains that there have never been found any traces of second order terms in harbours where the gravity value in the harbour could be compared to that on land. The horizontal accelerations in the harbours, although usually especially large, appear to be exclusively of the short periodic type and so the second order terms seem to be negligible notwithstanding the great size of the accelerations.

Two points have now to be considered. In the first place whether the accelerations can be determined; this would enable us to apply the corrections and thus to maintain the old standard of accuracy for these observations even for strong ship's movements, which otherwise would be correspondingly reduced. In the second place whether the past gravity material at sea can be corrected for them and whether the figures given for the mean errors of these results have to be increased. In connection with this point an investigation of the ship's movements and of their effect on these corrections is important.

The determination of the vertical accelerations does not present a serious problem. Their effect appears in the records of the gravity apparatus as fluctuations of the time-marks in the pendulum records. The vertical accelerations can thus be computed for the ascending and descending parts of the time-mark curve, i.e. for about one third part of each coincidence interval and this is sufficient for determining the correction for gravity for the whole observation with satisfactory accuracy. The formula for computing the correction is

$$\delta g = \frac{g}{2} \left( \frac{T}{\tau} \frac{a}{a} \right)^2$$

in which

$T$  = pendulum period,

$a$  = pendulum amplitude on the record,

$\tau$  = half period of fluctuations of time-marks on the record,

$a$  = amplitude of fluctuations of time-marks at the centre of the record.

The determination of the horizontal accelerations is a more difficult problem. They bring about fluctuations of the direction of the apparent gravity and the problem is to measure these fluctuations. The possibility mentioned by BROWNE of making a record of the position of the horizon, is excluded in a submerged submarine. Experiments are under way to do it by installing on the gravity apparatus a slow pendulum, of which the period is long compared with the period of the horizontal accelerations. As the period of the long ocean-swell, which is practically the only one that is perceptible at the depths where the observations are made, may be as long as 12 seconds for a complete revolution, we need a pendulum whose period is at least 30 or 40 seconds for a double swing.

The experiments for making such a pendulum give hopeful results. A horizontal beam of about 30 cm length with weights of about 1 kg at each end is suspended by two tiny springs. It is provided with two movable weights for the adjustment of the position of the centre of gravity in a vertical and horizontal sense. It is mounted in an air-tight case from which the air can be removed. Slight air-currents can be let in for bringing the pendulum back to its normal position when desired. The position of the pendulum will be recorded on the same record that serves for the recording

of the main pendulum apparatus. The pendulum will only follow the fluctuations of the vertical for a slight part, dependent on the difference in periods, and as the apparatus, hanging in gimbals, follows it for a large part, the record of the angle between the pendulum and the apparatus will show a fluctuation from which the fluctuation of the vertical can be deduced. An accuracy of about  $1/25$  of the fluctuation is enough for allowing the necessary accuracy in the resulting correction for gravity. Fluctuations exceeding half a degree are expected to be exceptional. The reading accuracy on the record can easily be brought to a quarter of a minute of arc.

For the past gravity observations, it is easy to determine the vertical accelerations; they can be deduced from the records by measuring the fluctuations of the time-mark curves. So the first term of formula (1) can be computed. This work is now under way for all the gravity observations at sea made by the Netherlands Geodetic Commission and it is hoped that early in the next year the results will be ready for publication. At this moment only a short provisional statement can be made, resulting from a superficial examination of the records.

For a great number of observations the correction of the gravity result appears to be less than one milligal and the number of observations for which it exceeds a few milligals is relatively small. Referring to the list of stations on page 89 at seq. of "Gravity Expeditions at Sea", vol. II, the corrections seem to be small for all the stations Nos 196 to 486. For those stations in the East Indies enclosed within the Archipelago — i.e. not outside in the Indian Ocean or in the Pacific — they are probably all below one milligal. The same may be said for the stations 426 to 486 in the Atlantic Ocean. For the stations of the last expedition, the voyage of Hr.Ms. O 16 from Holland to Washington and back, which was accomplished under unusually difficult conditions of heavy seas, great values for this correction, up to 30 milligals, do occur.

The last term of formula (1) will probably be below one milligal for practically all the gravity observations which have so far been made; the writer does not think it likely that for work on board submerged submarines it can ever attain values that need be taken into account. This opinion is founded on the supposition that the horizontal accelerations in the sense of the ship's axis are less than one fifth of the vertical accelerations and in that case, as the correction depends on the square of the accelerations, though the denominator is half as great, the corrections are less than 8 % of those for the vertical accelerations. This supposition will, however, have to be proved experimentally and it is hoped that the apparatus mentioned above will provide the means of doing so.

The most difficult point to settle is the value of the second term of the formula (1), i.e. that which depends on the horizontal accelerations perpendicular to the ship's axis. Here future experiments will certainly be necessary for getting further insight. As a first supposition it may perhaps

be assumed that the horizontal acceleration in this sense is equal to the vertical acceleration multiplied by the sine of the angle between the direction of the swell and the ship's axis, but it is felt that this supposition, starting from the assumption that the ocean-waves at the depth of the observation are caused by circular movements of the water particles, cannot be considered as more than a tentative idea.

For part of the past gravity observations data are available about the direction of the swell and this will be a valuable help for the deduction of this term. For those observations about which all data are lacking, there is doubtless no other way than to accept the direction of the swell as unknown and to compute the increase of the mean error of the gravity result which corresponds to this uncertainty.

According to formula (1) the correction for the effect of the vertical accelerations makes the gravity anomalies more positive while that for the horizontal accelerations has contrary sign and double its value for the same value of the accelerations. Taking the mean value of the square of the sine of the angle between direction of the swell and the ship's axis for a great many observations at 0.5, the two terms would cancel each other and so the writer believes that the mean total effect for a great many observations will be small, although he is aware of the fact that the mean value of the effect of the horizontal accelerations has probably thus been somewhat underestimated — for small angles between swell and ship's axis the acceleration is probably not quite proportional to the sine of this angle but greater — and so it is likely that this effect will more or less predominate above that of the vertical accelerations. It is clear, however, that all these considerations are highly speculative and so an experimental investigation is needed before any more exact treatment of the problem can be made.

In a few months the writer will make another expedition on the Atlantic for putting the described method for measuring the horizontal accelerations to a trial and, if it is successful, for making an investigation about the ship's movements at different depths and for different angles between the ship's course and the direction of the main swell. He hopes soon, therefore, to be able to publish further information about these questions.

This paper may give an idea of the importance for gravity work at sea of the effect of the second order disturbance terms, dealt with by MR. BROWNE. The writer wishes to express his sincere gratitude to him for his valuable investigations.

---

**Physics. — *The Determination of the Earth's plasticity from the post-glacial uplift of Scandinavia; Isostatic adjustment.*** By F. A. VENING MEINESZ.

(Communicated at the meeting of September 25, 1937.)

In "Physics", August 1935, N. A. HASKELL gives a new and noteworthy treatment of the problem to determine the Earth's viscosity from the post-glacial uplift of Scandinavia, attributing this uplift, as it is generally done, to the readjustment of the isostatic equilibrium after the disappearance of the ice-load. He finds a value for the kinematic viscosity  $\nu$  of the order of  $3 \times 10^{21}$  c.g.s. units, which corresponds to about  $10^{22}$  c.g.s. units for the coefficient of viscosity  $\eta$ ,  $\eta$  being equal to  $\varrho \times \nu$  and putting the density  $\varrho$  at 3.3. In 1934 the writer<sup>1)</sup>, by a rough deduction, derived a value for  $\eta$  of  $4 \times 10^{22}$ , also from data about these phenomena. Another deduction from these data was made in 1934 by R. W. VAN BEMMELLEN and H. P. BERLAGE<sup>2)</sup>, who find a value for  $\eta$  of  $1.3 \times 10^{20}$ , but this figure is based on a special hypothesis about the structure and dynamics of the Earth's crust and so it cannot be directly compared to the other two values.

The paper of Mr. HASKELL induced the writer to take the subject up again to see where the difference between the results for  $\eta$ , although not great considering the uncertainties of the subject, find their origin. One point of difference strikes at once. Mr. HASKELL uses the data about the uplift of Scandinavia after the disappearance of the ice-load, as they are given by F. NANSEN in "The Earth's Crust, its surface forms, and isostatic adjustment", Oslo 1928, while the writer has used the present rate of uplift as it is given by levelling, in combination with the gravity figures; the negative anomalies indicate the amount of deviation from isostatic equilibrium and the rising is supposed to be exclusively caused by isostatic readjustment. It seems worth while to combine these three sources of evidence together and to see what results of it; this is the object of this paper.

By means of the following considerations it is possible to divide the

<sup>1)</sup> F. A. VENING MEINESZ, "Gravity and the Hypothesis of Convection-currents in the Earth", Proc. Royal Acad. Amsterdam **37**, 2; F. A. VENING MEINESZ, "Gravity Expeditions at Sea", Vol. II, p. 59 a. f.

<sup>2)</sup> R. W. VAN BEMMELLEN and H. P. BERLAGE, "Versuch einer mathematischen Behandlung geotektonischer Bewegungen unter besonderer Berücksichtigung der Undations-theorie", "Gerlands Beiträge zur Geophysik", Bd. **43**, p. 19 (1934).

problem in two parts which can be treated separately. We begin by assuming that everywhere the rate of readjustment of the isostatic equilibrium is proportional to the deviation from isostasy; this will in most cases be a sufficient approximation. Let  $\zeta$  be the downward deviation of the Earth's surface from the position of isostatic equilibrium and let  $\dot{\zeta} = w_0$  be the velocity of the Earth's surface in the same direction. Our assumption then says

$$w_0 = \dot{\zeta} = -K\zeta. \quad \dots \quad (1)$$

which, integrated, gives

$$\zeta = \zeta(0) e^{-Kt} \quad \dots \quad (2)$$

$$\zeta(0) = \text{value of } \zeta \text{ for } t = 0.$$

The first part of our problem is to determine  $K$  from one of the formula's (1) or (2). From the value of  $K$  we can derive a quantity which is valuable for investigations about isostasy and correlated subjects, viz. the time  $T$  in which half of the isostatic anomaly disappears by readjustment. We find

$$T = \frac{\log 2}{K \log e} = \frac{0.69315}{K} \quad \dots \quad (3)$$

$T$  might be called the halving period for isostatic adjustment.

The second part of our problem is to derive data about the Earth's plasticity from the value of  $K$ . We shall come back to this problem afterwards and the result of the investigation will show — as also HASKELL's investigation shows — that  $K$  not only depends on the plasticity of the Earth but also on the horizontal dimensions of the phenomenon; it is, at least approximately, proportional to them. So  $T$  is, with the same approximation, inversely proportional to the horizontal dimensions.

For the determination of  $K$  we have first the data used by HASKELL. From the curves about the uplift of Scandinavia given by NANSEN he uses the following figures for the uplift  $\zeta$  and for the rate of uplift  $w_0$  both of Angermanland, which is considered to be about the centre of the rising area. According to (1) this gives the values for  $K$  as noted in the third column

	$\zeta$ meters	$w_0$ cm/year	$K$ $\text{sec}^{-1}$
5000 B.C.	147	3.9	$8.4 \times 10^{-12}$
4000 "	118	2.7	7.3 "
3000 "	94	2.2	7.4 "
2000 "	74	1.8	7.7 "
Mean value for $K = 7.7 \times 10^{-12}$			(4)

These data do well agree with each other but there is one objection to them. The figures for  $\zeta$  are based on the assumption that they represent the total uplift till equilibrium is reached, while the figures are given by NANSEN as the total upheaval up to the present time. As it is generally considered probable that the equilibrium has not yet been attained, we have to add the amount which is still lacking.

We might perhaps deduce this amount from the above figures for the rate of uplift by making use of the assumption that this speed must be proportional to  $\zeta$  but the result would be questionable as neither this assumption nor the figures for the uplift are accurate enough for allowing such a deduction. A better base seems to be the isostatic anomaly which is still existing and which may be assumed to be caused by the fact that the equilibrium has not yet been reached.

The mean figure of this negative anomaly for the central part of the depressed area may be estimated at about — 25 milligal<sup>1)</sup>.

Putting the density  $\rho$  of the plastic layer under the crust in which the phenomenon takes place at 3.3, we may compute the amount  $\zeta$  which the crust has to rise before the equilibrium is established, from the formula

$$An = -2\pi k^2 \rho \zeta \quad (k^2 = \text{NEWTON's constant})$$

and we find

$$\zeta = 180 \text{ meters.}$$

Adopting this figure for the depression at the present time, we find for the depressions at the periods under consideration

	$\zeta$ meters	$K$ $10^{12} \text{ sec}^{-1}$	$w_0$ cm/year
5000 B.C.	327	2.74	2.84
4000 "	298	2.71	2.59
3000 "	274	2.72	2.38
2000 "	254	2.80	2.21

$$\text{Mean value of } K = 2.76 \times 10^{-12} \text{ sec}^{-1} \quad \dots \quad (5)$$

Combining each figure of  $\zeta$  with the value of 180 meters at the present time, we can compute  $K$  from formula (2) and we find the four values of the second column of the above table; the mean value is  $2.76 \times 10^{-12} \text{ sec}^{-1}$ . These values are in good harmony with each other. Using this mean value for  $K$  we can by means of formula (1) compute the rates of uplift and we find the figures of the third column of the

<sup>1)</sup> See e.g. Map of "Kosmat", "Geologische Erläuterungen zur Frage der isostatischen Reduktionsmethoden", giving the anomalies after isostatic reduction by HEISKANEN according to the HAYFORD-BOWIE system.

table. These figures slightly deviate from the values given by NANSEN, but the writer does not know whether the differences are inside the uncertainties of these figures; the first figure, for 5000 B.C., shows by far the greatest discrepancy.

There is still one piece of information which we have not yet taken into account, i.e. the rate of uplift in the present time as it is provided by the levelling of Scandinavia. For the central part of the depressed area this rate may be put at 1.1 cm/year. By means of the above value of  $K$  we can deduce this rate also from the present value of  $\zeta$  of 180 meters; by applying formula (1) we find 1.57 cm/year. This also seems to be in fair agreement.

There appears, however, to be a tendency for the rates of uplift in the first part of the total time-interval of 6900 years that is considered, to be greater than the computed values and those in the second part to be smaller. We can easily find possible causes for it. In the first place it may be caused by the depressed area gradually becoming smaller. As  $K$  decreases with a decrease of the horizontal dimensions, the rate of uplift would decrease more than the formula for constant  $K$  indicates.

In the second place the assumption may be wrong that there have been no other processes going on in this part of the Earth's crust besides the isostatic readjustment. Part of the vertical movements or part of the gravity anomalies might have been caused by other phenomena. Considering these possibilities it is indeed remarkable that the agreement is as good as it is.

Taking the mean of the two values for the present rate of uplift in the central area, we may adopt for this rate the value of 1.3 cm/year. Combining this with the value of  $\zeta$  of 180 meters, formula (1) gives

$$K = 2.3 \times 10^{-12} \text{ sec}^{-1} \dots \dots \dots \quad (6)$$

which we shall finally adopt.

This value is 0.3 times the value (4) derived from the figures taken by HASSELL and so the resulting value for  $\eta$ , which is inversely proportional to it, will be  $10/3$  times as great. This gives

$$\eta = 3 \times 10^{22} \text{ c. g. s. units.} \dots \dots \dots \quad (7)$$

The main cause of the difference from HASSELL's figure, which is about the discrepancy mentioned in the beginning of this paper, is caused by HASSELL's assumption that equilibrium has already been attained, while the above value has been found by assuming that part of the depression is still unadjusted.

From this value of  $K$  we deduce by means of formula (3)

$$T = 9600 \text{ years.}$$

So it appears that in Scandinavia the period in which half of the depression disappears is about 10000 years.

The second problem is to derive from  $K$  data about the plasticity of the Earth. For doing this we have to make assumptions about the properties of the Earth's layers. The classic assumption is to suppose that the crust is not plastic and that it is floating on a plastic layer of constant density which is assumed to have the properties of a viscous fluid with a coefficient of viscosity in the same way as NEWTONIAN liquids show. We shall adhere to this assumption here, as it was also done by HASKELL in his paper and in the same way as he did, we shall neglect the elastic forces working in the crust. We thus confine our problem to the movements of the plastic substratum.

We shall further make some simplifying assumptions for making the solution more easy. It cannot in this way compete with the merits of the elegant solution of HASKELL, which is certainly better adapted to the conditions of the problem, but the solution will thus become relatively simple and so it may have its uses. It will make it, moreover, easy to introduce afterwards a complication of the basic assumptions by supposing the viscosity to decrease with greater depth and this may be a better approximation of the conditions in the Earth.

Our first assumption is that the problem is two-dimensional. Taking the  $X$  axis in horizontal direction and the  $Z$  axis vertically downwards, the equations for the substratum are

$$\left. \begin{aligned} \eta \nabla^2 u - \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 & \sigma_x &= -p - 2\eta \frac{\partial w}{\partial z} \\ \eta \nabla^2 w - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g &= 0 & \sigma_z &= -p + 2\eta \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 & \tau_y &= \eta \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \dots \quad (8)$$

in which  $\sigma_x$  and  $\sigma_z$  = the normal stress components,

$\tau_y$  = the shearing stress component,

$$p = -\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z)$$

$u$  and  $w$  = the components of the speed,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Our second assumption is that  $u$  and  $w$  are functions of  $z$  multiplied by

$$e^{i\pi \frac{x}{L}}$$

or, in other words, that  $u$  and  $w$  are periodic in the direction of the  $X$  axis with a half wave-length  $L$ . The equations now become

$$-\eta \frac{\pi^2}{L^2} u + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - i \frac{\pi}{L} p = 0 \quad (9A) \quad \sigma_x = -p - 2\eta \frac{\partial w}{\partial z} \quad (9D)$$

$$-\eta \frac{\pi^2}{L^2} w + \eta \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial p}{\partial z} + \varrho g = 0 \quad (9B) \quad \sigma_z = -p + 2\eta \frac{\partial w}{\partial z} \quad (9E)$$

$$u = i \frac{L}{\pi} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (9C) \quad \tau_y = \eta \left( \frac{\partial u}{\partial z} + i \frac{\pi}{L} w \right) \quad (9F)$$

Introduction (9 C) in (9 A) and eliminating  $p$  from (9 A) and (9 B) we get the equation for  $w$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial z^4} - 2 \frac{\pi^2}{L^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\pi^4}{L^4} w - \pi^2 \frac{\varrho g}{\eta L^2} = 0 \quad (10)$$

of which the general solution is the sum of four terms, powers of  $e$ , the exponents being the roots of a biquadratic equation, yielding four roots that are two and two equal. From this solution the formula's for  $u$ ,  $p$ ,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_z$  and  $\tau_y$  are easily derived by means of the formula's 9 C, D, E and F.

Introducing the conditions that  $u$  and  $w$  disappear for  $z = \infty$  and that  $\tau_y = 0$  for  $z = 0$ , we find the solution in the shape

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{A}{2\eta} z e^{-\pi \frac{z}{L}} \cos \pi \frac{x}{L} \\ w &= -\frac{A}{2\eta} \left( z + \frac{L}{\pi} \right) e^{-\pi \frac{z}{L}} \sin \pi \frac{x}{L} \\ \sigma_z &= -\varrho g z + \pi \frac{A}{L} \left( z + \frac{L}{\pi} \right) e^{-\pi \frac{z}{L}} \sin \pi \frac{x}{L} \\ p &= \varrho g z - A e^{-\pi \frac{z}{L}} \sin \pi \frac{x}{L} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

For  $z = 0$  we have

$$\left. \begin{aligned} w_0 &= -\frac{AL}{2\pi\eta} \sin \pi \frac{x}{L} \\ \sigma_{z_0} &= A \sin \pi \frac{x}{L} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

We may put  $\sigma_{z_0}$  equal to the deviation from the equilibrium surface  $\zeta$  multiplied with  $\varrho g$  and we thus have

$$A = \varrho g \zeta_0 \quad (13)$$

( $\zeta_0$  = maximum value of  $\zeta$ , i.e. for  $x = \frac{1}{2}L$ ).

The maximum value of  $w_0$  (also for  $x = \frac{1}{2}L$ ) becomes

$$w_0 = -\frac{\rho g L}{2\pi\eta} \zeta_0 \quad \dots \dots \dots \quad (14)$$

and so we see that the rate of uplift is proportional to  $\zeta$  as well as to  $L$ . So the assumption made in the beginning of this paper comes true. For the ratio  $K$  we find

$$K = \frac{\rho g L}{2\pi\eta} \quad \dots \dots \dots \quad (15)$$

The deviation of the equilibrium surface is given by

$$\zeta = \zeta_0 \sin \pi \frac{x}{L} \quad \dots \dots \dots \quad (16)$$

It is represented by a sine-curve. For the part between  $x = 0$  and  $x = L$  it is a fair representation of the Scandinavian conditions.

We can use (15) for the computation of  $\eta$ . We shall put for  $K$  the value (6) which we have finally adopted and for  $L$  the value of 1400 km. This value is derived from the data about the former and the present uplift<sup>1)</sup>. It is also in good agreement with fig. 3 of HASKELL's paper, where the depression is somewhat broader but circular while in our case it is assumed two-dimensional. For  $\rho$  we introduce the density of the substratum i.e. 3.3. We thus get

$$\eta = 3 \times 10^{22} \text{ gram cm}^{-1} \text{ sec}^{-1} \quad \dots \dots \dots \quad (7)$$

which is in perfect agreement with the value (7) which we had derived directly from HASKELL's solution. The resulting kinematic viscosity  $\nu = \eta/\rho$  is

$$\nu = 9 \times 10^{21} \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}.$$

We may now introduce the assumption that  $\eta$  is not constant but varying with the depth  $z$ . We find in this case for the general equations of motion for the three dimensional case

$$\left. \begin{aligned} \eta \nabla^2 u - \frac{\partial p}{\partial x} + X + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \\ \eta \nabla^2 v - \frac{\partial p}{\partial y} + Y + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} &= 0 \\ \eta \nabla^2 w - \frac{\partial p}{\partial z} + Z + 2 \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \quad (17)$$

<sup>1)</sup> See e.g. maps on pages 90 and 112 of "Isostasie und Schweremessung", by Dr. A. BORN, Berlin 1923.

in which

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

The equations for the stress-components are not altered:

$$\sigma_x = -p + 2\eta \frac{\partial u}{\partial x} \quad r_x = \eta \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \text{ etc.}$$

Applying this to the two-dimensional case and assuming the way  $\eta$  decreases with the depth  $z$  to be given by the formula

$$\eta = \eta_0 e^{-0.693 \frac{z}{D}}, \dots \dots \dots \quad (18)$$

$$(D = \text{depth at which } \eta = \frac{1}{2} \eta_0)$$

we can follow the same way as we have done for the case of constant  $\eta$ . The solution is more complicated, the four roots of the equation for the exponents of the  $e$  terms are all different now and the final formula's are long but in principle there is no difficulty. We shall only give here the result for the relation between  $K$ ,  $\eta_0$  and  $D$  incase the ratio  $a = 0.22 L/D$  is smaller than 1.

$$(1 - \frac{3}{2}a + a^2 - \frac{1}{8}a^3 \dots) \eta_0 = \frac{\varrho g L}{2\pi K} \dots \dots \quad (19)$$

Adopting the same values of  $\varrho$ ,  $L$  and  $K$  as for the former case we find for a few values of the depth  $D$

$D$	$\eta_0$
$\infty$	$3 \times 10^{22} \text{ gram cm}^{-1} \text{ sec}^{-1}$
1500 km	$4 \times 10^{22} \dots$
1000 ..	$5 \times 10^{22} \dots$
700 ..	$6 \times 10^{22} \dots$
154 ..	$26 \times 10^{22} \dots$

The last value ( $a=2$ ) has been found by applying the general formula's.

So we see that incase  $\eta$  sinks to half its value at 700 km depth, the value for  $\eta_0$  directly below the crust is twice as much as for constant  $\eta$  and that for  $D$  about 150 km it rises to  $8\frac{1}{2}$  times as much.

The quantities  $T$  and  $K$  still merit a further consideration. We found that the halving period  $T$  for isostatic adjustment is about 10000 years for Scandinavia and in the second place that, at least approximately, it

may in general be expected to be inversely proportional to the diameter of the phenomenon. This allows the more general statement, which only for the second property more or less depends on assumptions about the way in which the isostatic adjustment takes place, that, if  $T$  is the halving period of adjustment in thousands of years and  $L$  the diameter in thousands of kilometers, we may expect

for the two-dimensional case (one dimension assumed infinite)

$$T L = 14$$

for the circular case

$$T L = 20.$$

In the same way we may derive the following general statement from the present rate of uplift of Scandinavia of 1.3 cm per year and from the present depression there of 180 meters. If  $w$  is the rate of uplift in cm per year,  $\zeta$  the depression in kilometers and  $L$  again the diameter in thousands of kilometers, we may expect  
for the two-dimensional case

$$w = 5 \zeta L \text{ cm/year}$$

for the circular case

$$w = 3\frac{1}{2} \zeta L \text{ cm/year.}$$

In the same way we find that, if  $dA$  is the disappearance per year of the isostatic anomaly  $A$  we may expect  
for the two-dimensional case

$$dA = 5 \times 10^{-5} A L \text{ per year}$$

for the circular case

$$dA = 3\frac{1}{2} \times 10^{-5} A L \text{ per year.}$$

---

**Physics. — Conductivity of pure Gases at high pressures.** By J. CLAY  
and G. VAN KLEEF.

(Communicated at the meeting of September 25, 1937.)

**Summary.** The ionization by gamma rays is measured in neon at 97 and 63 atm. and in xenon between 81.6 and 65 atm. It is found that these gases become *conductive* in high electric fields, also without the gamma rays, between certain pressures. The conductivity of xenon at 75 atm. 25° C and at 4000 Volt/cm is  $3.2 \times 10^{-15}$  Amp/Volt. A considerable influence of the temperature is found. The conductivity is also found in other gases but till yet not in air and argon.

In our program to compare the ionization in different gases by cosmic radiation and gamma radiation, we had the opportunity to involve the pure noble gases which we obtained for this purpose from the PHILIPS Works.

In the small ionization chamber (fig. 1) which was constructed for this purpose we needed only 30 cc in the whole vessel and the volume in which the current was measured was 2.7 cc. The distance of the plate electrode, connected to the electrometer, to the other electrodes on both sides was 0.505 cm. The surface of the plate electrode in the middle was  $2.65 \text{ cm}^2$ . This electrode was surrounded by a guard plate connected to earth. The ionization currents were always measured by continual compensation by a charge on a calibrated capacity connected to the electrometer.

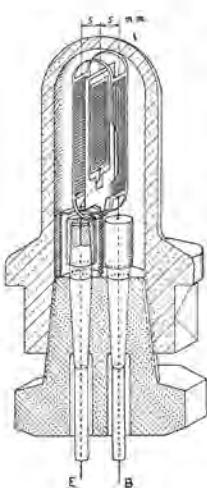


Fig. 1.  
Ionization chamber for  
high pressures and  
high homogeneous  
fields.

We measured first the ionization currents in argon (1) by 0.1 mgr Ra at 10 cm distance at different pressures up to 100 atm. and collecting fields to 4000 Volt/cm. To find the saturation current we could use the formula of JAFFE—ZANSTRA (2).

After the measurements in argon the chamber was filled with air and the ionization measured and then with neon. The constant for neon in the formula for the HANKEL function was found to be  $10^{-2}$  as is seen from the graph at 97 atm. The field was taken up to 3200 Volt (fig. 2). Then the ionization in neon was measured at 63 atm. and for the voltages below 1600 Volt we found that the two lines at 97 and 63 atm. give a saturation, proportional to the

pressure (fig. 3) so as we had found already for argon (1) and air (3) before. On account of the grid electrodes the influence of the electrodes is so small that it gives no increase.

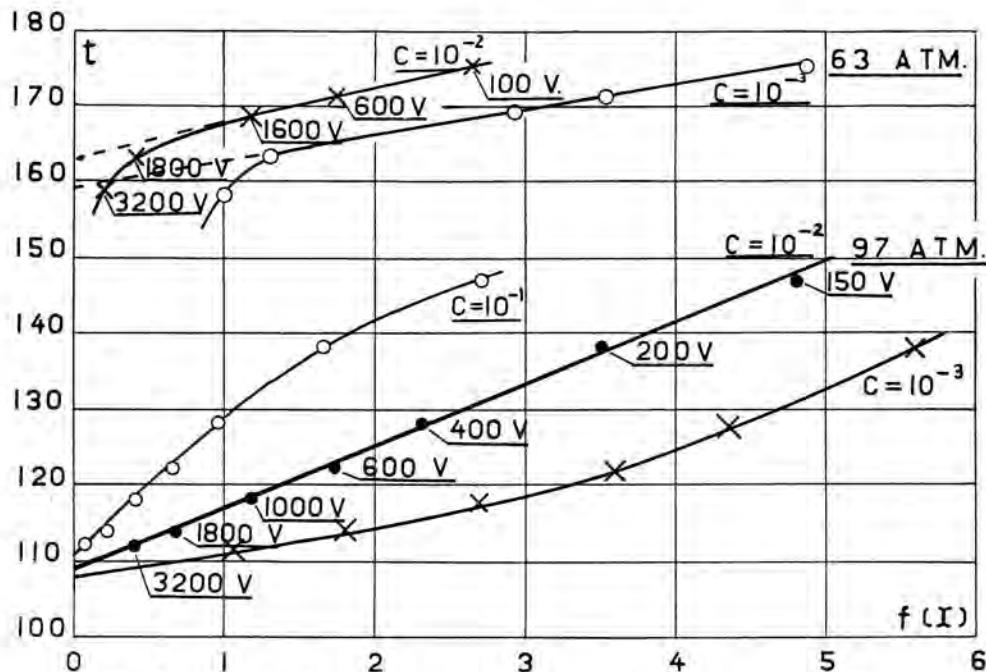


Fig. 2. Ionization by gamma rays in neon at high pressures by different collecting fields. Testing the constant  $c$  in the formula  $x = c \left( \frac{X}{p} \right)^2$ .

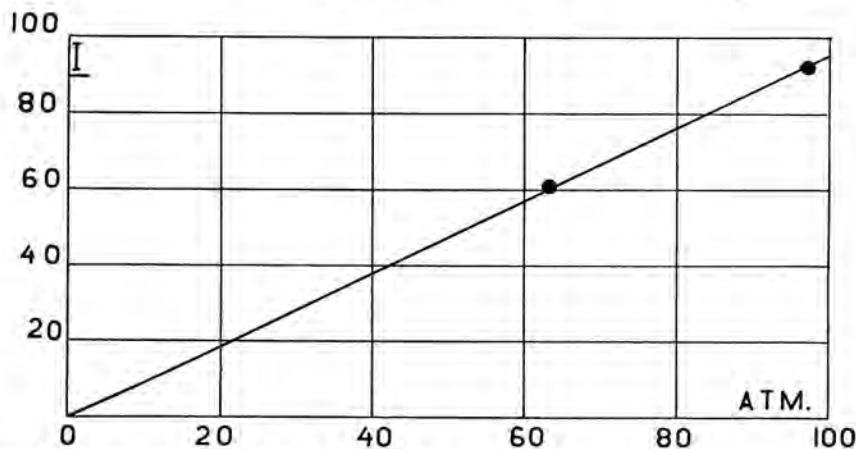


Fig. 3. Saturation value of the ionization in neon by gamma rays at different pressures.

But at the fields above 1600 V we found values for the ionization much too high (too low values of the time of compensation a certain charge) which we could not explain.

The neon was taken out of the vessel and filled with xenon. The

pressure we could obtain at 25° C was 81.6 atm. We found for fields below 1200 Volt/cm that the extrapolation formula could be applied and the best value of the constant in  $x = c \left( \frac{X}{p} \right)^2$  was  $c = 10^{-3}$  (fig. 4).

But now we saw that for values of the fields above 1600 Volt the same phenomenon as in neon at 63 atm., but much stronger, was observed. It was possible to get a current also without any ionization from outside. We tried to see whether there was any difference when the chamber was surrounded by 11 cm Fe to exclude gamma radiation from outside and soft cosmic radiation, but this did not make any observable difference. From this time on the systematic observations were made in other gases

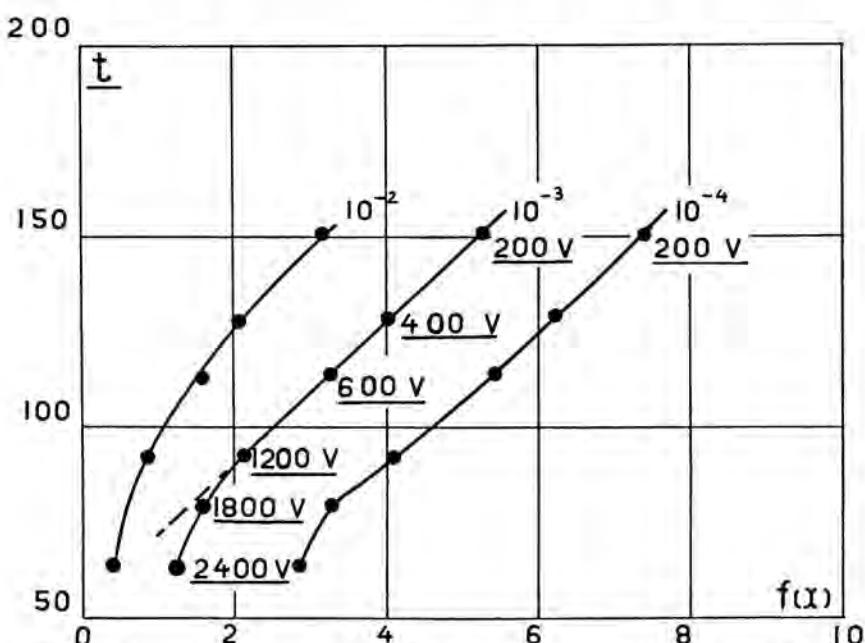


Fig. 4. Ionization by gamma rays in xenon at high pressures by different collecting fields. Testing the constant  $c$  in the formula  $x = c \left( \frac{X}{p} \right)^2$ . Conductivity for high fields.

and we found the conductivity also in nitrogen (4), in helium, in krypton, but till yet not in air and argon. In the graphs we see the ionization currents in xenon directly at pressures of 81.6, 75, 70 and 65 atm. with and without the supplementary ionization of Ra. We see that there is an optimum value of the conductivity in relation to the pressure and the same we found also already in other gases. At first it seemed that it was difficult to reproduce the same value at different moments, but after we found that the influence of temperature is very great, we have seen that by constancy of temperature the values are reproducible within a few

percent. In the graph 6 we see the influence of temperature. This was also found in krypton and in nitrogen already. Our provisial explanation of this conductivity may be that at the high pressures the fields of the atoms come so near to each other that some of the outer electrons are only bounded very loose and the energy of the free electrons gathered in high fields, during their free paths is enough to make a larger number of these electrons free. It would explain that at low pressures the first condition is not fulfilled and at high pressures the second condition cannot be

17.5

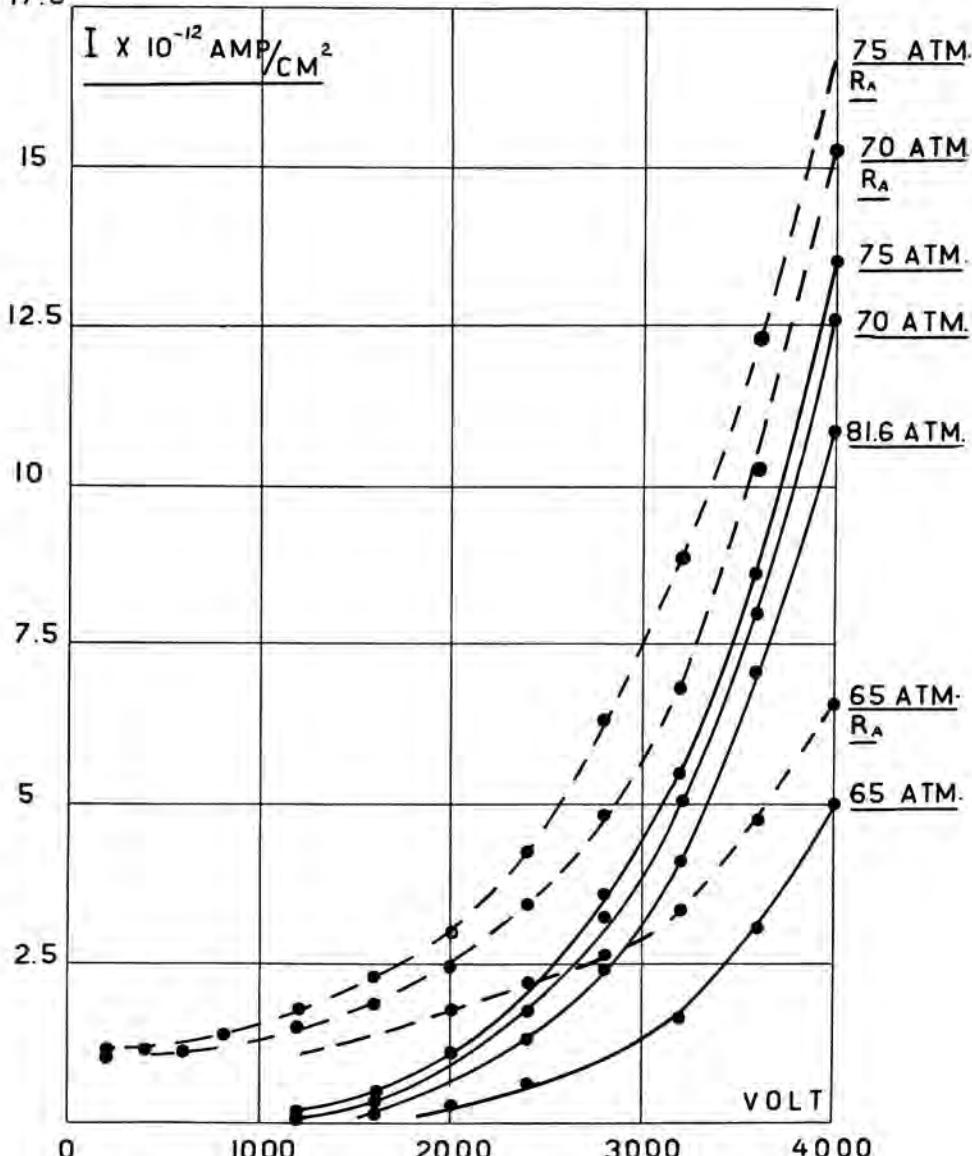


Fig. 5. Conductivity in xenon in different fields at different pressures.

fulfilled. That the conductivity became so high in xenon may be explained because the density we had was more at 81.6 atm. than twice that of water.

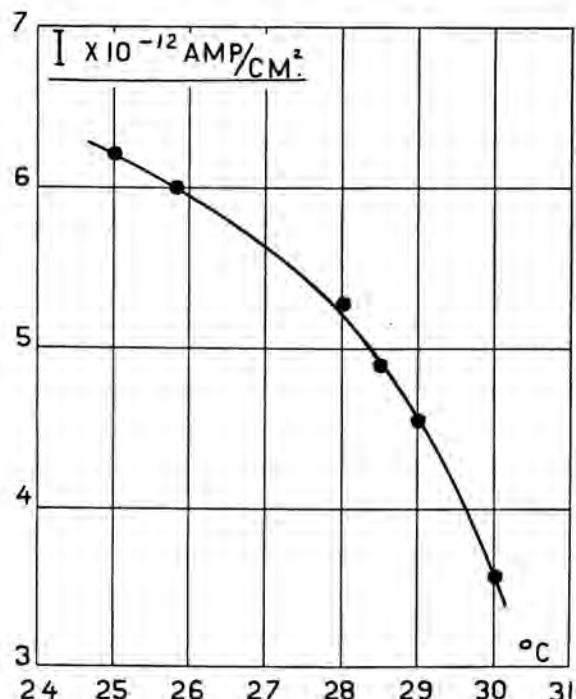


Fig. 6. Influence of the temperature on the conductivity of xenon, pressure of 65 atm. and a field of 3400 Volt/cm.

At 4000 Volt and 75 atm. we got a specific conductivity of  $3.2 \times 10^{-15}$  Amp./Volt at 25° C. We will give the relation to density in xenon in future and we are now following the conductivity for the whole range of pressures below 65 atm. and the influence of temperature. The same is done for other gases. It seems remarkable that we did not find this conductivity till yet in air and argon.

For providing us with the xenon we are highly indebted to the Direction of the PHILIPS Works and especially to Ir. HOLLEMAN and Dr. FILIPPO.

September 15th, 1937.

#### REFERENCES.

1. J. CLAY and G. VAN KLEEF: Physica 4, 651, 1937.
2. H. ZANSTRA: Physica 2, 812, 1935.
3. J. CLAY and M. A. VAN TIJN: Physica 2, 825, 1935.
4. J. CLAY, G. VAN KLEEF and M. A. VAN TIJN: Physica 4, Aug. 1937.

**Mathematics.** — *Sur la méthode de WEYL dans la théorie des nombres.*  
By J. G. VAN DER CORPUT. (Première communication).

(Communicated at the meeting of September 25, 1937.)

### § 1. *L'inégalité fondamentale.*

1. Dans cette communication je déduirai au moyen de la méthode de WEYL quelques résultats utiles pour la théorie analytique des nombres. A la base de cette méthode se trouve l'inégalité de CAUCHY—SCHWARZ. Cette inégalité apprend que, pour tout choix des nombres réels  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ ,

$$(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2).$$

L'inégalité de CAUCHY—SCHWARZ est évidente, car si elle ne se réalisait pas, le discriminant

$$(a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2) - (a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2$$

de l'équation du second degré

$$(a_1 x - b_1)^2 + \dots + (a_n x - b_n)^2 = 0$$

serait négatif, de telle sorte que cette équation aurait deux racines réelles distinctes, ce qui est impossible.

Le cas spécial  $b_1 = \dots = b_n = 1$  donne

$$\left( \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^2 \leq \frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n},$$

c'est-à-dire que le carré de la moyenne arithmétique d'un certain nombre de valeurs réelles est inférieur ou égal à la moyenne arithmétique des carrés de ces mêmes valeurs.

Par applications répétées de cette inégalité, on voit d'abord que la quatrième puissance de la moyenne arithmétique est inférieure ou égale à la moyenne arithmétique des quatrièmes puissances, ensuite plus généralement, que

$$\left( \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^L \leq \frac{a_1^L + \dots + a_n^L}{n}, \quad \dots \quad (1)$$

si  $L$  désigne une puissance positive et entière de 2.<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Il n'est d'aucun intérêt pour la méthode de WEYL que cette inégalité soit valable pour tout  $L \geq 1$ .

De l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ je déduirai la suivante, que j'appelle l'inégalité fondamentale :

*Si A et X sont des nombres naturels tels que A ≥ X, si P est entier et si |u\_x| ≤ 1, alors*

$$A^2 \left| \sum_{x=P+1}^{P+X} u_x \right|^2 \leq 4AX^2 + 4XR \sum_{a=1}^{A-1} (A-a) \sum_{x=P+1}^{P+X-a} u_{x+a} \bar{u}_x,$$

$\bar{w}$  désignant la valeur complexe conjuguée de  $w$ , et  $Rw$  désignant la partie réelle de  $w$ .

Je peux, sans troubler la généralité, supposer  $u_x = 0$  pour  $x > P + X$  et pour  $x \leq P$ , ces valeurs n'apparaissant tout de même pas dans l'inégalité qu'il faut démontrer. Donc

$$A \sum_{x=P+1}^{P+X} u_x = \sum_{x=P+1}^{P+X} u_x \sum_{y=x}^{x+A-1} 1 = \sum_{y=P+1}^{P+X+A-1} \sum_{a=0}^{A-1} u_{y-a},$$

ce qui donne, en vertu de l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ,

$$\begin{aligned} A^2 \left| \sum_{x=P+1}^{P+X} u_x \right|^2 &\leq (X+A-1) \sum_{y=P+1}^{P+X+A-1} \left| \sum_{a=0}^{A-1} u_{y-a} \right|^2 \\ &= (X+A-1) \sum_{y=P+1}^{P+X+A-1} \sum_{h=0}^{A-1} u_{y-h} \sum_{l=0}^{A-1} \bar{u}_{y-l} \\ &= (X+A-1) \sum_{y=P+1}^{P+X+A-1} \left\{ \sum_{h=l} \sum_{h < l} + \sum_{h < l} \sum_{h > l} + \sum_{h > l} \sum_{h < l} \right\}, \end{aligned}$$

où

$$\sum_{h=l} \sum_{h < l} = \sum_{h=0}^{A-1} u_{y-h} \bar{u}_{y-h} = \sum_{h=0}^{A-1} |u_{y-h}|^2 \leq A.$$

Les deux sommes doubles  $\sum_{h < l}$  et  $\sum_{h > l}$  sont conjuguées; leur somme est donc  $2R \sum_{h < l}$ . Par conséquent

$$A^2 \left| \sum_{x=P+1}^{P+X} u_x \right|^2 \leq A(X+A-1)^2 + 2(X+A-1)R \sum_{y=P+1}^{P+X+A-1} \sum_{h=0}^{A-1} \sum_{l=0}^{A-1} u_{y-h} \bar{u}_{y-l}.$$

Les quantités  $u_x$  étant nulles pour  $x > P + X$  et pour  $x \leq P$ , il n'apparaît dans cette somme triple que des termes de la forme  $u_{x+a} \bar{u}_x$ , avec

$$P+1 \leq x \leq P+X, \quad P+1 \leq x+a \leq P+X, \quad 1 \leq a \leq A-1.$$

Chacun de ces termes apparaît exactement  $A-a$  fois, du fait que le système

$$y-h=x+a, \quad y-l=x, \quad 0 \leq h < l \leq A-1$$

a exactement  $A-a$  solutions entières  $(k, l, y)$ . Ces solutions sont

$$h=0, 1, \dots, A-a-1; \quad l=h+a; \quad y=x+h+a.$$

Par conséquent

$$A^2 \left| \sum_{x=P+1}^{P+X} u_x \right|^2 \leq A(X+A-1)^2 + 2(X+A-1)R \sum_{a=1}^{A-1} (A-a) \sum_{x=P+1}^{P+X-a} u_{x+a} \bar{u}_x.$$

Le membre de droite est donc  $\geq 0$ . En multipliant ce membre par le facteur  $\frac{2X}{X+A-1}$ , qui est supérieur à 1, et en l'augmentant ensuite du terme positif  $4AX^2 - 2AX(X+A-1)$ , on obtient l'inégalité fondamentale.

De cette inégalité, il est facile de tirer des autres, que j'appellerai des inégalités fondamentales généralisées et dont je donnerai deux exemples. Ces deux exemples contiennent une fonction  $f(x, y)$  de deux variables  $x$  et  $y$ . Si l'on pose dans le premier exemple  $Y=1$  et  $f(x, y)=f(x)$ , on obtient l'inégalité généralisée à une fonction  $f(x)$  d'une seule variable  $x$ . Les inégalités fondamentales généralisées à une fonction de plus de deux variables sont évidentes, si l'on connaît celles à une fonction de deux variables.

#### Première inégalité fondamentale généralisée.

Soit  $E$  un ensemble de points  $(x, y)$  à coordonnées entières situés dans le rectangle

$$P < x \leq P+X, \quad Q < y \leq Q+Y,$$

$P$  et  $Q$  désignant des nombres entiers,  $X$  et  $Y$  des nombres naturels. Je suppose: si l'ensemble  $E$  contient deux points à une même abscisse, il contient tous les points à coordonnées entières situés entre ces deux points.

Si  $l, A_1, \dots, A_l$  sont des nombres naturels tels que  $A_1 + \dots + A_l \leq X$ , alors, pour toute fonction réelle  $f(x, y)$  définie pour tous les points  $(x, y)$  de  $E$ , on a

$$X^{-1} Y^{-1} \sum_{y=Q+1}^{Q+Y} \left| \sum_{\substack{x \\ (x, y) \text{ dans } E}} e^{2\pi i f(x, y)} \right| \leq 5 \max(A_1^{-\frac{1}{2}}, \dots, A_l^{-\frac{1}{2}}, T^{\frac{1}{2l}}), \quad (2)$$

où<sup>1)</sup>

$$T = X^{-1} Y^{-1} A_1^{-1} \dots A_l^{-1} \sum_{(a)} \left| \sum_{\substack{y \\ (x, y) \text{ dans } E(a)}} \sum_{\substack{x \\ (x, y) \text{ dans } E(a)}} e^{2\pi i f_a(x, y)} \right|; \quad (3)$$

la somme  $\sum_{(a)}$  est étendue à tous les systèmes  $a_1, a_2, \dots, a_l$  de nombres naturels tels que  $a_1 \leq A_1, \dots, a_l \leq A_l$ ; ensuite  $E(a)$  est l'ensemble des points  $(x, y)$  de  $E$  tels que  $(x + a_1 + \dots + a_l, y)$  appartienne également à  $E$ , et finalement

$$f_a(x, y) = \sum_{a_1=0}^{a_1-1} \dots \sum_{a_l=0}^{a_l-1} \Delta_1^l f(x + a_1 + \dots + a_l, y), \quad (4)$$

où  $\Delta_1 \psi(x, y) = \psi(x+1, y) - \psi(x, y)$ .

<sup>1)</sup> Nous désignons par  $\max(A_1, A_2, \dots, A_n)$  le plus grand des nombres  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

Des conditions il suit que pour tout point  $(x, y)$  de  $E_{(a)}$  chaque terme  $\Delta_1^l f(x + a_1 + \dots + a_l, y)$  de la somme en question est défini.

Pour la démonstration j'applique d'abord l'inégalité de CAUCHY - SCHWARZ. Ainsi je trouve que le membre de gauche de (2), élevé au carré, est tout au plus égal à

$$X^{-2} Y^{-1} \sum_{g=Q+1}^{Q+Y} \left| \sum_{\substack{x \\ (x,y) \text{ dans } E}} e^{2\pi i f(x,y)} \right|^2.$$

En vertu de l'inégalité fondamentale non généralisée, cette expression est inférieure à  $4A_1^{-1} + 4|V|$ , où

$$V = X^{-1} Y^{-1} A_1^{-2} \sum_{a_1=1}^{A_1-1} (A_1 - a_1) \sum_{y} \sum_{\substack{x \\ (x,y) \text{ dans } E_{a_1}}} e^{2\pi i (f(x+a_1, y) - f(x, y))},$$

$E_{a_1}$  désignant l'ensemble des points  $(x, y)$  de  $E$  tels que  $(x + a_1, y)$  appartienne à  $E$ . Donc le membre de gauche de (2), élevé au carré, est inférieur à  $\text{Max}(25A_1^{-1}, 5|V|)$ , de sorte que le membre lui-même est inférieur à  $\text{Max}(5A_1^{-1}, \sqrt{5}|V|)$ . En outre

$$|V| \leq X^{-1} Y^{-1} A_1^{-1} \sum_{a_1=1}^{A_1-1} \left| \sum_{y} \sum_{\substack{x \\ (x,y) \text{ dans } E_{a_1}}} e^{2\pi i (f(x+a_1, y) - f(x, y))} \right|.$$

L'inégalité à démontrer est donc déjà vérifiée pour  $l=1$ , car

$$f(x + a_1, y) - f(x, y) = \sum_{a_1=0}^{a_1-1} \Delta_1 f(x + a_1, y).$$

Par conséquent je peux supposer  $l \geq 2$  et admettre que l'inégalité est démontrée pour  $l-1$  au lieu de  $l$ . En vertu de (1) on a donc

$$\begin{aligned} |V|^{2^{l-1}} &\leq X^{-2^{l-1}} Y^{-2^{l-1}} A_1^{-1} \sum_{a_1=0}^{A_1-1} \left| \sum_{y} \sum_{\substack{x \\ (x,y) \text{ dans } E_{a_1}}} e^{2\pi i (f(x+a_1, y) - f(x, y))} \right|^{2^{l-1}} \\ &< A_1^{-1} \sum_{a_1=0}^{A_1-1} 5^{2^{l-1}} \text{Max}(A_2^{-2^{l-2}}, A_3^{-2^{l-3}}, \dots, A_l^{-1}, W_{a_1}) \\ &= 5^{2^{l-1}} \text{Max}(A_2^{-2^{l-2}}, A_3^{-2^{l-3}}, \dots, A_l^{-1}, T), \end{aligned}$$

où

$$W_{a_1} = X^{-1} Y^{-1} A_2^{-1} \dots A_l^{-1} \sum_{a_2=1}^{A_2} \dots \sum_{a_l=0}^{A_l} \left| \sum_{y} \sum_{\substack{x \\ (x,y) \text{ dans } E_{(a)}}} e^{2\pi i f_{(a)}(x, y)} \right|.$$

Donc

$$\sqrt{5} |V|^{\frac{1}{2}} < 5 \text{Max}(A_2^{-\frac{1}{4}}, \dots, A_l^{-\frac{1}{2^l}}, T^{\frac{1}{2^l}}).$$

d'où suit l'inégalité qu'il faut démontrer.

*Deuxième inégalité fondamentale généralisée.*

Soit  $E$  un ensemble de points  $(x, y)$  à coordonnées entières situés dans le rectangle

$$P < x \leq P + X, \quad Q < Y \leq Q + Y,$$

$P$  et  $Q$  désignant des nombres entiers,  $X$  et  $Y$  des nombres naturels. Je suppose: si l'ensemble  $E$  contient deux points ayant une même abscisse ou une même ordonnée, il contient tous les points à coordonnées entières situés entre ces deux points.

Si  $l$  et  $r$  sont entiers  $\geq 0$ ,  $l+r > 0$  et si  $A_1, \dots, A_l$ ,  $B_1, \dots, B_r$  sont des nombres naturels tels que

$$A_1 + \dots + A_l \leq X \quad \text{et} \quad B_1 + \dots + B_r \leq Y,$$

alors, pour toute fonction réelle  $f(x, y)$  définie pour tous les points de  $E$ , on a

$$X^{-1} Y^{-1} \left| \sum_y \sum_x e^{2\pi i f(x, y)} \right| \leq 12 \max(A_1^{-\frac{1}{2}}, \dots, A_l^{-\frac{1}{2}}, B_1^{-\frac{1}{2r}}, \dots, B_r^{-\frac{1}{2r}}, U^{\frac{1}{2r}}),$$

où  $\lambda = 2^l$ ;  $\varrho = 2^r$  et

$$U = X^{-1} Y^{-1} A_1^{-1} \dots A_l^{-1} B_1^{-1} \dots B_r^{-1} \sum_{(a, b)} \left| \sum_y \sum_x e^{2\pi i f(a, b)(x)} \right|;$$

la somme  $\sum_{(a, b)}$  est étendue à tous les systèmes  $a_1, \dots, a_l$ ,  $b_1, \dots, b_r$  de nombres naturels tels que

$$a_1 \leq A_1, \dots, a_l \leq A_l, b_1 \leq B_1, \dots, b_r \leq B_r;$$

ensuite  $E_{(a, b)}$  est l'ensemble des points  $(x, y)$  de  $E$  tels que

$(x + a_1 + \dots + a_l, y)$ ,  $(x, y + b_1 + \dots + b_r)$  et  $(x + a_1 + \dots + a_l, y + b_1 + \dots + b_r)$

appartiennent à  $E$ , et finalement

$$f_{(a, b)}(x, y) = \sum_{a_1=0}^{a_1-1} \dots \sum_{a_l=0}^{a_l-1} \sum_{b_1=0}^{b_1-1} \dots \sum_{b_r=0}^{b_r-1} \Delta_1^l \Delta_2^r f(x + a_1 + \dots + a_l, y + b_1 + \dots + b_r),$$

où

$$\Delta_1 \psi(x, y) = \psi(x+1, y) - \psi(x, y) \quad \text{et} \quad \Delta_2 \psi(x, y) = \psi(x, y+1) - \psi(x, y).$$

Chaque terme  $\Delta_1^l \Delta_2^r f(x + a_1 + \dots + a_l, y + b_1 + \dots + b_r)$  paraissant dans la dernière somme est défini pour tout point  $(x, y)$  de  $E_{(a, b)}$ .

Si  $r = 0$  (donc  $\varrho = 1$  et  $U = T$ ), l'inégalité à démontrer découle immédiatement de la première inégalité fondamentale généralisée. Si  $l = 0$ , il suffit de changer  $l$  et  $r$ ,  $x$  et  $y$ ,  $A$  et  $B$ . Donc je peux supposer

$\ell > 0$  et  $r > 0$ . D'abord j'applique la première inégalité fondamentale généralisée. L'expression  $T$  définie par (3), remplit en vertu de (1) l'inégalité

$$T^{\varrho} \leq X^{-\varrho} Y^{-\varrho} A_1^{-1} \dots A_{\ell}^{-1} \sum_{(a)} \left\{ \sum_{x=p+1}^{p+X} \left| \sum_{\substack{y \\ (x,y) \in E_{(a)}}} e^{2\pi i f_{(a)}(x,y)} \right|^{\varrho} \right\}^{\frac{1}{\varrho}}.$$

La première inégalité fondamentale généralisée, appliquée de nouveau, fournit maintenant

$$\begin{aligned} T^{\varrho} &< 5^{\varrho} A_1^{-1} \dots A_{\ell}^{-1} \sum_{(a)} \operatorname{Max}(B_1^{-\frac{1}{2}\varrho}, \dots, B_{\ell}^{-1}, Z_{(a)}) \\ &= 5^{\varrho} \operatorname{Max}(B_1^{-\frac{1}{2}\varrho}, \dots, B_{\ell}^{-1}, U) \end{aligned}$$

où

$$Z_{(a)} = X^{-1} Y^{-1} B_1^{-1} \dots B_{\ell}^{-1} \sum_{(b)} \left| \sum_{\substack{y \\ (x,y) \text{ dans } E_{(a,b)}}} e^{2\pi i f_{(a,b)}(x,y)} \right|.$$

De ce résultat suit l'inégalité qu'il faut démontrer en vertu de  $5^{1+\frac{1}{\lambda}} \leq 5^{1+\frac{1}{2}} < 12$ .

## § 2. Les sommes de WEYL.

Je donnerai dans ce paragraphe quelques considérations simples sur les sommes de WEYL. Celles-ci sont des sommes de la forme

$$S = \sum_{x=p+1}^{p+X} e^{2\pi i f(x)} ; S' = \sum_{x=p+1}^{p+X} \cos 2\pi f(x) \text{ et } S'' = \sum_{x=p+1}^{p+X} \sin 2\pi f(x),$$

$P$ ,  $X$  et  $f(x)$  représentant respectivement un nombre entier, un nombre naturel, et un polynôme réel. J'appellerai degré d'une somme de WEYL le degré du polynôme correspondant  $f(x)$ . Un problème extrêmement important pour la théorie analytique des nombres est la détermination, pour de grandes valeurs du nombre naturel  $X$ , d'une borne supérieure de la valeur absolue des sommes de WEYL. Ce problème est très simple, si  $f(x)$  est un polynôme linéaire  $\alpha x + \beta$ . Si  $\alpha$  est entier, alors

$$S = X e^{2\pi i \beta} ; S' = X \cos 2\pi \beta \text{ et } S'' = X \sin 2\pi \beta.$$

Si  $\alpha$  n'est pas entier, alors  $S$  est la somme d'une série géométrique limitée, de raison  $e^{2\pi i \alpha} \neq 1$ , donc alors

$$S = e^{2\pi i(P\alpha + \alpha + \beta)} \frac{e^{2\pi i \alpha X} - 1}{e^{2\pi i \alpha} - 1} = \frac{e^{\pi i(\alpha(2P+2X+1)+2\beta)} - e^{\pi i(2Px+\alpha+2\beta)}}{2i \sin \pi \alpha}.$$

Les parties réelles et imaginaires de  $S$  donnent  $S'$  et  $S''$ . Donc, si  $\alpha$  n'est pas entier, chacune des sommes  $S$ ,  $S'$  et  $S''$  est, en valeur absolue,  $\leq |\sin \pi \alpha|^{-1}$ , donc inférieure, en valeur absolue, à un nombre indépendant de  $X$ .

Ce problème est évidemment plus complexe quand le degré de  $f(x)$  est supérieur à 1. Il est pourtant encore élémentaire, quelque soit le degré, dans le cas spécial où tous les coefficients du polynôme  $f(x) - f(0)$  sont rationnels. Nous pouvons en effet, dans ce cas, déterminer un nombre naturel  $N$  tel que tous les coefficients de  $N(f(x) - f(0))$  sont entiers. L'expression  $f(x+N) - f(x)$  a alors une valeur entière pour tout nombre entier  $x$ , de telle sorte que dans chacune des trois sommes de WEYL, le  $x^e$  terme est égal au  $(x+N)^e$ . Si je pose la somme des  $N$  premiers termes de  $S$  égale à  $NA$  ( $A \equiv 1$  donc), alors la somme des  $2N$  termes vaut  $2NA$ , etc. Il vient donc, si  $H$  désigne le plus grand nombre entier tel que  $NH \leq X$ , que

$$S = NHA + \sum_{x=P+NH+1}^{P+X} e^{2\pi i f(x)};$$

la dernière somme est nulle si  $NH = X$ . Donc

$$S - AX = \sum_{x=P+NH+1}^{P+X} (e^{2\pi i f(x)} - A)$$

est, en valeur absolue, inférieur à  $N + AN \leq 2N$ , d'où

$$|S - AX| < 2N; |S' - A'X| < 2N \text{ et } |S'' - A''X| < 2N,$$

si  $A'$  et  $A''$  désignent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de  $A$ .

J'abandonne maintenant ces cas particuliers, et traiterai le problème dans le cas où  $f(x) - f(0)$  est de degré arbitraire et possède au moins un coefficient irrationnel. Il est très facile de démontrer maintenant le célèbre théorème de WEYL<sup>1)</sup>:

*Si le coefficient de la plus haute puissance de  $x$  dans le polynôme  $f(x)$ , de degré  $\geq 1$ , est irrationnel, alors*

$$X^{-1} \sum_{x=P+1}^{P+X} e^{2\pi i f(x)}$$

tend vers zéro, uniformément en  $P$  lorsque  $X$  croît au delà de toute limite.

Ceci a déjà été démontré plus haut pour les sommes du premier degré. Je puis donc supposer maintenant que le degré  $k$  du polynôme  $f(x)$  soit supérieur à 1. Je vais employer la première inégalité fondamentale généralisée avec  $l = k - 1$ , et  $Y = 1$ , la fonction  $f$  ne dépendant que d'une seule variable  $x$ . Soit  $\frac{\beta}{k!}$  le nombre irrationnel, coefficient de la plus haute puissance de  $x$  dans  $f(x)$ . Le polynôme

$$f_{(a)}(x) = \sum_{a_1=0}^{a_1-1} \dots \sum_{a_l=0}^{a_l-1} \Delta_1^l f(x + a_1 + \dots + a_l)$$

<sup>1)</sup> H. WEYL, Ueber die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, Math. Ann. 77 (1916), p. 313--352.

est une fonction linéaire de  $x$ , dont le coefficient de  $x$  est le nombre irrationnel  $a_1 \dots a_l \beta$ . Donc

$$X^{-1} \sum_{x=P+1}^{P+X-a_1-\dots-a_l} e^{2\pi i f(x)} \rightarrow 0$$

pour  $X \rightarrow \infty$ , uniformément en  $P$ . La première inégalité fondamentale généralisée donne donc

$$\limsup_{X \rightarrow \infty} X^{-1} \left| \sum_{x=P+1}^{P+X} e^{2\pi i f(x)} \right| \leq 5 \operatorname{Max}(A_1^{-\frac{1}{2}}, \dots, A_l^{-\frac{1}{2}}).$$

Ceci étant vrai pour tout choix des nombres naturels  $A_1, \dots, A_l$ , le théorème de WEYL est démontré.

Il est simple maintenant de démontrer le théorème suivant, également de M. WEYL:

*Si le polynôme  $f(x) - f(0)$ , de degré  $\geq 1$ , a au moins un coefficient irrationnel, alors*

$$X^{-1} \sum_{x=P+1}^{P+X} e^{2\pi i f(x)}$$

tend vers zéro, uniformément en  $P$ , lorsque  $X$  croît au delà de toute limite.

En effet, il est possible d'écrire  $f(x)$  comme somme  $g(x) + j(x)$  de deux polynômes  $g(x)$  et  $j(x)$ , tels que tous les coefficients de  $j(x) - j(0)$  soient rationnels et que le coefficient de la plus haute puissance de  $x$  dans  $g(x)$  soit irrationnel, le degré de  $g(x)$  étant au moins 1. Il est encore possible de déterminer un nombre naturel  $N$  tel que  $e^{2\pi i j(x)}$  ne change pas de valeur quand on ajoute à  $x$  un multiple de  $N$ . Décomposons alors la somme

$$S = \sum_{x=P+1}^{P+X} e^{2\pi i f(x)}$$

en  $N$  sommes partielles  $S_1, \dots, S_N$ , telles que dans  $S_h$  la variable  $x$  prenne les valeurs

$$P < x \leq P + X, \quad x \equiv h \pmod{N}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} S_h &= \sum_{\frac{P-h}{N} < y \leq \frac{P+X-h}{N}} e^{2\pi i (g(yN+h) + j(yN+h))} \\ &= e^{2\pi i j(h)} \sum_{\frac{P-h}{N} < y \leq \frac{P+X-h}{N}} e^{2\pi i g(yN+h)}. \end{aligned}$$

$g(yN+h)$  est un polynôme en  $y$ , dont le coefficient de la plus haute puissance est irrationnel.  $X^{-1} S_h$ , et par conséquent aussi  $X^{-1} S$ , tendent donc, en vertu du théorème précédent, vers zéro, uniformément en  $P$  quand  $X$  croît indéfiniment.

## Mathematics. — *Ueber Trivektoren. I.* Von R. WEITZENBÖCK.

(Communicated at the meeting of September 25, 1937.)

Die einfachsten projektiven Komitanten einer alternierenden Trilinearform  $a_{ijk}$  führen zu einer Reihe von Formeln, die ich hier in den ersten zwei Paragraphen zusammenstelle. Aus diesen Formeln folgt die schon von G. GOUREWITSCH<sup>1)</sup> festgestellte Reduzierbarkeit gewisser Ausdrücke, die für die projektive Klassifikation von degenerierten Trilinearformen von grundlegender Bedeutung sind.

Vertauscht man die Stufenzahlen  $n$  und drei, so werden die  $\binom{n}{3}$  Tensorkomponenten  $a_{ijk}$  zu ebensovielen ternären Invarianten von  $n$  Punkten; Relationen zwischen den  $a_{ijk}$  gehen über in Syzygien. Es ergibt sich dann hier die Frage nach den hier möglichen Syzygien der Syzygienkette. Ich behandle in den folgenden Paragraphen die Syzygien erster Art und gebe eine Uebersicht über die von zweiter Art. Die entsprechende Aufgabe im binären Gebiete wurde für  $n=5$  von W. H. YOUNG<sup>2)</sup> und für  $n=6$  von mir<sup>3)</sup> gelöst.

### § 1. Identitäten.

Im  $G_n$  ( $n \geq 5$ ) ist ein linearer  $G_{n-3}$ -Komplex  $K$  durch eine lineare Gleichung

$$(\pi' a)^3 = 6 \cdot \sum \pi'_{ijk} a_{ijk} = 0 \quad \dots \quad (1)$$

in Veränderlichen  $\pi'_{ijk}$  dargestellt. Die  $\binom{n}{3}$  Größen  $a_{ijk}$  sind die Koeffizienten einer alternierenden Trilinearform oder die Komponenten eines Trivektors. Der Komplex (1) ist speziell und besteht aus der Gesamtheit aller  $G_{n-3}$ , die eine feste Ebene  $a_{ijk}$  schneiden, wenn die  $a_{ijk}$  die quadratischen  $p$ -Relationen befriedigen. Letztere können dargestellt werden durch die Gleichungen

$$a_{[ikl]} a_{[rl]st} = 0, \quad \dots \quad (2)$$

wobei  $[ ]$  das Alternieren über die eingeklammerten Indizes andeutet. Mit Komplex-Symbolen geschrieben werden diese Gleichungen

$$(a^3 b \dots) b_{ij} = 0 \quad \dots \quad (3a)$$

<sup>1)</sup> „Mémoires“ du Séminaire pour le calcul vectoriel et tensoriel (Institut des Mathématiques à l’Université d’État de Moscou); livraison II—III (1935).

<sup>2)</sup> Atti Torino **34** (1899) S. 596—599.

<sup>3)</sup> Diese Proceedings **30** (1927) S. 219—234.

oder, zusammengefasst in eine Komitante, die für alle Größen  $\pi_{i_1 \dots i_{n-4}}$  und  $u', v'$  Null ist:

$$(a^3 b \pi^{n-4}) (b u') (b v') \equiv 0 \dots \quad . \quad (3b)$$

Nach einem bekannten Satze<sup>1)</sup> lassen sich diese Gleichungen auch so darstellen:

$$(a^3 b^2 \dots) b_i = 0 \dots \quad . \quad (4a)$$

$$(a^3 b^2 \pi^{n-5}) (b u') \equiv 0 \dots \quad . \quad (4b)$$

ersetzen wir  $\pi^{n-4}$  in (3b) durch  $n-4$  Punkte  $x_1, x_2, \dots, x_{n-4}$  und bringen die beiden letzten Reihen  $b$  in den Klammerfaktor<sup>2)</sup>, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} & 4(a^3 b x_1 \dots x_{n-4}) (b u') (b v') \\ & \equiv (a^3 b^2 x_2 \dots x_{n-4}) (x_1 u') (b v') - (a^3 b^2 x_1 x_3 \dots x_{n-4}) (x_2 u') (b v') + \dots \quad \left. \right\} \quad . \quad (5a) \\ & - (a^3 b^2 x_2 \dots x_{n-4}) (b u') (x_1 v') + (a^3 b^2 x_1 x_3 \dots x_{n-4}) (b u') (x_2 v') - \dots \end{aligned}$$

Bei der Komitante (3b) gibt dieselbe Umformung

$$\begin{aligned} & (a^3 b \pi^{n-4}) (b u') (b v') \equiv \\ & \equiv (-1)^{n+1} \cdot \frac{n-4}{4} \cdot \{(a^3 b^2 \pi^{n-5}) (\pi u') (b v') - (a^3 b^2 \pi^{n-5}) (b u') (\pi v')\} \quad \left. \right\} \quad . \quad (5b) \end{aligned}$$

Hieraus liest man ab, dass die Gleichungen (3) und (4) äquivalent sind.

Die Formeln (5) lassen sich leicht verallgemeinern. Sind die Reihen  $a_1, a_2, \dots, a_h$  und  $b_1, b_2, \dots, b_k$  mit  $a$  äquivalent, so kann man von Komitanten  $U_{h,k}$  ausgehen, die einen Klammerfaktor

$$(a^3 a_1^2 a_2^2 \dots a_h^2 b_1 b_2 \dots b_k \pi^{n-3-2h-k})$$

enthalten, wobei

$$h \geq 1, k \geq 1 \text{ und } n-3 \geq 2h+k$$

sein muss. Ausserhalb dieses Klammerfaktors müssen dann noch je eine Reihe  $a_i$  und je zwei Reihen  $b_j$  vorkommen, sodass wir

$$\begin{aligned} U_{h,k} &= (a^3 \dots) (a_1 u'_1) \dots (a_h u'_h) (b_1 v'_1) (b_1 w'_1) \dots (b_k v'_k) (b_k w'_k) = \\ &= \{u'_1, \dots, u'_h; v'_1 w'_1, \dots, v'_k w'_k\} \quad \left. \right\} \quad . \quad (6) \end{aligned}$$

setzen können. Hier trachten wir nun durch Umformung Komitanten

<sup>1)</sup> Vgl. meine „Invariantentheorie“, S. 85.

<sup>2)</sup> Ebenda, S. 79.

vom Typus  $U_{h+1,j}$  zu erzeugen, bei denen also die Zahl  $h$  um eine Einheit grösser ist. Dies kann erreicht werden durch das Hineinziehen von zwei Reihen  $b_i$  in den Klammerfaktor. Nehmen wir hierzu die zwei Reihen  $b_1$  aus  $(b_1 v'_1) (b_1 w'_1)$ , so findet man durch zweimaliges Umformen, wenn wir die durch (6) eingeführte Bezeichnung mit den geschweiften Klammern verwenden:

$$2\{u'_1, \dots, u'_h; v'_1 w'_1, \dots\} = -\{v'_1 u'_2, \dots, u'_h; u'_1 w'_1, \dots\} - \{w'_1 u'_2, \dots, u'_h; v'_1 u'_1, \dots\} - \left. \begin{aligned} &-\{u'_1 v'_1, \dots, u'_h; u'_2 w'_1, \dots\} - \{u'_1 w'_1, \dots, u'_h; v'_1 u'_2, \dots\} \\ &- \dots + \Sigma U_{h+1} \end{aligned} \right\}. \quad (7)$$

wobei  $\Sigma U_{h+1}$  eine Summe von Komitanten andeutet, die allen mit einem Klammerfaktor der Gestalt

$$(a^3 a_1^2 a_2^2 \dots a_{h+1}^2 \dots)$$

beginnen.

Nimmt man in (7) alle  $h$  Reihen  $u'_i$  aneinander gleich, geht also aus von der Komitante

$$U = U_{h,k} = (a^3 a_1^2 \dots a_h^2 b_1 \dots b_k \pi^{n-3-2h-k}) (a_1 u') \dots (a_h u') (b_1 v') (b_1 w') \dots, \quad (8)$$

so entsteht nach (7)

$$\begin{aligned} 2U &= 2\{u', \dots, u'; v' w', \dots\} = \\ &= -h \cdot \{v' u', \dots, u'; u' w', \dots\} - h \cdot \{w' u', \dots, u'; v' u', \dots\} + \Sigma U_{h+1} \end{aligned}$$

oder kürzer

$$2U = -hV - hW + \Sigma U_{h+1}. \quad . . . . \quad (9)$$

Wenden wir (7) auf die Komitante  $V$  an, so entsteht

$$2V = -U - (h-1)V + W + \Sigma U_{h+1};$$

hieraus und aus (9) folgt aber

$$V = W + \Sigma U_{h+1}, \quad \text{also schliesslich:}$$

$$\begin{aligned} U &= \{u', \dots, u'; v' w'\} = -h \cdot \{v' u', \dots, u'; u' w'\} + \Sigma U_{h+1} = \\ &= -h \cdot \{w' u', \dots, u'; v' u'\} + \Sigma U_{h+1}. \end{aligned} \quad (10)$$

Setzen wir hier noch  $v' = u'$ , so entsteht<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} \{u', \dots, u'; u' w'\} &= \\ &= (a^3 a_1^2 \dots a_h^2 b_1 \dots b_k \pi^{n-3-2h-k}) (a_1 u') \dots (a_h u') (b_1 u') (b_1 w') \dots \equiv \Sigma U_{h+1}. \end{aligned} \quad (11)$$

<sup>1)</sup> G. GOUREWITSCH, I.c. Gleichung (15.30) von S. 103.

§ 2. Reduktionsformeln.

Die Komitante  $U_{h,k}$  von (6) ist symmetrisch in den  $h$ -Reihen  $u'_i$ , sie entsteht also durch Polarisieren der Komitante (8), die vom Grade  $h$  in der einen Reihe  $u'$  ist; wir gehen für das Folgende von dieser Komitante (8) aus.

Sei zunächst  $k=1$ . Dann lässt sich Gleichung (10) in kürzerer Form schreiben, wenn wir

$$U_h = (a^3 a_1^2 \dots a_h^2 b \dots) (a_1 u') \dots (a_h u') (bv') (bw') \dots = \langle u^h; v w \rangle$$

setzen. An Stelle von (10) haben wir dann:

$$\langle u^h; v w \rangle \equiv h \cdot \langle u^{h-1} v; w u \rangle \equiv h \cdot \langle u^{h-1} w; uv \rangle \quad (\text{mod } U_{h+1}). \quad (12)$$

Da überdies  $U_h$  bezüglich der beiden Reihen  $v'$  und  $w'$  alternierend ist, sind alle sechs möglichen Ausdrücke (12) mod  $U_{h+1}$  auf einen einzigen zurück zu bringen. Eine Reduktion von  $U_h$  auf Komitanten  $U_{h+1}$  ist daher im Allgemeinen nicht möglich. Dies bedeutet, dass sich ein Klammerfaktor

$$(a^3 a_1^2 \dots a_h^2 b xy \dots z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

im Allgemeinen nicht auf Faktoren vom Typus

$$U_{h+1} = (a^3 a_1^2 \dots a_h^2 b^2 y \dots z)$$

reduzieren lässt. Dies geht nach (12) nur dann, wenn  $v'$  oder  $w'$  gleich  $u'$  sind, wobei dann (11) die Reduktion liefert.

Wenn zweitens  $h=1$  und  $k \geq 2$  ist, haben wir

$$U = (a^3 a_1^2 bc \dots) (a_1 u') (b1') (b2') (c3') (c4') \dots \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

was wir, die Akzente weglassend, kürzer durch

$$U = \langle u; 12, 34 \rangle \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

festhalten. Wenden wir hier Gleichung (12) an, dabei das Paar 12 benützend, so entsteht, wenn wir überall  $\Sigma U_2$  weglassen:

$$U = \langle u; 12, 34 \rangle = \langle 1; 2u, 34 \rangle;$$

hieraus wieder mit Gleichung (12), jetzt aber das Paar 34 gebrauchend:

$$U = \langle 1; 2u, 34 \rangle = \langle 3; 2u, 41 \rangle = \langle 3; u2, 14 \rangle.$$

Gleichung (12) zum drittenmale auf das Paar  $u2$  angewendet gibt:

$$U = \langle 3; u2, 14 \rangle = -\langle u; 32, 14 \rangle \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Ein Vergleich mit (15) zeigt also, dass  $U$  in den Reihen 1 und 3

alternierend ist. Genau so zeigt man, dass  $U$  auch bezüglich der Reihen 2 und 4 alterniert, sodass sich aus (16) ergibt:

$$U = \langle u; 34, 12 \rangle.$$

Da nun aber nach (14)  $U$  alterniert in den Paaren 12 und 34, so folgt  $U = \text{red.}$ , d. h.  $U$  ist reduzierbar auf Komitanten, die mit einem Klammerfaktor

$$(a^3 a_1^2 b^2 \dots)$$

beginnen<sup>1)</sup>.

Jetzt sei drittens  $h \geq 2$  und  $k \geq 2$ , d. h. wir haben

$$U = (a^3 a_1^2 \dots a_h^2 bc \dots) (a_1 u') \dots (a_h u') (b1') (b2') (c3') (c4') \dots \quad (17)$$

was wir wieder kürzer durch

$$U = \langle u^h; 12, 34 \rangle \dots \quad (18)$$

andeuten. Die Umformung (10) kann hier auf eines der Paare 12 oder 34 angewendet werden, wodurch eine der Ziffern 1, 2, 3, 4 durch eine Reihe  $u$  ersetzt wird. So ist z. B.

$$\langle u^h; 12, 34 \rangle = -h \cdot \langle u^{h-1} 1; u2, 34 \rangle = -h \cdot \langle u^{h-2} 2; 1u, 34 \rangle \text{ u. s. w.}$$

Auf die so entstehenden Komitanten, die alle durch  $U$  selbst ausdrückbar sind *modd*  $U_{h+1}$ , kann man weiters die Umformung (7) anwenden, wobei z. B. bei  $\langle u^{h-1} 1; u2, 34 \rangle$  das letzte Indexpaar 34 zu benutzen ist. Wir haben dann nach (7), wenn wir wieder  $\Sigma U_{h+1}$  weglassen:

$$2 \langle u^{h-1} 1; u2, 34 \rangle = -(h-1) \cdot \langle u^{h-2} 13; u2, u4 \rangle - \langle u^{h-1} 3; u2, 14 \rangle - \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} (19)$$

$$-(h-1) \cdot \langle u^{h-2} 14; u2, 3u \rangle - \langle u^{h-1} 4; u2, 31 \rangle. \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$$

Durch alle diese Umformungen entstehen Komitanten, deren allgemeine Gestalt durch

$$Z = \langle u^{h-j} 12 \dots j; u1', u2', \dots, uj', 34, 56, \dots \rangle \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad (20)$$

$$(j = 1, 2, \dots, h)$$

angedeutet werden kann. Die Umformung (7), angewendet auf das Paar  $u1'$  gibt hier

$$2Z = -(h-j)Z - \langle u^{h-j+1} 2 \dots j; 11' \dots \rangle - \langle u^{h-j+1} 13 \dots j; 21' \dots \rangle - \dots$$

$$- \langle u^{h-j} 1' 2 \dots j; u1, \dots \rangle - \langle u^{h-j} 11' 3 \dots j; u2, \dots \rangle - \dots$$

Hier entstehen die letzten  $j$  Terme aus  $Z$  indem wir  $1'$  der Reihe nach

<sup>1)</sup> G. GOUREWITSCH, I.c, S. 77.

mit  $1, 2, \dots, j$  vertauschen; nennen wir diese Terme dann  $Z_1, Z_2, \dots, Z_j$ , so haben wir

$$(h-j+2)Z + Z_1 + Z_2 + \dots + Z_j = -\Sigma \langle u^{h-j+1}, \dots \rangle \quad . \quad (21)$$

Vertauschen wir hier  $1'$  der Reihe nach mit  $1, 2, \dots, j$ , so ergeben sich weitere  $j$  Gleichungen

$$Z + (h-j+2) \cdot Z_1 + Z_2 + \dots + Z_j = -\Sigma_1 \langle u^{h-j+1}, \dots \rangle$$

$$Z + Z_1 + (h-j+2) \cdot Z_2 + \dots + Z_j = -\Sigma_2 \langle u^{h-j+1}, \dots \rangle$$

u. s. f.

Dies gibt mit (21) zusammen  $(j+1)$  lineare Gleichungen für die  $j+1$  Ausdrücke  $Z_i$ . Sie sind auflösbar nach diesen Grössen, da die Koeffizienten-determinante

$$\begin{vmatrix} h-j+2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & h-j+2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & h-j+2 \end{vmatrix} = (h+2)(h-j+1)! \neq 0.$$

Also sind alle  $Z = \langle u^{h-j}, \dots \rangle$  reduzierbar auf  $\langle u^{h-j+1}, \dots \rangle$ , diese wieder auf  $\langle u^{h-j+2}, \dots \rangle$  u.s.f., also schliesslich auf  $\langle u^{h+1}, \dots \rangle$  und  $U$  von (17) der Gestalt

$$U = \langle u^h; 12, 34, \dots, 2k-1, 2k \rangle \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

wobei noch die Ziffern 1 bis  $2k$  beliebig permutiert werden können, was

$$3, 5, 7, \dots, (2k-1) = \frac{(2k)!}{2^k \cdot k!}$$

verschiedene Typen (22) ergibt.

Die eben durchgeführte Umformung ergibt bei der Komitante

$$V_h = \langle 12, \dots, h; u1', u2', \dots, uj', 34, \dots \rangle$$

für den Fall  $h < j$  Reduzierbarkeit auf  $V_{h+1}$  und Komitanten

$$\langle u^h; u1', u2', \dots \rangle,$$

die nach (11) selbst wieder auf  $V_{h+1}$  reduziert werden können, sodass man also in  $V_h$   $h \leqq j$  voraussetzen darf<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> G. GOUREWITSCH, I.c., S. 101, 103.

**History of Science.** — DANIEL GABRIEL FAHRENHEIT, geb. zu Danzig  
24. Mai 1686, gest. im Haag 16. Sept. 1736. Zweite Mitteilung.  
Von ERNST COHEN und W. A. T. COHEN-DE MEESTER. Mit 2  
Abbildungen.

(Communicated at the meeting of September 25, 1937.)

Die folgenden Seiten bilden eine Ergänzung bzw. Erweiterung unserer FAHRENHEIT-Biographie, welche wir vor einiger Zeit<sup>1)</sup> in den Verhandlungen dieser Akademie veröffentlichten. Dieselbe ist möglich geworden infolge neuer Funde in den Archiven zu Danzig und Hannover, welche man den Nachforschungen der Herren F. A. MEYER<sup>2)</sup> in Danzig, Dr. HANS SCHIMANK<sup>3)</sup> in Hamburg sowie denjenigen von Dr. FRIEDRICH KLEMM<sup>4)</sup> in München verdankt.

Als wir in unserer ersten Mitteilung FAHRENHEITS

#### *Jugendjahre*

schilderten, erwähnten wir auch die vier Jahre (1702—1706), welche er (wider seinen Willen) in dem Handelshause der Firma VAN BEUNINGEN in Amsterdam verbrachte sowie die Reisen, welche er später für wissenschaftliche Zwecke unternahm. Gleichzeitig mit unserer Publikation (Mai 1936) veröffentlichte Herr F. A. MEYER die Ergebnisse seiner Forschungen im Danziger Staatsarchiv. Aus diesen ergibt sich, dass der Uebergang vom Geschäft zur Feinmechanikerwerkstatt in sehr romantischer Weise vor sich gegangen ist. Davon zeugt nachstehender Brief, den der Bürgermeister der alten Hansestadt in der dortigen Ratssitzung des 21. Januar 1707 verlesen liess: „Herr Bürgermeister, Woll Edle, Gestrenge, Beste, Hoch- und Wolweise, in sonders Grossgünstige, Hochgeehrte Herren. Wir Endes Benannte, als Bestettigte Vormündern zu des Seeligen DANIEL FAHRENHEIT Unmündigen, haben den einen unmündigen Sohn DANIEL GABRIEL genant, vor etlichen Jahren auss dessen freyen Willen nach Amsterdam auf ein Contor zu dienen verschicket, in Hoffnung, dass er daselbst etwas rechtschaffenes lernen sollte. Es hat sich aber dieser

<sup>1)</sup> Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Afd. Natuurkunde, Eerste Sectie, Deel 16 No. 2, 1936. Auch Chem. Weekblad 33, 374 (1936).

<sup>2)</sup> FRIEDRICH ALBERT MEYER: DANIEL GABRIEL FAHRENHEIT, Aus dem Lebensroman eines grossen Danziger Deutschen. Danzig, A. W. Kafemann, Mei 1936.

<sup>3)</sup> HANS SCHIMANK, 2. Proteusband 1937, S. 21. DANIEL GABRIEL FAHRENHEIT, ein deutscher Vertreter technischer Physik: Auch Rundschau technischer Physik, 23. Sept. 1936, S. 6.

<sup>4)</sup> Forschungen und Fortschritte 12, 330 (1936).

unmündige alda sehr übel verhalten und ist endlich gar mit einer Post Geld durchgegangen, auch in anderen Dingen mehr hat er es so gemacht, dass es nicht ärger seyn können, welches wir aber umb seiner Bruder und Schwestern wegen auszudrucken, Bedenken tragen, indessen haben wir ein Teil von seinem Capital umb ihm zu retten und in standt zu bringen, nolentes volentes angreifen müssen, und ihm de novo wieder bey seinem Patron eingebeten, welches er aber nachgehendt nicht geachtet, sondern wiederumb aufs neue ausgetreten, dass wir also mit nicht geringer Mühe ihn anhere bekommen und allen möglichen Fleiss angewandt denselben zu korrigieren und sein Leben zu bessern. Wir haben aber bey ihm nichts ausrichten können, sondern sind endtlich auf sein anhalten schlüssig geworden, ihn nach Ostindien zu schicken, zu dem Ende wir ihn vor etlichen Wochen nach Amsterdam gesandt und einen gewissen Kaufmann, nahmens JOHANNES VON DROGENHORST und Sohne daselbst Ordre erteilt, ihn bei der Ostindischen Companie auszuhelfen, so auch geschehen, wie aber die Zeit sich einzustellen herbey gekommen, ist er ausgeblieben, und laut eingelauffenen Bericht, daselbst sich wiederumb auf die böse Seite gelegt und dass vorige Leben wieder angefangen. Weil wir dann hieraus nichts anders als sein Verderben und höchstens ruin seiner zeitlichen Wollfahrt verspüren, alss wir Vormünder solche hiemit E. Wohl Edlen und Hochweisen Rath alss Ober Vormündere melden müssen, verhoffend, dass uns E. Wohl Edl. Hochw. Rath mit Obrigkeitlicher Hülffe und Rath werden beystehen, unsere geringe Meinung und Bitte — jedoch wollen wir E. Woll. Edl. Rath nichts verschreiben — ist diese, das wir eine Vollmacht unter dieser Stadt-Insiegel an den obgemeldeten DROGENHORST und Sohn nach Amsterdam geben wollten, umb sothanen unmündigen, wo Er anzutreffen, durch dortige Obrigkeitliche Hülffe mit Arreste belegen, und mit ehesten Gelegenheit nach Ostindien an Orth und stelle befördern zu lassen. Wir stellen alls alhier E. Woll. Edl. Hochw. Rath anheim und suchen hiebey nichts alls nur unseres unmündigen Wolfahrt, wie auch zeitliche und ewige Glückseligkeit..... erwarten hierauf einen vertraulichen Bescheid und verbleiben

Ihro Woll Edlen Gestrengen Herrlichkeit  
Dienstbeflissenste  
BRUNO PLANDER  
BENJAMIN HEDDING  
DANIEL RÜTZMANN  
bestettigte Vormündern  
zu Seel. DANIEL FAHRENHEITS  
unmündigen Sohn DANIEL GABRIEL genannt".

Auf diesem Briefe findet sich folgender Vermerk: „*Lectum in Senatu*  
den 21. Jan. 1707 und will Ehrb. Rath geschehen lassen, dass den Vor-  
mündern eine Vollmacht in supplica erwähnten Zweg aus hiesiger  
Canzley expedieren mögen”.

Was hatte der junge FAHRENHEIT begangen, dass sich seine Vormünder zu solch drakonischem Eingriffe veranlasst sahen? Von den Worten: „Es hat sich aber dieser unmündige alda sehr übel verhalten und ist endlich mit einer Post Geld durchgegangen, auch in anderen Dingen mehr hat er es so gemacht, dass es nicht ärger sein können.....“ und ..... daselbst sich wiederumb auf die böse Seite gelegt und dass vorige Leben wieder angefangen“ lassen nur die über „eine Post Geld“ uns nicht im Zweifel, während die andern sehr weit auseinandergehende Deutungen zulassen. Dass das Durchbrennen mit einer Summe Geldes nicht so ernster Art war, lässt sich der Aeusserung der Vormünder entnehmen, dass FAHRENHEIT zu jener Zeit über ein gewisses Kapital verfügte. Er war also im Stande das Geld zurückzuzahlen. Wir erfahren nicht, zu welchen Zwecken jene Summe verwendet wurde und ebensowenig, welcher Art die Verbrechen ihres Mündels waren. Ist es nicht möglich, dass der junge Kommis, der sich seit Jahren nach dem Studium der Naturwissenschaften gesehnt hatte und der um jene Zeit seine Reisen durch Europa anfing, jenes Geld zur Stärkung seiner Reisekasse verwendet hat, da er ja wusste, dass er im stande war, es später aus eignen Mitteln zurückzuzahlen? Und sind die Verbrechen, welche in dem Briefe seiner Vormünder nicht näher genannt werden, vielleicht nichts anderes gewesen, als dass er wider ihren Willen das Geschäft verlassen hatte, um seiner Lust zum Studieren und zum Reisen nachzugeben?

Glücklicherweise ist es zu seiner Verhaftung in Amsterdam und einer Deportation nach Holländisch Ostindien nicht gekommen. Dass FAHRENHEIT zu jener Zeit einen sehr beweglichen Geist besass, davon zeugen seine

### *Wanderjahre*

(1707—1727), über welche man in unserer ersten Mitteilung nähere Einzelheiten findet.

Auch seine Briefe aus jenen Jahren an GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646—1716), welche noch heute in dem LEIBNIZ-Archiv der „Vormals Königliche und Provinzial-Bibliothek“ in Hannover vorhanden sind, und auf welche die Herren Dr. KLEMM und Dr. SCHIMANK zuerst die Aufmerksamkeit lenkten, zeigen, dass er damals noch nach Problemen suchte. Es sollten noch zehn Jahre vergehen, bevor er zur Ruhe kam und sich in Amsterdam als Feinmechaniker niederliess. Auch fand er dort, wie wir in unserer ersten Mitteilung erörterten, die Gelegenheit, Vorträge über Physik und Chemie zu halten. Die drei Briefe, welche im LEIBNIZ-Archiv aufgefunden wurden, geben uns einen interessanten Blick auf sein Tun und Lassen während der Jahre 1715 und 1716. Herr Dr. O. H. MAY, der Direktor der obengenannten Bibliothek in Hannover, war so liebenswürdig, Photokopien der betreffenden Briefe für uns herstellenzulassen. Auch an dieser Stelle sei ihm dafür unser Dank gesagt.

Der erste Brief (vom 5. März 1715) ist in Leipzig geschrieben; der zweite wurde, wie sich aus dem Inhalt ergibt, etwa sechs Wochen später abgefasst; das Datum selbst ist nicht auf dem Briefe vermerkt. Der dritte, aus Dresden, wurde im Juni 1716 geschrieben. Aufmerksames Studium dieser Korrespondenz liefert uns, wie bereits betont, manchen Beitrag zur Kenntnis von FAHRENHEITS res gestae während jener Tage.



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ  
(1646—1716).

Sehnliches Verlangen bey mir entdecket, einen so sehr berühmten Mann selbst zu kennen. Obwohl nun dieses Wunsches noch nicht habe können theilhaftig werden, so habe ich doch nicht unterlassen können, durch gegenwärtiges nicht nur S<sup>r</sup> Excellence hochgeschätzte Bekanntschaft zu suchen, sondern mir auch dero hoherlauchtetes Judicium über einer von mir inventirten und verfertigten Machine, wodurch man nach meiner geringen Meinung die Longitudinem zur See würde können erlangen demütgst aus zu bitten".

Es folgt nunmehr eine ausführliche Beschreibung der von FAHRENHEIT konstruierten „Quecksilber-Uhr“, nebst einer Skizze des Instruments. Da es bei einem Projekt geblieben ist, wollen wir uns nicht weiter bei diesem Punkte aufhalten und nur darauf hinweisen, dass sich aus diesem Briefe gleichfalls ergibt, dass FAHRENHEIT bereits im Jahre 1714 bei Prof. CHRISTIAN WOLFF in Halle<sup>1)</sup> um Rat in der nämlichen Angelegenheit gefragt hatte.

Der erste Brief schliesst mit den Worten: „Dieses ist also dasjenige welches ich vor meiner Abreyse, die innerhalb 10 Tagen mit Gottes Hulfe nach Engeland anzutreten gedencke, ohne Zurückhaltung einiger nöthigen Umbständen von dieser Machine S<sup>r</sup> Excellence zu communiciren vor gut geurtheilet habe gehorsambst ersuchende diese meine Kühnheit nicht ubel aufzunehmen, nebst angehängter schuldigster und demütgigster Bitte, dass

<sup>1)</sup> Vergl. unsere erste Mitteilung, Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Afdeeling Natuurkunde. Eerste Sectie, Deel 16, No. 2 (1936), Seite 7, Fussnote 5.

S<sup>r</sup> Excellence mir dero hocherlauchtes Sentiment zu eroffnen wollen geruhet diese Machine nemlich das verlangte würde prestiren konnen, und ob Selbige noch zu grösserer Perfection zu bringen wäre. Ich werde mich vor solcher hochgeschatzten Freundschaft jederzeit S<sup>r</sup> Excellence höchstens verbunden zu seyn erachten alle Schuldigste und Bereitwilligste Dienste so oft Solche von S<sup>r</sup> Excellence verlanget werden zu erzeigen, und damit belegt zu werden jederzeit vor eine Sonderliche Ehre werde schätzen. Der ich übrigens nebst Empfehlung Göttlicher Obhutt jederzeit mit tiefstem respect verharre

Hoch-Edler, Frey und Wolgebohrener Herr  
Dero dienstschuldigster und  
gehorsamster Diener

*Leipzig, d. 5 Martis 1715.*

DANIEL GABRIEL FAHRENHEIT.

P. S. S<sup>r</sup> Excellence zu ersuchen hiervon an Niemanden etwas zu gedencken, und nicht notig seijn in dem ich die Zuversicht haben dass Dero generosité solches nicht zulassen werde....."<sup>1)</sup>.

Die Antwort von LEIBNIZ an FAHRENHEIT auf diesen Brief ist nicht bekannt. Es findet sich indes auf FAHRENHEITS Schreiben folgende Bemerkung von LEIBNIZ : „Mein Raht ist, dass man die Sache mehr untersuche, denn die Commissarii, so das gross Britannische Parlament gesetzt, wollen nicht blosse vorschläge, sondern aussgemachte Sachen haben“.

Aus dieser Bemerkung schliesst KLEMM <sup>2)</sup>, dass die Untersuchungen FAHRENHEITS über die „Quecksilber-Uhr“ sich auf die Preisaufgabe beziehen, welche 1714 von dem Englischen Parlament gestellt war für das Konstruieren einer „See-Uhr“ mit deren Hilfe man die Länge auf dem Meere mindestens bis zu 1° genau bestimmen könne.

Als LEIBNIZ nach sechs Wochen nichts von sich hatte hören lassen, schrieb FAHRENHEIT ihm einen zweiten Brief, in welchem er nochmals die Konstruktion seiner Uhr auseinandersetzte.

Aus einem Briefe von CHR. WOLFF in Halle (28. Juli 1716), welcher von SCHIMANK (wie er uns am 15. Juni 1937 freundlichst mitteilte) im LEIBNIZ-Archiv gefunden wurde, ergibt sich, dass LEIBNIZ in Halle Erkundigungen über FAHRENHEIT eingezogen hatte, bevor er dessen Schreiben vom 5. März 1715 beantwortete. Da letzterer in jenem Briefe an LEIBNIZ den Namen WOLFFs genannt hatte, lag es wohl auf der Hand, dass der vorsichtige Philosoph sich an WOLFF wandte. In dessen Antwort lesen

<sup>1)</sup>) Hier folgt noch eine kurze Mitteilung über FAHRENHEITS Absicht, zu untersuchen, ob die Ausströmungszeit verschiedener Flüssigkeiten aus dem nämlichen Rohr eine verschiedene ist. Es liegt die Möglichkeit vor, dass die Geheimhaltung, von welcher FAHRENHEIT redet, sich auf diese Untersuchung bezieht. Indes erscheint es uns, im Zusammenhang mit der Preisaufgabe des Englischen Parlaments, von welcher noch die Rede sein wird, auf der Hand liegend, dass FAHRENHEIT die Untersuchungen über seine „Quecksilber-Uhr“ vorläufig geheimhalten wollte.

<sup>2)</sup>) FR. KLEMM, Forschungen und Fortschritte 12, 330 (1936), speziell S. 332.

wir: „Fahrenheitius Lipsia commoratur..... Scripsit etiam aliquot ante menses ad me, significans se in perpetuo mobili adornando insegnes pro-



## CHRISTIAN WOLFF (1679—1754).

hactenus desudavit. Sed Mathematum parum admodum peritus casu plus, quam meditationi tribuit in inveniendo", d.h. in freier Uebersetzung: „FAHRENHEIT war in Leipzig..... Er schrieb mir auch vor einigen Monaten, dass er grosse Fortschritte beim Anfertigen eines perpetuum mobile gemacht habe. Es blieb aber noch übrig, das Gleichgewicht, durch welches die Maschine zur Ruhe gebracht wurde, aufzuheben. Und falls ich die Sache näher betrachten wolle und mit ihm zusammen versuchen diesen Fehler auszuschalten, so würde er mich besuchen und die Maschine mitbringen. Ich antwortete ihm, dass das Aufheben des Fehlers dem Ausarbeiten eines völlig neuen Planes gleich käme, und dass ich an den Erfolg zweifele. Falls er dennoch nach Halle kommen wolle, würde mich dies sehr freuen und ich würde ihm dann meine Auffassung unumwunden mitteilen. Ich hörte aber weiter nichts von ihm. Er hat sich sehr loblich bisher für die Anfertigung von Thermometern und Barometern viel Mühe gegeben; er ist aber noch zu wenig in den mathematischen Wissenschaften bewandert und lässt beim Erfinden mehr den Zufall als die Ueberlegung walten".

Nachdem LEIBNIZ diese Auskunft erhalten hatte, beantwortete er FAHRENHEITS ersten und zweiten Brief.

Das ergibt sich aus dessen drittem Schreiben (Dresden, Juni 1716), welches uns auch einen Einblick gestattet in die finanziellen Schwierigkeiten, gegen welche FAHRENHEIT zu kämpfen hatte. „Es ist nun schon eine geraume Zeit verflossen, da ich die Ehre gehabt von S<sup>r</sup> Excellence eine genädige Antwort auf mein abgelassenes Schreiben Zu empfangen. Ich habe mit grossem Vergnügen die Dubia welche S<sup>r</sup> Excellence

wieder meine Queck-Silber-Uhr gefasst, und welche S<sup>e</sup> Excellence mir gütigst Zu communicieren geruhen wollen vernommen, und weile dieselben von grosser Wichtigkeit sind, so Bin schon auf Mittel bedacht gewesen, umb solche so viel in meinem geringen Vermögen sich befindet, durch unterschiedene dazu concipirte Experimenta auss dem Wege zu räumen, wan mir nicht eine andere mühsame Arbeit und welche ich mich mit allen Kraften Zum Stande zu bringen vorgenommen hatte; daran ware hinderlich gewesen, in welcher ich dem Hochsten sey gedanckt in soweit reussiret, dass ich einen tubulum catoptricum Newtonianum dessen Focus von  $\frac{1}{2}$  Schu Reinlandisch ist Zuttage gebracht, welcher nach meinem Düncken einen 3 bis 4 Schuh-<sup>1)</sup> tubo Dioptrico gleich thut."

In seine „See-Uhr“ vertieft sich unser Erfinder in diesem Briefe nicht mehr: er ist ganz erfüllt von seinem Spiegelteleskop, dessen Konstruktion ihm keine Zeit gelassen hat, LEIBNIZ' Bedenken zu beantworten. Dabei haben nicht allein „die vielen unvermuhteten Obstacula welche sich in der Arbeit gefunden eine Rolle gespielt“, sondern gleichfalls „der oftermahlige Mangel des Geldes um solche auss dem Wege zu räumen“.

Diesen Geldmangel betont er in seinem Schreiben unaufhörlich, wie auch folgender Passus zeigt, in welchem er LEIBNIZ bittet, ihm zu einer Position zu verhelfen, welche ihn in stand setzen würde, seine Untersuchungen ungestört fortzusetzen. „Ich habe Zwar noch unterschiedene Gedancken gehegt, die Optique<sup>2)</sup> nach meinem geringen Vermögen zu verbessern, allein der Mangel des Nötiesten hat mich Bis itzo allezeit davon abgehalten. Nachdem es mir demnach noch gar zu schwer gefallen solche kostbare Experimenta zu untersuchen, so habe Zwar gewünschet, dass durch recommendation eines grossen Patroni irgendwo ein employ erhalten möchte, indem aber oftermahlen bey Hofe (wie Solches E<sup>r</sup> Excellence wol bekand seyn wird) wenig von Denen Ministris gefunden werden, welche recht von Solchen Sachen zu urtheilen wissen, oder wan ja jemand da, welcher davon zu judiciren weiss, doch interessiret ist, wie ich dan solches an hiesigen Hofe befunden, als Bin ich dadurch abgehalten worden, mich sonderlich alhier umb etwas zu Bemühen, zumahlen da auch wegen des Langwierigen Krieges die Bezahlung ziemlich unrichtig fält, wie Solches von unterschiedenen welchen hiesiger Staat bekand ist vernommen habe. Meine eintzige Zuflucht ist demnach zu E<sup>r</sup> Excellence Hohe Genade, als welche ich desto freijer zu suchen mich erkühnen kan, da nicht nur in E<sup>r</sup> Excellence Hoher Persohn die volkommenste Notitie aller Wissenschaften sich Befindet, sondern auch weile H. Doctor HANSCHIUS<sup>3)</sup> mir in einem Briefe vor etlichen Wochen E<sup>r</sup> Excellence

<sup>1)</sup> Unleserlich.

<sup>2)</sup> Des Teleskops.

<sup>3)</sup> MICHAEL GOTTLIEB HANSCH. In dem „Biographisch Literarischen Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften von J. C. POGGENDORFF, 1, 1013 (1863) findet man über HANSCH folgende Mitteilung: „Geb. 22. Sept. 1683 in Müggenhahl bei Danzig, gest. nach 1752, vermutlich Wien. Magister Phil. und Dr. Theol., Literat.“

hohe und von mir unmeritirte Genade versichert hat nebst Vermelden,  
dass E<sup>re</sup> Excellence Zu wissen verlangte Zu was vor einem Dienste ich  
incliniren möchte. Ich bedanke mich demnach in aller Submission vor  
Solche hohe Affection und wünschte dass ein solcher Dienst ware beij  
welchen durch vieles Schreiben oder andern vielen Affairen nicht sonder-  
lich von meiner neu Begierigen Arbeit abgehalten würde. Solte es aber  
auch geschehen können, dass Sonsten mit einer gewissen jahrlichen  
Pension Begnadiget konte werden, ohne andere Affairen dabeij zu ver-  
stalten, würde mir Solches wol etwass angenehmer seijn, weile ich dadurch  
freije hande haben würde Zu allen Zeiten meine Arbeit fortzusetzen,  
jedoch stelle alles E<sup>rer</sup> Excellence Hohes Guts Befinden und Genade  
anheim, ja wan ich gleich nichts Bekäme, so wünschte ich doch an Solchen  
Ort Zu leben wo ein so vortrefflicher Man Seinen Sitz hat. Schliesslich  
bitte dass E<sup>re</sup> Excellence nicht ungnadig nehmen wolle, dass alhier so  
freij meine Gedanken eröffnet habe, oder dass E<sup>re</sup> Excellence mit einem  
so gar weitlaufigen Briefe molestire. Der sich ubrigens mit aller Veneration  
alleseit verharren werde".

LEIBNIZ' Tod (16. Nov. 1716), nur wenige Monate nachdem derselbe diesen Brief erhalten hatte, entzog FAHRENHEITS Hoffnung auf Hilfe von dieser Seite den Boden. Anfang des Jahres 1717 befindet er sich wieder in Amsterdam, wo er sich, (vergl. unsere erste Mitteilung) ständig niederliess.

Seine „Sturm- und Drangperiode“ nimmt damit ihr Ende, sein Geist, sein Leben, bewegt sich von nun an in einer ruhigeren Bahn.

*Utrecht, August 1937.*

### *van 't Hoff-Laboratorium.*

welcher Mathematik, Philosophie, Chemie und Anatomie kultivierte und sich abwechselnd in Leipzig (wo er 1710—1711 Vorlesungen hielt), Dresden, Prag, Wien, Frankfurt a/M u. a. O. aufhielt". Er gab u. A. einen Teil von KEPLERS Werken heraus.

**Mathematics.** — *Ueber die CARSONSCHE Integralgleichung.* Von H. BREMEKAMP. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of September 25, 1937.)

## 1. Die Integralgleichung

$$f(z) = \int_0^z e^{-uz} h(u) du. \quad . . . . . \quad (1)$$

spielt eine wichtige Rolle in CARSONS Theorie der HEAVISIDESchen Oper-

torenrechnung<sup>1)</sup>. Ich behandle hier einige Sätze über genügende Bedingungen, unter welchen die Funktion  $h(u)$  durch (1) eindeutig bestimmt ist, und unter welchen eine Lösung von (1) überhaupt möglich ist. Diese Fragen, obwohl für die Theorie von fundamenteller Bedeutung, sind von CARSON völlig unerörtert gelassen worden. Die Gleichung (1) scheint für den CARSONSchen Zweck mehr geeignet als die Gleichung

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-uz} h(u) du, \dots \quad (2)$$

die unter Umständen leichter zu hantieren ist<sup>2)</sup> und auch wohl eingehender untersucht worden ist. Die Existenz- und Eindeutigkeitssätze und die Beweise derselben sind für beide Gleichungen etwas verschieden.

Man muss bei jedem Satze angeben, für welche Werte von  $z$  die betreffende Lösung der Gleichung genügen soll. Die Eindeutigkeitssätze sind interessanter, je nachdem die Menge dieser Werte kleiner ist, die Existenzsätze, je nachdem sie umfassender ist.

2. Ich zeige zuerst, dass es unter der Bedingung, dass  $h(u)$  stetig ist, nicht zwei verschiedene Lösungen geben kann, die der Gleichung (1) für jedes positive ganzzahlige  $z$  genügen.

Gäbe es zwei stetige Funktionen  $h_1(u)$  und  $h_2(u)$ , welche beide (1) genügen, so gälte mit  $h_1(u) - h_2(u) = g(u)$

$$\int_0^{\infty} e^{-uz} g(u) du = 0, \dots \quad (3)$$

Wäre  $g(u)$  nicht überall Null, so gäbe es sicherlich entweder ein Intervall, wo diese Funktion überall positiv oder ein solches, wo sie überall negativ ist. Beides führt zu einem Widerspruch. Sei  $g(u)$  positiv für  $a < u < b$ . Aus (3) folgt

$$\int_0^1 t^{z-1} \varphi(t) dt = 0, \dots \quad (4)$$

wo  $\varphi(t) = g\left(\lg \frac{1}{t}\right)$  eine im Intervalle 0—1 stetige Funktion darstellt, welche in einem Teilintervalle  $\alpha—\beta$  positiv ist.

<sup>1)</sup> Siehe z.B. B. VAN DER POL. On the operational solution of linear differential equations and an investigation of the properties of these solutions. Phil. Mag. VIII (1929).

<sup>2)</sup> Siehe G. DOETSCH. Ein allgemeines Prinzip der asymptotischen Entwicklung. Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 167 (1932) insbesondere das Kapitel: Exkurs über die LAPLACE-Transformation.

Nun ist  $1 + \frac{(\beta - t)(t - a)}{M} > 1$  für  $a < t < \beta$ .

$$0 < 1 + \frac{(\beta - t)(t - a)}{M} < 1 \text{ für } 0 < t < a \text{ und für } \beta < t < 1.$$

wenn  $M$  die grössere der beiden Zahlen  $\alpha\beta$  und  $(1-\alpha)(1-\beta)$  bezeichnet. Im erstgenannten Teilintervalle wächst also

$$\left\{ 1 + \frac{(\beta - t)(t - \alpha)}{M} \right\}^m$$

mit  $m$  über alle Grenzen, im übrigen Teile des Intervallses 0—1 konvergiert dieser Ausdruck gegen Null. Man kann daher die ganze Zahl  $m$  so wählen, dass

$$\int_a^b \left\{ 1 + \frac{(\beta - t)(t - a)}{M} \right\}^m \varphi(t) dt$$

positiv ist, im Widerspruch damit, dass wegen (3)  $\int_0^1 t^{s-1} \varphi(t) dt$  für jedes

ganzzahlige positive  $z$  Null ist<sup>1)</sup>). Man sieht leicht ein, dass man im Vorstehenden die Bedingung  $h(u)$  ist stetig durch  $h(u)$  genügt den DIRICHLETSchen Bedingungen ersetzen kann.

Dieser Satz gilt nicht für die Gleichung (2). Dabei würde man statt der Gleichung (4) finden

$$\int_0^\infty t^{z-1} \varphi(t) dt = 0. \quad \dots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Und man sieht leicht ein, dass die weiteren Schlüsse für diese Gleichung nicht zutreffen. Das von STIELTIES gegebene Beispiel

$$\varphi(t) = \sin \sqrt[4]{t} e^{-\sqrt[4]{t}}$$

zeigt, dass es wohl Funktionen gibt, die der Gleichung (5) für jedes ganze positive  $z$  genügen.

3. Unter anderen Bedingungen kann man die Eindeutigkeit der Lösung von (1) mit Hilfe des bekannten BROMWICHintegrals beweisen. Es sei  $f(z)$  eine in der komplexen Halbebene  $x > c$  analytische Funktion, derart, dass das Integral

$$\int_{-\infty}^{c+i\infty} e^{uz} f(z) dz \quad . \quad (6)$$

<sup>1)</sup> Diese einfache Beweismethode ist auch geeignet, um einen etwas allgemeineren Satz von LERCH (*Acta Math.* 27, 1903) zu beweisen.

für jedes positive  $v$  konvergiert. Von der Funktion  $h(u)$  wird verlangt, dass sie der Gleichung (1) für jedes  $z$  in der genannten Halbebene genügt.

Wenn es eine solche Funktion  $h(u)$  gibt, kann man (1) in (6) einsetzen und erhält

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{uz} f(z) dz = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{uz} dz \int_0^\infty e^{-uz} h(u) du.$$

Setzen wir hierin  $z = c + iy$ ,  $e^{-cu} h(u) = g(u)$  so geht die rechte Seite über in

$$ie^{cv} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_0^\infty e^{iy(v-u)} g(u) du.$$

d.i., wegen des FOURIER-Satzes  $2\pi i e^{cv} g(v) = 2\pi i h(v)$ . Wenn es eine Funktion  $h(u)$  gibt, welche (1) genügt, so ist sie also durch

$$h(v) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{uz} f(z) dz \quad . . . . . \quad (7)$$

gegeben. Man bemerke, dass wegen des CAUCHYSchen Satzes der Wert des Integrals (6) sich nicht ändert, wenn man  $c$  durch eine grössere Zahl ersetzt. Ganz ähnlich zeigt man, dass dieser Satz auch für die Gleichung (2) gilt.

4. Zu Unrecht wird diese Rechnung in der Literatur oft als Existenzbeweis für die Funktion  $h(v)$  betrachtet<sup>1)</sup>. Der Existenzbeweis wird erst erbracht sein, wenn gezeigt ist, dass (7) tatsächlich der Gleichung (1) genügt. Wir führen den Beweis unter folgenden Voraussetzungen.

1. Die Gleichung (1) gilt für  $R(z) > c$ , wo  $c$  so zu wählen ist, dass alle Singularitäten der gegebenen Funktion  $f(z)$  links von der Geraden  $x = c$  liegen,

2.  $f(z) \rightarrow 0$  für  $z \rightarrow \infty$  mit positiven Realteil,

3. es konvergiere  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(c+iy)| dy$ .

Es ist also zu beweisen

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty e^{-uz} du \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{uv} f(v) dv \quad . . . . . \quad (8)$$

<sup>1)</sup> Siehe z.B. March Bulletin of the Am. Math. Soc. 33 (1927).

Wir vertauschen die Integrationsfolge. Das ist gestattet, weil wegen der gemachten Voraussetzungen die beiden Integrale

$$\int_0^{\infty} e^{-u(z-v)} du \text{ und } \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{uv} f(v) dv$$

absolut konvergent sind, das erste weil der Realteil von  $z-v$  positiv ist, das zweite wegen

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} |e^{uv} f(v)| |dv| = e^{cu} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(c+iy)| dy.$$

Also

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} e^{-zu} du \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{uv} f(v) dv = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(v) dv \int_0^{\infty} e^{-u(z-v)} du = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{f(v)}{z-v} dv.$$

Das letzte Integral ergänzen wir zu einem Konturintegral, indem wir den Integrationsweg durch einen in die rechte Halbebene fallenden unendlich grossen Halbkreis abschliessen. Weil das Integral längs des Halbkreises den Wert Null hat, und im Innern des so geformten Konturs keine Singularität des Integranden liegt, ausser  $z=v$ , so gilt nach dem CAUCHYSchen Satze

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{f(v)}{z-v} dv = f(z),$$

was nach (8) zu beweisen war.

Das BROMWICHintegral genügt auch der Gleichung (2). Das kommt ja auf den MELLINSchen Umkehrsatz<sup>1)</sup> hinaus.

5. Wir sind jetzt imstande, wenn  $f(z)$  den Bedingungen des letzten Satzes genügt, die Eindeutigkeit der Lösung von (1) (und ebenso von (2)) zu beweisen, wenn von der Funktion  $h(u)$  nur verlangt wird, dass

<sup>1)</sup> H.J. MELLIN, Ueber den Zusammenhang zwischen den linearen Differential- und Differenzengleichungen. Acta Math. Bd. 25 (1902). Vgl. auch H. HAMBURGER, Ueber die RIEMANNSche Funktionalgleichung der  $\xi$ -Funktion. Math. Zeitschrift Bd. 10 (1921).

Die Formeln (1) und (7) kommen mit etwas anderen Bezeichnungen auch vor in einer Arbeit von H. HAMBURGER, Ueber eine RIEMANNSche Formel aus der Theorie der DIRICHLETSchen Reihen. Math. Zeitschrift Bd. 6 (1920), wo einerseits den Funktionen weniger schwere Bedingungen auferlegt werden als im Obenstehenden, andererseits aber, entsprechend dem Zweck der Arbeit, die Existenz der Funktion  $h(u)$  von vornherein postuliert wird.

sie der Gleichung genügt auf irgend eine Strecke  $\alpha \beta$  der Halbebene  $x > c$  und außerdem dass, wenn  $a_1$  der Realteil des meist links gelegenen der Punkte  $\alpha$  und  $\beta$  ist, das Integral  $\int_0^\infty e^{-a_1 u} |h(u)| du$  konvergiert.

Die durch (5) definierte Funktion  $h$  genügt diesen Bedingungen. Gäbe es noch eine zweite derartige Funktion  $h_1(u)$ , so gälte mit  $g(u) = h(u) - h_1(u)$ :

$$\int_0^\infty e^{-uz} g(u) du = 0$$

für jedes  $z$  auf der Strecke  $\alpha \beta$ , und

$$\int_0^\infty e^{-a_1 u} |g(u)| du$$

konvergiert. Nun ist für jedes  $z$  in der Halbebene  $x > a_1$

$$\left| \int_0^\infty e^{-uz} g(u) du \right| < \int_0^\infty e^{-ua_1} |g(u)| du,$$

also das Integral  $\int_0^\infty e^{-uz} g(u) du$  in der ganzen Halbebene uniform konvergent. Es stellt daher in dieser Halbebene eine analytische Funktion dar; dieselbe ist aber gleich Null auf der Strecke  $\alpha \beta$ , somit in der ganzen Halbebene gleich Null. Hieraus folgt unter Anwendung des in 3 bewiesenen, dass in der ganzen Halbebene  $g(u) = 0$ , also auch auf der Strecke  $\alpha \beta$ .  $h_1(u) = h(u)$ .

Die Sätze der §§ 2—4 sind kurz vorgetragen worden auf dem Osloer Kongresse 1936, und ohne die Beweise in die Comptes Rendus dieses Kongresses aufgenommen worden.

**Mathematics.** — *On the differential geometry of contact transformations.* By HWA-CHUNG LEE. (Communicated by Prof. J. A. SCHOUTEN).

(Communicated at the meeting of September 25, 1937.)

### 1. Introduction.

In two papers of these Proceedings SCHOUTEN<sup>1)</sup> has shown that a doubly homogeneous contact transformation in the  $2n+2$  variables  $x^{\lambda}$ ,  $p_{\lambda}$  ( $\lambda, \lambda' = 0, 1, \dots, n$ ):

$$x^{\lambda'} = x^{\lambda'}(x^{\lambda}, p_{\lambda}), \quad p_{\lambda'} = p_{\lambda'}(x^{\lambda}, p_{\lambda}), \quad \dots \quad (1)$$

where  $x^{\lambda'}$  and  $p_{\lambda'}$  are homogeneous functions of degrees  $(1, 0)$  and  $(0, 1)$  in  $x^{\lambda}$ ,  $p_{\lambda}$  respectively, can always be modified (without changing the geometrical meaning) in such a way that these functions satisfy the equations

$$\left. \begin{aligned} p_{\lambda'} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda}} &= p_{\lambda}, \quad p_{\lambda'} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial p_{\lambda}} = 0, \\ x^{\lambda'} \frac{\partial p_{\lambda'}}{\partial x^{\lambda}} &= 0, \quad x^{\lambda'} \frac{\partial p_{\lambda'}}{\partial p_{\lambda}} = x^{\lambda}, \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (2)$$

for all values of  $x^{\lambda}$  and  $p_{\lambda}$ , though the latter only have a geometric meaning when they are bound by the relation

$$p_{\lambda} x^{\lambda} = 0 \quad \dots \quad (3)$$

Transformations of the form (1) with the mentioned homogeneity property and satisfying (2) evidently form a group<sup>2)</sup> which we call  $\mathfrak{R}_{2n+2}$ . Let us consider the  $2n+1$  dimensional manifold with the homogeneous coordinates  $x^{\lambda}$ ,  $p_{\lambda}$ , endowed with the group  $\mathfrak{R}_{2n+2}$  of coordinate transformations and the group  $\mathfrak{F}$  of point transformations

$$'x^{\lambda} = \varrho x^{\lambda}, \quad 'p_{\lambda} = \varrho p_{\lambda}, \quad \dots \quad (4)$$

where  $\varrho$  is a homogeneous function of degree  $(0, 0)$  in  $x^{\lambda}$ ,  $p_{\lambda}$ . A point  $(x^{\lambda}, p_{\lambda})$  of this manifold is called an *element* if its coordinates satisfy the

<sup>1)</sup> J. A. SCHOUTEN: Zur Differentialgeometrie der Gruppe der Berührungstransformationen. Vol. 40 (1937), 100–107, 236–245.

<sup>2)</sup> Strictly speaking this is a pseudogroup. Cf. O. VEBLEN and J. H. C. WHITEHEAD: The Foundations of Differential Geometry, Cambr. Tracts, p. 38.

relation (3). The totality of elements constitutes a  $2n$ -dimensional space  $K_{2n}$  whose defining equation (3) is invariant under the group  $\mathfrak{K}_{2n+2}$  and the group  $\mathfrak{J}'$ . It is only the elements of this space with which we shall be concerned, and the purpose of this paper is to establish a formalism for the invariant theory of the groups  $\mathfrak{K}_{2n+2}$  and  $\mathfrak{J}'$  by constructing certain fundamental projective tensors which we shall call contact projectors.

We may get a correspondence between the space  $K_{2n}$  and another space  $H_n$  if we regard  $x^\alpha, p_\lambda$  as two separate sets of homogeneous coordinates, the first being homogeneous coordinates of the points of  $H_n$ <sup>3)</sup> and the second being homogeneous coordinates of the hyperplanes in the local spaces of  $H_n$  with  $\lfloor x^\alpha \rfloor$ <sup>4)</sup> as points of contact. The elements of  $K_{2n}$  correspond to the hyperplanes in the local spaces of  $H_n$  passing through the points of contact, owing to the relation (3). The configuration formed by a point of  $H_n$  and a hyperplane through it is also called an element of  $H_n$ . Since the two identical elements  $(x^\alpha, p_\lambda)$  and  $(\varrho x^\alpha, \sigma p_\lambda)$  of  $H_n$  for  $\sigma \neq \varrho$  are regarded as two distinct elements of  $K_{2n}$  because of (4), the elements of  $K_{2n}$  and those of  $H_n$  are then not in one-to-one correspondence.

## 2. Contact projectors.

Besides the index-type  $\alpha$ , we introduce the bracketed index-type  $(\alpha)$  defined by  $(\alpha) = (n+1) + \alpha$ , so that when  $\alpha$  takes the range  $0, 1, \dots, n$ ,  $(\alpha)$  will take the continuation range  $n+1, \dots, 2n+1$ . We shall write  $x^{(\lambda)}$  for  $p_\lambda$  so that the  $2n+2$  variables  $x^\alpha, p_\lambda$  can be written as  $x^\alpha, x^{(\lambda)}$  or  $x^\alpha$ , where  $\alpha, \beta, \dots, \iota$  take the two ranges of  $\alpha, (\alpha)$  successively, that is to say,  $\alpha, \beta, \dots, \iota = 0, 1, \dots, 2n+1$ .

Equations (1) and (4) may now be written

$$\mathfrak{K}_{2n+2} : x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^\alpha), \dots, \quad (5)$$

$$\mathfrak{J}' : x^\alpha = \varrho x^\alpha, \dots, \quad (6)$$

where  $x^{\alpha'}$  are homogeneous functions of degree one in  $x^\alpha$  and  $\varrho$  is a homogeneous function of degree zero in  $x^\alpha$ .

The transformations (5) being supposed to be non-singular, we define contact projectors with the aid of the quantities

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{N}_\beta^{\alpha'} &= \partial_\beta x^{\alpha'}, \quad \partial_\beta = \frac{\partial}{\partial x^\beta}, \\ \mathcal{N}_{\beta'}^{\alpha} &= \partial_{\beta'} x^\alpha, \quad \partial_{\beta'} = \frac{\partial}{\partial x^{\beta'}}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

<sup>3)</sup>  $H_n$  is the generalized projective space with VAN DANTZIG's homogeneous coordinates. Cf. D. VAN DANTZIG: Theorie des projektiven Zusammenhangs  $n$ -dimensionaler Räume. Math. Ann. 106 (1932), 400.

<sup>4)</sup>  $\lfloor x^\alpha \rfloor$  means  $x^\alpha$  determined up to an arbitrary factor.

For example a contra- or covariant (projective) contact vector  $v^\alpha$  or  $w_\beta$  of degree  $r$  is defined by the laws

$$\mathfrak{R}_{2n+2}: \begin{cases} v^{\alpha'} = \mathcal{N}_\alpha^{\alpha'} v^\alpha, \\ w_{\beta'} = \mathcal{N}_\beta^{\beta'} w_\beta. \end{cases} \quad \mathfrak{F}: \begin{cases} {}'v^\alpha = \varrho^r v^\alpha, \\ {}'w_\beta = \varrho^r w_\beta. \end{cases} \quad (8)$$

Let us now write equations (2) in the form

$$\begin{cases} P_\beta = P_{\beta'} \mathcal{N}_\beta^{\beta'}, \\ X_\beta = X_{\beta'} \mathcal{N}_\beta^{\beta'}, \end{cases} \quad (9)$$

where  $X_\beta$  and  $P_\beta$  are defined in each coordinate system by

$$\begin{cases} X_\lambda = 0, \\ P_\lambda = p_\lambda, \end{cases} \quad X_{(x)} = x^x, \quad P_{(x)} = 0, \quad (10)$$

i. e. the components of  $X_\beta$  only involve  $x^x$ , and those of  $P_\beta$  only involve  $p_\lambda$ . Then according to the definition (8),  $X_\beta$  and  $P_\beta$  are covariant contact vectors of degree one.

From (9) we have by differentiation

$$\begin{cases} \partial_{[\gamma} P_{\beta]} = \partial_{[\gamma} P_{\beta']} \mathcal{N}_\gamma^{\beta'} \mathcal{N}_\beta^{\beta'}, \\ \partial_{[\gamma} X_{\beta]} = \partial_{[\gamma} X_{\beta']} \mathcal{N}_\gamma^{\beta'} \mathcal{N}_\beta^{\beta'}, \end{cases} \quad (11)$$

and from (10) we find by actual calculation

$$-2 \partial_{[\beta} X_{\alpha]} = \epsilon_{\beta\alpha} = +2 \partial_{[\beta} P_{\alpha]} \quad (12)$$

where  $\epsilon_{\beta\alpha}$  is defined in each coordinate system by

$$\epsilon_{\lambda x} = 0, \quad \epsilon_{\lambda(x)} = -\delta_x^\lambda, \quad \epsilon_{(\lambda)x} = \delta_x^\lambda, \quad \epsilon_{(\lambda)(x)} = 0. \quad (13)$$

Hence equations (11) reduce to

$$\epsilon_{\beta\alpha} = \epsilon_{\beta'\alpha'} \mathcal{N}_\beta^{\beta'} \mathcal{N}_\alpha^{\alpha'} \quad (14)$$

from which it follows that  $\epsilon_{\beta\alpha}$  is a covariant contact bivector of degree zero.

The determinant of  $\epsilon_{\beta\alpha}$  being unity, we can define a contravariant contact bivector  $\epsilon^{\alpha\beta}$  of degree zero by the relation

$$\epsilon^{\alpha\gamma} \epsilon_{\beta\gamma} = \mathcal{N}_\beta^\alpha \begin{cases} = 1 & \text{for } \alpha = \beta, \\ = 0 & \text{for } \alpha \neq \beta. \end{cases} \quad (15)$$

<sup>5)</sup> This is equivalent to the LAGRANGE parenthesis condition for contact transformations. Similarly the transformation law of  $\epsilon^{\alpha\beta}$  defined by (15) is the equivalent of the POISSON parenthesis condition.

From this we find that the components of  $\epsilon^{\alpha\beta}$  are

$$\epsilon^{x\lambda} = 0, \quad \epsilon^{x(\lambda} = -\delta_{\lambda}^x, \quad \epsilon^{(x)\lambda} = +\delta_{\lambda}^x, \quad \epsilon^{(x)(\lambda} = 0. \quad \dots \quad (16)$$

We shall use the two  $\epsilon$ 's to raise and lower indices, convening that in lowering indices we sum with respect to the left index of  $\epsilon_{\beta\alpha}$ , while in raising indices we sum with respect to the right index of  $\epsilon^{\alpha\beta}$ , and shall identify those objects which are obtained from one another by raising and lowering indices.

With this understanding we obtain from (10) two *contravariant contact vectors of degree one*:

$$\left. \begin{array}{l} X^x = -x^\lambda, \quad X^{(\lambda} = 0, \\ P^x = 0, \quad P^{(\lambda} = +p_{\lambda}. \end{array} \right\} \quad \dots \quad (17)$$

whose laws of transformation

$$\left. \begin{array}{l} X^{\alpha'} = X^\alpha \mathcal{N}_\alpha^{\alpha'}, \\ P^{\alpha'} = P^\alpha \mathcal{N}_\alpha^{\alpha'}. \end{array} \right\} \quad \dots \quad (18)$$

express analytically the fact that  $x^{\alpha'}$  and  $p_{\lambda'}$  are homogeneous of degrees  $(1, 0)$  and  $(0, 1)$  in  $x^\lambda, p_\lambda$  respectively. Thus the homogeneity property of the group  $\mathfrak{R}_{2n+2}$  is merely a consequence of (9), that is to say, a consequence of (2).

From (17) the two contact vectors  $X^\alpha, P^\alpha$  are connected by the relation

$$x^\alpha = P^\alpha - X^\alpha \quad \dots \quad (19)$$

and hence the coordinates  $x^\alpha$  themselves are the components of a contravariant contact vector of degree one whose law of transformation simply expresses that the  $x^{\alpha'}$  are homogeneous of degree one in the  $x^\alpha$ .

From (10) the contact vector defined by

$$q_\beta = P_\beta + X_\beta, \quad (q_\lambda = p_\lambda, q^{(\lambda} = x^{\lambda}) \quad \dots \quad (20)$$

is seen to be the gradient of the contact scalar  $q = p_\mu x^\mu$ :

$$q_\beta = \partial_\beta q. \quad \dots \quad (21)$$

Corresponding to the relations (19), (20) we have by raising and lowering suffices,

$$\left. \begin{array}{l} x_\beta = P_\beta - X_\beta, \\ q^\alpha = P^\alpha + X^\alpha. \end{array} \right\} \quad \dots \quad (22)$$

It may be remarked that by taking the determinant on both sides of (14) we have  $\text{Det}(\mathcal{N}_\alpha^{\alpha'}) = \pm 1$  and hence if we confine ourselves to the subgroup of  $\mathfrak{R}_{2n+2}$  for which  $\text{Det}(\mathcal{N}_\alpha^{\alpha'}) = +1$ , the difference between contact projectors and projector-densities vanishes.

3. The contact connection.

Let a symmetric projective connection  $\Pi_{\gamma\beta}^\alpha$  of degree  $-1$  be introduced in the  $K_{2n}$  in such a way that we have

$$\nabla_\gamma \epsilon_{\beta\alpha} = \partial_\gamma \epsilon_{\beta\alpha} - \Pi_{\gamma\beta}^\delta \epsilon_{\delta\alpha} - \Pi_{\gamma\alpha}^\delta \epsilon_{\beta\delta} = 0 \quad \dots \quad (23)$$

If we multiply this by  $\epsilon^{\beta\alpha}$ , we obtain, on account of (15) and of the constancy of  $\epsilon_{\beta\alpha}$ ,

$$\Pi_{\gamma\alpha}^\alpha = 0. \quad \dots \quad (24)$$

Hence there is no difference between the covariant differentiation of a contact projector and that of a projector-density.

From (15) and (23) we also have

$$\nabla_\gamma \epsilon^{\alpha\beta} = 0 \quad \dots \quad (25)$$

The contact connection  $\Pi_{\gamma\beta}^\alpha$  may be further particularized in the following way. The quantities  $x^\alpha$  and  $q_\beta$  may be regarded as fundamental in the sense that in terms of them the two other quantities  $X^\alpha, P^\alpha$  (and also  $X_\beta, P_\beta$ ) can be expressed owing to the relations (19), (20) and (22). We have then only to consider the two contact projectors

$$Q_\gamma^\alpha = \nabla_\gamma x^\alpha, \quad R_{\gamma\beta} = \nabla_\gamma q_\beta. \quad \dots \quad (26)$$

Since  $q = p_\lambda x^\lambda$  is a quadratic function of  $x^\alpha$ , we have by (21) the condition of homogeneity

$$x^\alpha q_\alpha = 2q, \quad \dots \quad (27)$$

from which a relation between the quantities defined by (26) may be obtained by covariant differentiation,

$$Q_\gamma^\alpha q_\alpha + R_{\gamma\alpha} x^\alpha = 2q_\gamma \quad \dots \quad (28)$$

The simplest solution of this equation is

$$Q_\gamma^\alpha = 2A_\gamma^\alpha, \quad R_{\gamma\beta} = 0, \quad \dots \quad (29)$$

which means that the connection  $\Pi_{\gamma\beta}^\alpha$  is a point displacement.<sup>6)</sup>

In terms of the two quantities  $Q_\beta^\alpha, R_{\beta\alpha}$ , the derivatives of the four vectors  $x, q, X, P$  are

$$\left. \begin{aligned} \nabla_\gamma x^\alpha &= Q_\gamma^\alpha, & \nabla_\gamma x_\beta &= Q_{\gamma\beta}, \\ \nabla_\gamma q^\alpha &= R_\gamma^\alpha, & \nabla_\gamma q_\beta &= R_{\gamma\beta}, \\ \nabla_\gamma X^\alpha &= \frac{1}{2}(R_\gamma^\alpha - Q_\gamma^\alpha), & \nabla_\gamma X_\beta &= \frac{1}{2}(R_{\gamma\beta} + Q_{\gamma\beta}), \\ \nabla_\gamma P^\alpha &= \frac{1}{2}(R_\gamma^\alpha + Q_\gamma^\alpha), & \nabla_\gamma P_\beta &= \frac{1}{2}(R_{\gamma\beta} + Q_{\gamma\beta}), \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

<sup>6)</sup> J. A. SCHOUTEN und J. HAANTJES: Zur allgemeinen projektiven Differentialgeometrie. Compositio Math. 3 (1936), p. 23.

which reduce in the particular case (29) to

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_\gamma x^\alpha = 2 \mathcal{N}_\gamma^\alpha, \quad \nabla_\gamma x_\beta = 2 \epsilon_{\gamma\beta}, \\ \nabla_\gamma q^\alpha = 0, \quad \nabla_\gamma q_\beta = 0, \\ \nabla_\gamma X^\alpha = - \mathcal{N}_\gamma^\alpha, \quad \nabla_\gamma X_\beta = - \epsilon_{\gamma\beta}, \\ \nabla_\gamma P^\alpha = + \mathcal{N}_\gamma^\alpha, \quad \nabla_\gamma P_\beta = + \epsilon_{\gamma\beta}. \end{array} \right\} \dots \quad (31)$$

In conclusion the author wishes to thank Dr. J. HAANTJES and Professor J. A. SCHOUTEN whose criticisms on this note have led to several improvements

---

**Mathematics.** — *Conformal representations of an n-dimensional euclidean space with a non-definite fundamental form on itself.*  
By J. HAANTJES. (Communicated by Prof. W. V. D. WOUDE).

(Communicated at the meeting of September 25, 1937.)

### *Introduction.*

It is wellknown that every real conformal point transformation in an  $n$ -dimensional ( $n > 2$ ) euclidean space ( $R_n$ ) with a *definite* fundamental quadratic form can be brought about by a motion and an inversion or a dilatation<sup>1)</sup>. This theorem, which for  $n = 3$  is due to LIOUVILLE and is called LIOUVILLE's *theorem*, does not hold in a euclidean space with a fundamental form which is not definite.

The problem with which we are here concerned is to find the extension of the above theorem to a euclidean manifold, the fundamental form of which is not definite. This leads to a new class of conformal transformations (formula (26)). If  $\mathfrak{M}$  denotes this class, then, as we shall see, the extension of LIOUVILLE's theorem may be formulated as follows. Every real conformal point transformation in an  $R_n$  ( $n > 2$ ) is composed of a motion and a transformation  $T$ , where  $T$  is either a dilatation or an inversion or a transformation belonging to the class  $\mathfrak{M}$ .

It will appear that every transformation belonging to  $\mathfrak{M}$  is the product of two inversions. Thus the following theorem holds in any euclidean space. The inversions and motions in an  $R_n$  define together the conformal group of point transformations.

### *§ 1. Conformal transformations of the fundamental tensor.*

Let  $a_{\lambda\mu}$  be the fundamental tensor in an  $n$ -dimensional RIEMANNian space  $V_n$ . A transformation of the form

$$'a_{\lambda\mu} = \sigma a_{\lambda\mu}, \dots \quad (1)$$

<sup>1)</sup> S. LIE, Ueber Komplexe, insbesondere Linien- und Kugelkomplexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differentialgleichungen, Math. Ann., 5 (1872) p. 184.

where  $\sigma$  is a function of the coordinates  $x^\lambda$ , which leads to another fundamental tensor ' $a_{\lambda\mu}$ ', is called a *conformal transformation of the fundamental tensor*. It is clear from the angle definition that the transformation (1) preserves angles.

We shall first show that these transformations are closely connected with the conformal point transformations. Let

$$y^\lambda = f^\lambda(x^\mu) \quad \dots \dots \dots \dots \quad (2)$$

be a real conformal point transformation. Thus we have

$$a_{\lambda\mu}(y) \frac{\partial y^\lambda}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\lambda}{\partial x^\nu} = \sigma a_{\mu\nu}(x) \quad \dots \dots \dots \dots \quad (3)$$

Such a transformation defines a 1-1 point correspondence. Hence we can solve the equations (2) for  $x^\mu$  in terms of  $y^\lambda$

$$x^\mu = F^\mu(y). \quad \dots \dots \dots \dots \quad (4)$$

We now pass to another coordinate system  $(x')$  by the transformation

$$x'^\mu = F'^\mu(x), \quad \dots \dots \dots \dots \quad (5)$$

where the functions  $F'^\mu$  are identical with the functions  $F^\mu$ . Then the coordinates of the point  $y^\lambda$  with respect to the system  $(x')$  are

$$y'^\lambda = F'^\lambda(y^\mu) = F'^\lambda(f^\mu(x)) \stackrel{!}{=} x'^\lambda \quad \dots \dots \dots \dots \quad (6)$$

and the components of the fundamental tensor at the point  $y^\lambda$  with respect to  $(x')$  are, as follows from (3),

$$a_{\lambda'\mu'}(y) \stackrel{!}{=} \sigma a_{\lambda\mu}(x). \quad \dots \dots \dots \dots \quad (7)$$

Thus, given a conformal point transformation (2), there exists always a coordinate system  $(x')$  so that with respect to  $(x')$  the point  $y$  has the same coordinates as the corresponding point  $x$  with respect to the system  $(x)$ , whereas the components of the fundamental tensor at the new point  $y$  with respect to  $(x')$  are obtained from the components with respect to  $(x)$  at the point  $x$  by multiplying with a factor  $\sigma$ . This means, however, that *every conformal point transformation corresponds to a conformal transformation of the fundamental tensor*.

If the  $V_n$  is a euclidean space,  $R_n$ , the curvature affinor defined by

$$K_{\mu\nu\lambda}^{\lambda} = 2 \partial_{[\nu} \{_{\mu}{}^{\lambda}\} + 2 \{_{[\nu}{}^{\lambda}\} \{_{\mu]}{}^{\rho}\}. \quad \dots \dots \dots \dots \quad (8)$$

vanishes at every point. It is zero at the point  $y$  as well as at the point  $x$ , from which it follows in consequence of (7), that the curvature affinor belonging to the tensor  $\sigma a_{\lambda\mu}$  also vanishes. A conformal transformation in  $R_n$  corresponds, therefore, to a conformal transformation of the fundamental tensor

$$'a_{\lambda\mu} = \sigma a_{\lambda\mu} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (9)$$

<sup>1)</sup> The sign  $\stackrel{!}{=}$  means that the equation holds with respect to the coordinate system or systems used in the equation itself; it needs not to hold with respect to other systems.

so that the curvature tensor ' $K_{\nu\mu\lambda}^{\alpha\beta}$ ' belonging to the fundamental tensor ' $a_{\lambda\mu}$ ' vanishes. In the next section these conformal transformations of the fundamental tensor will be investigated.

**§ 2. Conformal transformations of the fundamental tensor in  $R_n$ , which lead again to euclidean spaces.**

Let us consider the transformation (9). The CHRISTOFFEL symbols computed from the tensor ' $a_{\lambda\mu}$ ' are

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \\ \mu\lambda \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \alpha \\ \mu\lambda \end{array} \right\} + \frac{1}{2} A_\mu^\alpha s_\lambda + \frac{1}{2} A_\lambda^\alpha s_\mu - \frac{1}{2} a_{\mu\lambda} s^\alpha. \quad . . . \quad (10)$$

where  $A_\lambda^\alpha$  is the unit affinor and

$$s_\lambda = \partial_\lambda \log \sigma. \quad . . . . . \quad (11)$$

From this it follows that the curvature affinor ' $K_{\nu\mu\lambda}^{\alpha\beta}$ ' belonging to the tensor ' $a_{\lambda\mu}$ ' is related with  $K_{\nu\mu\lambda}^{\alpha\beta}$  by the following equation

$$'K_{\nu\mu\lambda}^{\alpha\beta} = K_{\nu\mu\lambda}^{\alpha\beta} + a_{[\nu}{}^\alpha s_{\mu]\tau]} a^{\tau\beta}. \quad . . . . . \quad (12)$$

where

$$s_{\mu\lambda} = 2 \nabla_\mu s_\lambda - s_\mu s_\lambda + \frac{1}{2} a_{\mu\lambda} s_\rho s^\rho. \quad . . . . . \quad (13)$$

We now suppose the space to be euclidean with respect to the fundamental tensor  $a_{\lambda\mu}$  as well as with respect to the tensor ' $a_{\lambda\mu}$ '. Then both  $K_{\nu\mu\lambda}^{\alpha\beta}$  and ' $K_{\nu\mu\lambda}^{\alpha\beta}$ ' vanish and, when  $n > 2$ , it follows from (12) that

$$s_{\mu\lambda} = 0. \quad . . . . . \quad (14)$$

which equation is equivalent to

$$2 \nabla_\mu s_\lambda = s_\mu s_\lambda - \frac{1}{2} a_{\mu\lambda} s_\rho s^\rho. \quad . . . . . \quad (15)$$

Every solution  $s_\lambda$  of this differential equation is a gradient, as is easily shown by alternating both sides of (15), and gives a conformal transformation of the fundamental tensor, which leads again to a euclidean space.

In this paper we consider the case that  $a_{\lambda\mu} dx^\lambda dx^\mu$  is a non-definite quadratic form. Then the real solutions  $s_\lambda$  may be divided into three groups:

1. The solution  $s_\lambda = 0$
2. The real solutions  $s_\lambda$  for which  $s_\rho s^\rho \neq 0$
3. The real solutions  $s_\lambda$ , different from zero, for which  $a_{\lambda\mu} s^\lambda s^\mu = 0$ .

The solution  $s_\lambda = 0$  gives  $\sigma = \text{constant}$ .

If  $s_\lambda$  is a solution of the second kind, then a cartesian coordinate system can be chosen in such a way that

$$\sigma = C^2 (x^\lambda s_\lambda)^{-2}. \quad . . . . . \quad (16)$$

<sup>1)</sup> Cf. J. A. SCHOUTEN und D. J. STRUIK. Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie I, Groningen, p. 129.

$C$  being an arbitrarily chosen constant. For the proof we refer to the literature<sup>1)</sup>.

In the present paper we shall examine the solutions belonging to the third group. Such a solution satisfies the differential equation

$$2 \nabla_\mu s_\lambda = s_\mu s_\lambda. \quad \dots \quad (17)$$

Hence we have according to (11)

$$2 \nabla_\mu \sigma^{-\frac{1}{2}} s_\lambda = 2 \sigma^{-\frac{1}{2}} \nabla_\mu s_\lambda - \sigma^{-\frac{1}{2}} s_\lambda \nabla_\mu \log \sigma = \sigma^{-\frac{1}{2}} s_\mu s_\lambda - \sigma^{-\frac{1}{2}} s_\mu s_\lambda = 0, \quad (18)$$

which means that the vector

$$b_\lambda = \frac{1}{2} \sigma^{-\frac{1}{2}} s_\lambda = -\partial_\lambda \sigma^{-\frac{1}{2}}. \quad \dots \quad (19)$$

is covariant constant, hence it is constant with respect to a cartesian coordinate system. In the following we suppose the coordinate system to be an orthogonal cartesian one. From (19) we obtain by integration

$$\sigma^{-\frac{1}{2}} = c - b_\lambda x^\lambda; \quad c = \text{constant}. \quad \dots \quad (20)$$

So we have

$$s_\lambda = \frac{2 b_\lambda}{c - b_\lambda x^\lambda}, \quad \dots \quad (21)$$

where  $b_\lambda$  is a constant null-vector ( $b_\lambda b^\lambda = 0$ ). By the orthogonal coordinate transformation  $x^{\mu'} = \delta_x^{\mu'} x^\mu + a^{\mu'}$ , where the  $\delta_x^{\mu'}$  denote the generalized KRONECKER symbols and the  $a^{\mu'}$  are constants,  $c$  alters. It is, of course, always possible to find a coordinate system for which  $c=1$ .

### § 3. The corresponding conformal point transformations.

As we have seen, to every conformal point transformation corresponds a conformal transformation of the fundamental tensor.

A conformal transformation corresponding to the transformation ' $a_{\lambda\mu} = \sigma a_{\lambda\mu}$ ' with  $\sigma = \text{constant}$  is the *dilatation*

$$y^\mu = \sqrt{\sigma} x^\mu, \quad \dots \quad (22)$$

as is easily seen by substituting this expression in (3).

Furthermore the *inversion*

$$y^\mu = C \frac{x^\mu}{x^\lambda x_\lambda} \quad (C = \text{constant}) \quad \dots \quad (23)$$

corresponds to a conformal transformation of the fundamental tensor which belongs to the second group. Indeed from (23) follows

$$dy^\mu dy_\mu = \sigma dx^\mu dx_\mu, \quad \dots \quad (24)$$

<sup>1)</sup> J. A. SCHOUTEN, Der Ricci-Kalkül, p. 173.

where  $\sigma$  stands for the expression (16). Every other conformal transformation, which corresponds to the same transformation of the fundamental tensor, is the product of the inversion (23) and a motion.

Let us now consider the conformal transformation of the fundamental tensor (9) with (comp. (20))

$$\sigma = (1 - b_\lambda x^\lambda)^{-2}, \dots \dots \dots \quad (25)$$

hence a transformation which belongs to the third group. We shall now show that one of the corresponding conformal point transformations is given by

$$y^\nu = \frac{x^\nu - \frac{1}{2} x^\lambda x_\lambda b^\nu}{1 - b^\lambda x_\lambda}; b^\lambda b_\lambda = 0, \dots \dots \quad (26)$$

From (26) we have by differentiation

$$dy^\nu = \frac{dx^\nu - (x^\lambda dx_\lambda) b^\nu}{1 - b^\lambda x_\lambda} + \frac{(b^\mu dx_\mu) (x^\nu - \frac{1}{2} x^\lambda x_\lambda b^\nu)}{(1 - b^\lambda x_\lambda)^2}, \dots \quad (27)$$

from which it follows after some calculation

$$a_{\lambda\nu} dy^\lambda dy^\nu = \frac{a_{\lambda\nu} dx^\lambda dx^\nu}{(1 - b^\lambda x_\lambda)^2} = \sigma a_{\lambda\nu} dx^\lambda dx^\nu, \dots \quad (28)$$

where  $\sigma$  stands for the expression (25). Consequently the conformal representation (26) of the space upon itself corresponds indeed to the transformation

$$'a_{\lambda\nu} = (1 - b_\lambda x^\lambda)^{-2} a_{\lambda\nu}, \dots \quad (29)$$

and every other conformal point transformation which corresponds to the transformation (29) is the product of the transformation (26) and a motion. In consequence of these results we have the following extension of LIOUVILLE's theorem:

*Any real conformal representation of an n-dimensional ( $n > 2$ ) euclidean space with a non-definite fundamental form upon itself can be brought about by the product of one of the transformations (22) (dilatation), (23) (inversion) or (26) with a motion.*

In a euclidean space with a definite fundamental form a real solution  $s_\lambda$ , for which  $s_\lambda s^\lambda = 0$ , does not exist. In this case, therefore, we do not find real conformal representations of the form (26).

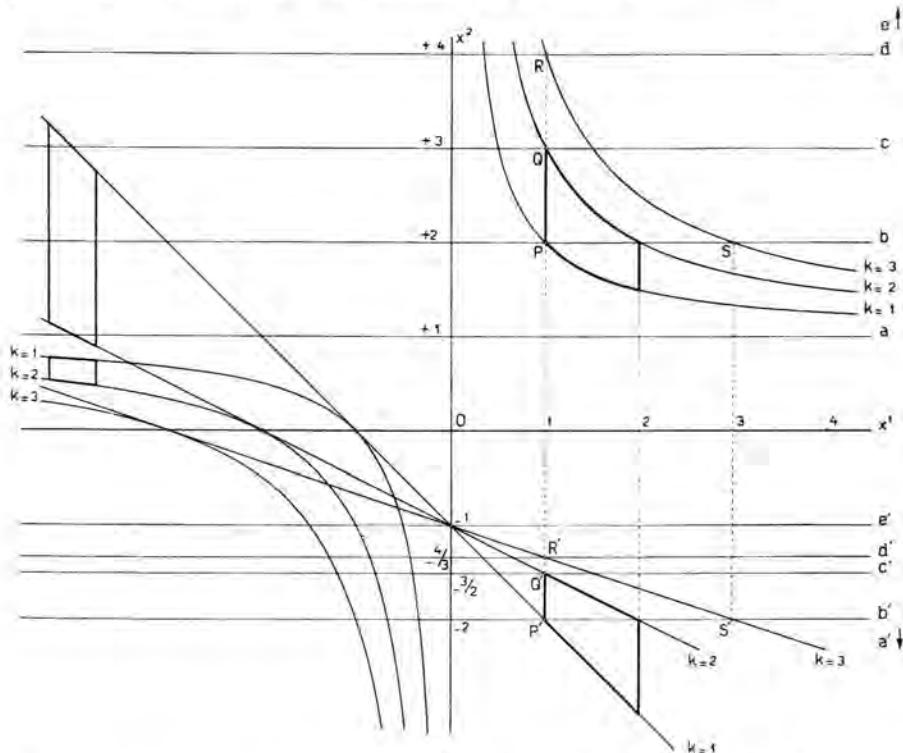
In an  $R_2$  with a non-definite fundamental form the representations mentioned in the above theorem are the conformal representations with the property that "circles" remain "circles". As an example let us write in full one of these transformations. The coordinate system may be chosen in such a way that

$$ds^2 = 2 dx^1 dx^2, \quad a_{11} = 0, \quad a_{12} = 1, \quad a_{22} = 0, \dots \quad (30)$$

Taking  $b^1 = 1, b^2 = 0$ , we obtain the following representation

$$\left. \begin{aligned} y^1 &= \frac{x^1 - x^1 x^2}{1 - x^2} = x^1 \\ y^2 &= \frac{x^2}{1 - x^2}. \end{aligned} \right\} \dots \quad (31)$$

The system of "circles"  $x^1(x^2 - 1) = k$  transforms into the system  $y^1 + k(y^2 + 1) = 0$ , as is represented in the figure.



It is interesting to note that we may look upon the transformation (26) as the product of two inversions, one with the centre in  $x^2 = 0$  and one with the centre  $x^2 = \frac{1}{2} b^2$ :

$$\left. \begin{aligned} a) \quad z^i &= \frac{x^2}{x^i x_i} \\ b) \quad y^i &= \frac{z^i - \frac{1}{2} b^2}{(z^i - \frac{1}{2} b^2)(z_i - \frac{1}{2} b_i)}, \quad b_i b^i = 0 \end{aligned} \right\} \dots \quad (32)$$

So we have the following theorem:

*The inversions and motions in an  $R_n$  together define the conformal group.*

This theorem holds both in an  $R_n$  with a non-definite fundamental form and in an  $R_n$  with a definite form.

**Chemistry.**—*On polymerides of methylchavicol.* By J. M. v. D. ZANDEN.  
(Communicated by Prof. P. VAN ROMBURGH).

(Communicated at the meeting of September 25, 1937.)

After heating methylchavicol,  $\text{CH}_3\text{O}-\text{C}_6\text{H}_4-\text{CH}_2\text{CH}=\text{CH}_2$ , for 48 hours at  $250^\circ$  in sealed tubes, VAN ROMBURGH obtained, by distilling off, a residue from which a solid deposited. The oil was removed from the crystalline mass by suction. After repeated recrystallisation the main product melted, not very sharply, at  $98^\circ$ , another at  $166^\circ$ , while also traces of a substance melting above  $200^\circ$  were obtained.

The elementary analysis and the determination of the molecular weight showed the probability of the products  $98^\circ$  and  $166^\circ$  being dimerides of methylchavicol. The product  $98^\circ$  is unsaturated; it formed a dibromide, melting at  $87^\circ$ <sup>1)</sup>.

Further investigation showed, that extension of the length of heating somewhat increased the yield of crystalline mass.

The syrup, from which the crystals were filtered by suction, was fractionated. The fraction  $283$ – $313^\circ$  (15 mm) deposited a handsome amount of solid matter.

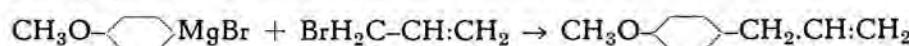
At  $350^\circ$  the residual mass was cracked; the distillate contained inter alia p.methoxycresylether  $\text{CH}_3\text{O}-\text{C}_6\text{H}_4-\text{CH}_3$ .

Oxidation of the product  $98^\circ$  with permanganate in acetone yielded anisic acid  $\text{CH}_3\text{O}-\text{C}_6\text{H}_4-\text{CO}_2\text{H}$  and an acid melting at  $113^\circ$ , having, according to the elementary analysis and the titration, the formula  $\text{C}_{12}\text{H}_{16}\text{O}_3$ . The literature does not mention an acid of these properties.

Further oxidation of the acid  $113^\circ$  with the Kiliani-mixture yielded an acid melting at  $138^\circ$ <sup>2)</sup>. The elementary analysis and the determination of the equivalent value agree with the formula  $\text{C}_{12}\text{H}_{14}\text{O}_4$ .

The stock of methylchavicol for this investigation, obtained from an essential oil, distilled in Java, was exhausted before the purpose to acquire insight into the process of the polymerisation was accomplished. A new quantity was prepared by the procedure indicated in the German patent Kl. 120 Nr. 154654<sup>3)</sup>.

Bromination of anisole gave p. bromoanisole in a yield of 88 %; the magnesium compound reacts with allyl bromide giving methylchavicol (75–80 per cent of the theoretical amount).



<sup>1)</sup> Verslag Koninklijke Akad. v. Wetenschappen, Amsterdam, 17, 16 (1909).

<sup>2)</sup> VAN ROMBURGH en VAN DER ZANDEN, Verslag Koninklijke Akad. v. Wetenschappen, Amsterdam, 25, 1303/4 (1917).

<sup>3)</sup> Chem. Zentr. 1904, II, 1354.

This time we heated the methylchavicol for 200 hours at 250° for the polymerisation. After this, over 60 % distilled at the boiling point of methylchavicol; then the distillation temperature was raised to 200° (3 mm). The fractions up to 300° solidify partially. The residue, abt. 1/12 of the starting material, is at room temperature a hard asphaltic like mass.

The solid part of the fractions 200–300° (3 mm) was filtered off and then freed from adherent oil by washing with petroleum benzine. It melts at abt. 90°. The fraction 210–220° (2 mm) gives the best yield. Extraction and recrystallisation from petroleum benzine, alcohol and acetone furnished as chief product a substance melting rather sharply at 93°; fractions melting at 95–98° were also obtained. The yield of product 167° was small. We also separated a fraction, melting point 46–47°. The micro elementary analysis, the determinations of the methoxyl content and the molecular weight in camphor all point to this substance being a dimeride of methylchavicol, whereas the same determinations for another product, melting point 135°, obtained in the same reaction, indicate a trimeride.

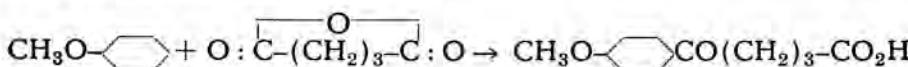
The investigations on the constitution of the main product 93° have given the same results as in 1917. The oxidation with permanganate in acetone produced anisic acid and an acid C<sub>12</sub>H<sub>16</sub>O<sub>3</sub>, melting point now 114–114.5°; further oxidation of this acid with KILIANI-mixture, yielded an acid C<sub>12</sub>H<sub>14</sub>O<sub>2</sub>, melting at 140–140.5°.

It was very probable that the last mentioned substance was a ketonic acid. It was therefore advisable to try to obtain an oxime, and then the BECKMANN conversion with hydrolysis of the amide might help to decide the structure of the starting acid.

Hydroxylamine combined with the acid, giving an oxime melting at 97–97.5°. This oxime being converted by concentrated sulphuric acid, the hydrolysis, followed by acidulation, gave an organic acid melting at 99–100°, the equivalent weight of which proved to be 66. This acid might be glutaric acid HO<sub>2</sub>C(CH<sub>2</sub>)<sub>3</sub>CO<sub>2</sub>H. The melting point determination of a mixture with this acid confirmed the conclusion.

From this fact it could be derived that the acid C<sub>12</sub>H<sub>14</sub>O<sub>4</sub> must be δ(p. methoxyphenyl)-δ ketovaleric acid, CH<sub>3</sub>O--CO(CH<sub>2</sub>)<sub>3</sub>CO<sub>2</sub>H.

The interaction of glutaric acid and anisole with aluminium chloride as a catalyst yielded, in an amount of 75 %, an acid identical, as anticipated, with the oxidation product 140°.



The paranitrophenylhydrazone melts at 198–200°; the 2,4-dinitrophenylhydrazone at 142.5°.

When the BECKMANN conversion was carried out with phosphorus pentachloride in ether, we acquired an exhaustive information on the course of the reaction. The first product separated, melting at 172–172.5°,

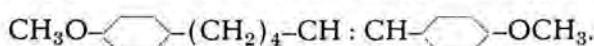
according to the analysis  $C_{12}H_{13}O_3N$ , is in all appearance a cyclic imide. The action of 1 equivalent KOH, followed by acidulation converted the imide to a substance  $C_{12}H_{15}O_4N$ , melting at  $147-148^\circ$ ; the nitrogen ring is opened. Strong hydrochlorid acid split up the acid  $C_{12}H_{15}O_4N$  ( $147-148^\circ$ ) to glutaric acid and paramethoxyaniline. Interaction of glutaric acid and paramethoxyaniline produced the imide  $172-172.5^\circ$ .

The oxidation of the acid  $C_{12}H_{14}O_2$  ( $140-140.5^\circ$ ) by permanganate in water yielded chiefly anisic acid; as a by-product we obtained an acid, melting at  $92-92.5^\circ$ . The elementary analysis and the determination of the equivalent weight accorded to the formula  $C_9H_8O_4$ , from which can be concluded, that the acid should be paramethoxyphenylglyoxylic acid,  $CH_3O-\text{C}_6\text{H}_4-\text{CO}-\text{CO}_2\text{H}$ . BOUGAULT<sup>4)</sup> prepared this acid by oxidation of p.methoxyacetophenone,  $CH_3O-\text{C}_6\text{H}_4-\text{CO}-\text{CH}_3$ . Repeating of his procedure gave a product identical (melting point of the mixture) with the oxidation product from acid  $140-140.5^\circ$ .

We had obtained the anisoylbutyric acid by oxidation of the acid  $C_{12}H_{16}O_3$ , melting point  $114-114.5^\circ$ . Therefore the last mentioned acid must be the  $\delta$ -p. methoxyphenylvaleric acid  $CH_3O-\text{C}_6\text{H}_4-(CH_2)_4\text{CO}_2\text{H}$ . We succeeded in synthetising this acid in the way described hereafter. Following a method employed by CLAISEN<sup>5)</sup> in preparing the cinnamic ester from anisic aldehyde and ethyl acetate in presence of sodium, we prepared p. methoxycinnamic ester,  $CH_3O-\text{C}_6\text{H}_4-\text{CH}:\text{CH}-\text{CO}_2\text{C}_2\text{H}_5$ . This ester was reduced by sodium and alcohol, — the sodium having been pulverized in toluene —, to p.methoxyphenylpropylalcohol,  $CH_3O-\text{C}_6\text{H}_4-(CH_2)_2\text{CH}_2\text{OH}$  (B.p. 10 mm  $149^\circ$ ; m.p.  $25-26^\circ$ ), the latter was converted to the bromide  $CH_3O-\text{C}_6\text{H}_4-(CH_2)_2\text{CH}_2\text{Br}$  by phosphorus tribromide.

The interaction of this bromide and sodium malonic ester gave us  $CH_3O-\text{C}_6\text{H}_4-(CH_2)_3-\text{CH}(\text{CO}_2\text{C}_2\text{H}_5)_2$ . The ester was saponified and the resulting diacid lost  $\text{CO}_2$  by heating at  $130^\circ$  and yielded the same acid  $114-114.5^\circ$  as obtained before in oxidising the dimeride, m.p.  $93^\circ$ .

This polymeride consequently gives in the first oxidation  $\delta$ -p. methoxyphenylvaleric acid  $CH_3O-\text{C}_6\text{H}_4-(CH_2)_4\text{CO}_2\text{H}$  and anisic acid  $CH_3O-\text{C}_6\text{H}_4-\text{CO}_2\text{H}$ . It is unsaturated and proved to have the formula  $C_{20}H_{24}O_2$ . This polymeride is therefore 1,6-di-p.methoxyphenylhexene-1,



It was hydrogenated with palladium as a catalyst. The saturated product melting at  $71.5-72^\circ$  has the formula  $C_{20}H_{26}O_2$ , it must be 1,6-di-p. methoxyphenylhexane. We prepared this substance by the method

<sup>4)</sup> Ann. [7] 25, 541 (1902).

<sup>5)</sup> Ber. 23, 977 (1890).

of WÜRTZ, starting from p.methoxyphenylpropyl bromide. It proved to be identical with the saturated product, mentioned before.

The structure of the polymeride 93° has now been proved; the investigation of the other polymerides being continued. We are at present engaged in preparing polymerides of analogical substances so as to obtain fresh points of view on polymerisation.

---

**Botany.** — *Die chemischen Vorgänge im Sauromatum-Kolben. III. Mitteilung.* Von A. W. H. VAN HERK. (Communicated by Prof. J. C. SCHOUTE.)

(Communicated at the meeting of September 25, 1937.)

Die Versuche, über die in der zweiten Mitteilung<sup>1)</sup> berichtet worden ist, haben gezeigt, dass der Faktorenkomplex, welcher die plötzlich auftretende Atmungssteigerung im Appendix von *Sauromatum guttatum* hervorruft, sich nicht in diesem Organ selbst befindet, sondern in den männlichen Blüten.

Es ist nun naheliegend sich vorzustellen, dass die Korrelation, welche nach diesem Befunde zwischen beiden Teilen des Blütenkolbens besteht, auf einer stofflichen Beeinflussung zurückzuführen ist. Die Grundidee wäre dann die folgende:

Der erwachsene Appendix enthält grosse Mengen Verbrennungssubstanzen, die mit geringer Geschwindigkeit von den Oxydationsfermenten verbrannt werden. Das Atmungssystem kann seine ganze Aktivität nicht entfalten, da ihm eine oder mehrere Substanzen, — Aktivatoren —, fehlen. In einem bestimmten Entwicklungsstadium werden diese Aktivatoren von den männlichen Blüten gebildet. Sie wandern von dieser Zone der Infloreszenz nach dem Anhängsel. Hier ergänzen sie das Oxydationssystem: nach einer Latenzzeit steigern sie die Atmungsintensität der Zellen der peripheren Gewebeschicht stark.

Diese Vermutung wird in der vorliegenden Arbeit experimentell bestätigt.

#### *Die Isolierung der wirksamen Substanz.*

Einige Stunden vor der Blüte schneidet man die Zone der Infloreszenz ab, welche die männlichen Blüten trägt. Man entfernt das weisse Markgewebe. Das Material (mindestens 10 Pflanzen) wird mit Kohlensäureschnee sofort zum Erfrieren gebracht und mit gereinigtem Quarzsand fein zerrieben. Die zerkleinerten Pflanzenteile werden mit  $\pm 25$  ccm Wasser bei 0° während einer Viertelstunde unter stetigem Umschütteln extra-

<sup>1)</sup> Proc. Royal Acad. Amsterdam, 40, 607 (1937).

hiert; nachher wird die Flüssigkeit abzentrifugiert. Man wiederholt das Verfahren zweimal, wodurch eine hinreichend vollständige Extraktion erreicht wird. Die stark trüben, intensiv gelbgefärbten Lösungen werden vereint und unter Abkühlung wird soviel Aceton ( $0^{\circ}$ ) hinzugefügt, bis die Endkonzentration 70 % ist. Es bildet sich ein Niederschlag. Nach einer halben Stunde kann man Niederschlag und Flüssigkeit durch scharfes Zentrifugieren trennen. Es hat sich herausgestellt, dass die wirksame Substanz in der Lösung bleibt; die Fällung ist völlig unwirksam. Die Flüssigkeit engt man im Vakuum bei  $35^{\circ}$  bis auf 4—5 ccm ein und zentrifugiert von einer Trübung scharf ab. Man erhält eine klare, schwach grünlich-gelb gefärbte, wässrige Lösung. Das Einengen und Zentrifugieren wird unter sterilen Bedingungen ausgeführt.

#### *Das Testobjekt.*

Man kann die wirksame Substanz, — deren Existenz bis jetzt noch hypothetisch ist —, nur mit einer biologischen Reaktion nachweisen: der Körper muss die Atmungsintensität der Appendixzellen stark steigern und demzufolge die Temperatur des Infloreszenzähnchens erhöhen. Die biologische Analyse fordert als Testobjekt einen Appendix, der sich ohne Zusatz des aktiven Stoffes nicht erwärmt.

Einige Tage, ( $1\frac{1}{2}$  bis 3), vor der Blüte der Sauromatumkolben werden die männlichen Blüten entfernt und die Wundfläche mit Kakaobutter bedeckt. Hat man die Operation während des erwähnten Zeitabschnittes ausgeführt, so tritt keine Temperaturerhöhung auf. Gelegentlich macht man den Eingriff zu spät; dann erwärmt der Appendix sich innerhalb der nächsten 20 Stunden. Diese Pflanzen werden nicht verwendet.

Die operierten Pflanzen bleiben mindestens 36 Stunden im Versuchszimmer und immer so lange, bis die unbehandelten Kontrollpflanzen<sup>1)</sup> sich erwärmen. Reagieren letztere erst 90 Stunden nach dem Operations-tage, oder noch später, so hat man den Eingriff bei den Versuchspflanzen zu früh ausgeführt. Obschon mehrere dieser Pflanzen sich zu Testobjekten eignen, habe ich sie in den späteren Experimenten nicht zu diesem Zwecke verwendet, da ihre Empfindlichkeit stark wechselt. Dies würde eine zu grosse Streuung in den Versuchsergebnissen verursachen.

Darauf wird das Anhängsel unter Wasser abgeschnitten. Hierdurch verhindert man, dass andere Teile der Pflanze die Wärmeentwicklung beeinflussen könnten. Man zerlegt den abgeschnittenen Appendix in zwei Hälften: die Spitze und die Basis. Die obere Hälfte ist einige Zentimeter länger als die untere. Um Austrocknen zu verhindern, bedeckt man die obere Schnittfläche des basalen Teiles mit Kakaobutter.

Es sei an dieser Stelle daran erinnert, dass beide Appendixhälften immer in derselben Weise reagieren: entweder zeigen sie eine Tempe-

---

<sup>1)</sup> Siehe für die Auswahl der Pflanzen: Rec. des Trav. bot. néerl. 34, 1937, S. 92.

raturerhöhung, oder sie erwärmen sich nicht.<sup>1)</sup> Bei obiger Versuchsanordnung trifft der zuletzt erwähnte Fall zu, da die männlichen Blüten bereits am Tage vor der Kolbenentfaltung entfernt waren. Diese Gesetzmässigkeit bietet uns eine einfache Kontrolle unserer Arbeitsmethode: injiziert man in die eine Hälfte eine Lösung mit dem Aktivator und in die andere Hälfte die gleiche Menge Wasser oder Pufferlösung, so hat nur dann der Versuch den Beweis erbracht, wenn der zuerst erwähnte Teil des Anhangsels positiv und der zweite nicht reagiert. Immer habe ich diese Versuchsanordnung angewendet. Die Kontrollhälften (entweder die Spitze oder die Basis) zeigen nie die geringste Spur einer Erwärmung (Genauigkeit der Messungen: 0,1°). Zwecks Raumersparnis gebe ich diese Temperaturmessungen nur in der ersten Abbildung.

Bei quantitativen Messungen ist es vorteilhaft die basale Hälfte als Versuchspflanze zu verwenden.

#### *Die Grundversuche.*

Erst nach diesen Vorbereitungen können wir die Richtigkeit unserer Hypothese experimentell beweisen.

$\frac{1}{4}$ —1 ccm des Extraktes der männlichen Blüten werden möglichst steril im Markgewebe des Testobjektes injiziert. Bei Verwendung der basalen Hälfte wird die Flüssigkeit 2 cm unter die obere Schnittfläche eingespritzt und das Thermoelement in der Mitte des Organs gestellt; im Falle des Appendixgipfels injizierte ich an der Stelle, wo das Markgewebe aufhört und bestimmte ich die Oberflächentemperatur 2 cm niedriger. Das Einspritzen gelingt leicht, da das Markgewebe grosse Lufträume enthält. Sie sind durch Zerreissen und Zusammenfallen der Zellen entstanden. Da sie sich im unteren Teil der Anhangsels stark verengen, verliert man in der basalen Hälfte nur wenig der injizierten Substanz. Hingegen tritt bei Verwendung des Appendixgipfels ein grösserer Teil der eingespritzten Substanz aus der Schnittfläche heraus. Die basale Hälfte eignet sich also für diese Versuche am besten.

Abb. 1 zeigt die Temperaturkurve einer Testpflanze (Appendixbasis) nach Injektion mit  $\frac{1}{2}$  ccm Extrakt. Letzterer wurde aus 10 Blütenkolben gewonnen und hatte ein Endvolumen von  $2\frac{1}{2}$  ccm ( $p_H$ : 5,4). Der Appendixgipfel erhielt  $\frac{1}{2}$  ccm Phosphatpuffer (1/15 mol;  $p_H$ : 5,3); er erwärmt sich nicht.

Nach Verabreichung des Extraktes tritt eine starke Temperatursteigerung auf, welche bei diesem Versuch 6° beträgt. Die Kurve steigt rasch an und erreicht ihr Maximum in etwa  $2\frac{1}{2}$  Stunden. Nach Ueberschreiten

<sup>1)</sup> Vgl. Mitt. II. In diesem Jahre konnte ich über etwa 400 blühenden Sauromatum-Planzen verfügen. 9 Blütenkolben hatten keinen Appendix. In 5% der Infloreszenzen war das Anhangsel abnormal entwickelt; die Spitze ist gekrümmkt, verdickt, verzweigt oder verkümmert. Während diese Spitzen keine Temperaturerhöhung zeigen, kann der basale Teil normal reagieren.

des Höhenpunktes sinkt sie wieder schnell ab; der ganze Vorgang ist in 8—9 Stunden beendet. Sie stimmt also vollkommen mit der Temperaturkurve eines normalen Anhängsels überein.

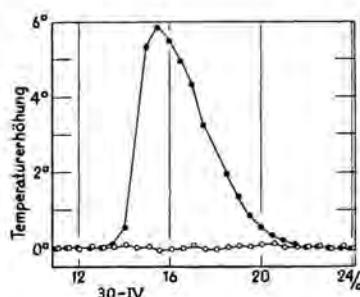


Abb. 1. Am 27-IV-20 wurden die ♂ Blüten eines Blütenstandes entfernt; am 29-IV-17 wurde der Appendix abgeschnitten und in zwei Hälften geteilt. Sofort wurde injiziert:  
 in den basalen Teil:  $\frac{1}{2}$  ccm Extrakt (Temperaturkurve —●—●—●—)  
 in den Appendixgipfel:  $\frac{1}{2}$  ccm Phosphatpuffer ( $^{1/15}$  mol;  $p_H$ : 5,3) (Temperaturkurve —○—○—○—).  
 Anfang der Temperaturregistrierung: 29-IV-17, 30;  
 Ende: 6-V-20.  
 Temperatur des Versuchszimmers:  $21,9^\circ \pm 0,1$ ;  
 Relative Feuchtigkeit der Luft: 70—85 %.

In den injizierten Appendices verlaufen alle Nebenreaktionen wie in den normal blühenden Pflanzen. Mikroskopisch erhält man ähnliche Bilder. Die Abnahme der Blaufärbung mit Jod zeigt, dass das Reservematerial (Stärke) während der Reaktion fast vollständig verschwindet. Ebenfalls tritt bei der geringsten Temperatursteigerung der Farbwechsel des Anhängsels, von hellrot in rötlich-braun, ein.

Aus diesen Versuchen dürfen wir schliessen, dass die Zone der Infloreszenz, welche die männlichen Blüten trägt, eine Substanz bildet, die, im Appendix injiziert, eine normale Temperaturerhöhung hervorrufen kann.

Nach Verabreichung des Aktivators tritt die Erwärmung erst nach 19—22 Stunden ein. Die Temperatur des Versuchszimmers war ungefähr  $22^\circ$ ; der Sättigungsgrad der Luft schwankte zwischen 70 % und 85 %. Ob die Latenzzeit variiert bei Änderung der äusseren Bedingungen, wurde nicht untersucht. Sie ist unabhängig von der Empfindlichkeit des Testobjektes und von der Grösse der Temperatursteigerung.

Die Exstirpation der männlichen Blüten verhindert nur dann die Wärmebildung, wenn man die Operation mindestens 18—21 Stunden vor dem Anfang der Reaktion ausführt. Diese kritische Zeit ist fast genau gleich der Latenzzeit nach der Injektion. Man kann das so erklären: der Aktivator wandert einen Tag vor der Kolbenentfaltung nach dem Appendix und entfaltet in diesem Organ seine Wirkung nach  $\pm 20$  Stunden. Entfernt man die männlichen Blüten vor der Stoffwanderung, so kann der Kolbengipfel sich nie erwärmen; führt man dagegen die Operation nach der Wanderung aus, — wenn sich eine relativ grosse Aktivatormenge im Anhängsel befindet —, so ändert sie den normalen Vorgang nicht.

Nicht nur der Appendix, sondern auch die männlichen Blüten und der sterile Teil erwärmen sich. Meiner Meinung nach werden diese Tempe-

ratursteigerungen von denselben chemischen Prozessen hervorgerufen. Dann bedürfen die Atmungssysteme aller dieser Organe des Aktivators für ihre Wirkung. Nach dieser Anschauung dürfen wir erwarten, dass dasjenige Organ sich am ersten erwärmt, welches diesen Aktivator bildet. Tatsächlich trifft das zu. Ohne Ausnahme fängt die Erwärmung immer in den männlichen Blüten an, und — wie ich unten näher zeigen werde — bilden sie allein den wirksamen Stoff.

Man gewinnt aus der Reihenfolge der Temperaturmaxima in den verschiedenen Zonen der Infloreszenz keine nähere Auskunft über die Wanderungsrichtung und -Geschwindigkeit des Aktivators. So verschiebt das Temperaturmaximum im oberen Kolbenende sich von der Spitze zur Basis, während der Aktivator hier von unten nach oben geleitet wird. Hieraus ergibt sich, dass auch andere Faktoren den Atmungsmechanismus des Blütenstandes regulieren.

Der Extrakt aus den männlichen Blüten ist nicht beständig: im Eisschrank aufbewahrt verliert er seine Aktivität in 24 Stunden vollkommen. Die Wirksamkeit ist stark herabgesetzt, nachdem er 10 Minuten im kochenden Wasserbad erwärmt und danach wieder klar zentrifugiert worden ist.

Reagieren alle Versuchspflanzen in gleicher Weise? Zur Beantwortung dieser Frage wurde der folgende Versuch angestellt. Die Erwärmungskurven von sechs Reaktionspflanzen, die mit gleicher Aktivatormenge injiziert worden waren, wurden mit einander verglichen. Sie stimmten fast vollkommen überein. Der Zeitpunkt der stärksten Erwärmung ist in allen Pflanzen derselbe. Kaum nennenswert sind die Schwankungen in den Latenzzeiten: die Unterschiede können eine Stunde betragen, d.h. also eine Abweichung von 5 Prozent; dagegen sind die Differenzen zwischen den Temperaturmaxima recht erheblich: sie weichen 15—20 % ab.

#### *Der Einfluss des Testobjektes.*

Weitere Versuche dienten der Entscheidung der Frage, ob die Temperaturkurve von der Vorbehandlung des Testobjektes abhängig ist.

Hängt die Empfindlichkeit des Testobjektes von dem Zeitpunkt der Exstirpation der männlichen Blüten ab? Das Resultat eines Versuches ist aus der zweiten Abbildung zu ersehen. Die männlichen Blüten eines Blütenstandes (A) werden  $3\frac{1}{2}$  Tage, die eines zweiten (B)  $1\frac{1}{2}$  Tage vor der Kolbenentfaltung entfernt. Nach 36 Stunden werden die Kolbengipfel abgeschnitten; A wird noch 3 Tage und B 1 Tag im Versuchszimmer auf Wasser gestellt. Danach injiziert man die Anhängsel mit einer gleichen Menge des Aktivators. Die beiden Temperaturkurven haben einen ähnlichen Verlauf; die beobachteten Differenzen könnten gleichfalls zwischen zwei Individuen einer Reihe gleichbehandelter Reaktionspflanzen austreten.

Auch entfernte ich die männlichen Blüten ehe der Kolben völlig

entwickelt war und bestimmte zwei Tage nach der Operation die Reaktionsfähigkeit des Anhängsels. Nach Verabreichung der wirksamen

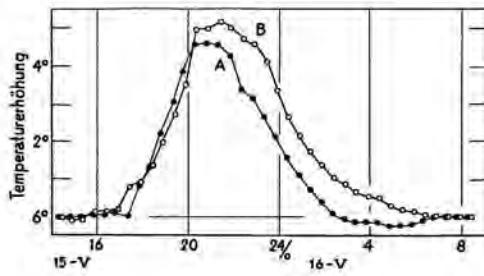


Abb. 2. Appendix A: ♂ Blüten entfernt am 10-V-8,30; Appendix abgeschnitten: 11-V-17.

Appendix B: ♂ Blüten entfernt am 12-V-9,30; Appendix abgeschnitten: 13-V-21,30.

Die basalen Teile beider Appendices wurden am 14-V-21,30 injiziert mit  $\frac{1}{2}$  ccm Extrakt.

Temperatur des Versuchszimmers:  
22,0° ± 0,1; Sättigungsgrad der Luft: 73—83%.

Substanz ist die gemessene Temperaturerhöhung gering oder bleibt sogar völlig aus. Sieben bis fünf Tage vor der Kolbenentfaltung reagiert der Appendix noch nicht.

Ebenfalls untersuchte ich den umgekehrten Fall: inwiefern das Testobjekt auf eine Injektion nach der normalen Blütenzeit reagieren kann. Es stellte sich heraus, dass seine Empfindlichkeit fortwährend kleiner wurde bis zuletzt (nach 3—4 Tagen) keine Reaktion mehr möglich war. Diese Inaktivierung ist immer begleitet von einer starken Vergrösserung der Lufträume im Markgewebe und von einer Abnahme des Wassergehaltes im Anhängsel.

Die Geschwindigkeit mit der die Versuchspflanzen sich entwickeln, hat einen relativ grossen Einfluss auf die Reaktionsfähigkeit des Testobjektes. Seine Empfindlichkeit ist am geringsten, wenn die Entwicklungszeit am grössten ist.

Die Temperatursteigerung ist abhängig von der Wirkung der injizierten Substanz und von den Versuchsbedingungen (Temperatur, Luftfeuchtigkeit), ausserdem von dem Entwicklungsgrad und der Grösse des Testobjektes und von den äusseren Verhältnissen während des Wachstums des Blütenstandes. Ein direkter Vergleich der Absolutwerte der Steigerungen ist daher unstatthaft. Man darf nur die Kurven untereinander vergleichen, die an einem Tage mit Pflanzen einer Versuchsreihe erhalten worden sind.

#### *Der Einfluss der Konzentration des Aktivators.*

Bisher habe ich nur die Frage erörtert, inwiefern eine bestimmte Menge des wirksamen Stoffes bei den verschiedenen Reaktionspflanzen die gleiche Erwärmung hervorruft. Die wichtigsten Fragen sind aber, ob der Grad der Erwärmung von der Konzentration des Stoffes abhängt und ob dieser ein quantitatives Mass für die Aktivatormenge ist.

Im folgenden Versuch (Abb. 3 A) habe ich sechs Testobjekte mit  $\frac{1}{2}$  ccm einer Aktivatorlösung injiziert und zwar die Pflanzen A I und II mit der

unverdünnten Lösung; B I und II nach Verdünnung mit Wasser 1 : 4; C I und II nach Verdünnung 1 : 16. Ein ccm der konzentriertesten Lösung enthält den Auszug aus den männlichen Blüten von etwa 5 Pflanzen. Die Temperatursteigerung ist in den A-Pflanzen am grössten und in den C-Pflanzen am geringsten. Die gemessenen Maxima sind im Durchschnitt 4,5°, 1,6° und 0,5°. Die Differenzen liegen weit außerhalb der Fehlergrenzen der Kontrollversuche. Die Latenzzeit hängt nur in geringem Masse von der Aktivatormenge ab: die Versuchspflanzen fangen fast im selben Moment an sich zu erwärmen. Die Dauer der Temperaturerhöhung ist von der Konzentration abhängig: die Reaktion hört in den C-Pflanzen am ersten wieder auf.

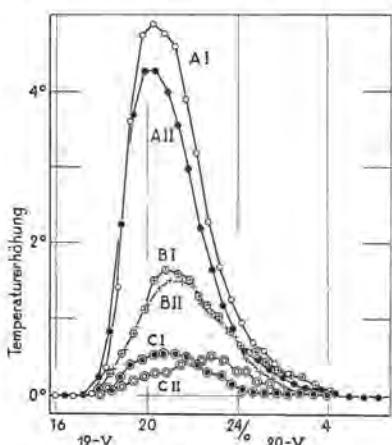


Abb. 3 A. Der Einfluss der Aktivatormenge auf die Temperaturkurve.

♂ Blüten entfernt am 16-V-8,30; die Appendices abgeschnitten am 18-V-8,30.

Die basalen Hälften wurden am 18-V-21,30 injiziert mit:

½ ccm Extrakt ..... A I und II  
½ ccm Extrakt (1 Teil Extrakt und

3 Teile Wasser) ..... B I und II

½ ccm Extrakt (1 Teil Extrakt und

15 Teile Wasser) ..... C I und II

Temperatur des Versuchszimmers: 21,0° ± 0,1;

Sättigungsgrad der Luft: 77—83 %.

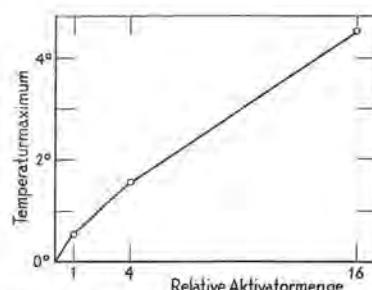


Abb. 3 B. Die Abhängigkeit der maximalen Temperatursteigerung von der Aktivatorkonzentration.

Abszisse: die relative Konzentration des Aktivators.

Ordinate: die Temperatursteigerung.

Die Stärke ist in den A-Pflanzen am Ende des Versuches fast völlig verschwunden; die noch vorhandene Menge ist nicht grösser als in den Kontrollkolben: nur kleine Zellgruppen färben sich mit einer J—KJ-Lösung schwach blau. Die Pflanzen der zweiten Gruppe enthalten grössere Stärkemengen, während der Stärke-Verbrauch in den Anhängseln der C-Pflanzen gering ist.

Aus diesen Versuchen geht hervor, dass *im Appendix die Intensität der Verbrennungsprozesse von der Konzentration des Aktivators abhängig ist.*

Die Temperaturerhöhung ist nach Injektion einer grösseren Aktivatormenge immer stärker; sie ist jedoch nicht direkt proportional der Konzentration (Abb. 3 B). Es ergibt sich, dass man mit vergleichenden Versuchen relative Konzentrationswerte erhalten kann. Eine grosse Genauigkeit erreicht man mit dieser Methode nicht, da man bei Wiederholung der Versuche schon beträchtliche Abweichungen erhält. Wiederholt man jeden Versuch drei Mal, so erhält man die relativen Werte mit einem Versuchsfehler von 15 %.

*Die Konzentrationsänderungen des Aktivators in den männlichen Blüten.*

Im Zusammenhang mit dem Problem der biologischen Bedeutung der isolierten Substanz, möchte ich kurz näher eingehen auf die Frage der Konzentrationsänderungen des Aktivators während der verschiedenen Stadien der Kolbenentwicklung. Man erhält keine wirksamen Lösungen, wenn man junge männliche Blüten extrahiert. Der Nachweis des Stoffes gelingt erst einen Tag vor der Blütenentfaltung. Man kann ihn am leichtesten isolieren kurze Zeit bevor der Appendix sein Erwärmungsmaximum erreicht. Macht man einen Auszug während des Zeitabschnittes zwischen dem Erkalten des Anhängsels und der Pollenemission, — d. h. also nach dem Erwärmungsmaximum der männlichen Blüten, — so ist derselbe in den meisten Fällen inaktiv. Nach der Pollenemission ist der Aktivator nicht mehr vorhanden.

*Ueber das Vorkommen des Aktivators in anderen Teilen der Pflanze.*

Es ist wichtig zu untersuchen, ob der aktive Stoff in anderen Teilen des Sauromatumkolbens vorhanden ist. Ich extrahierte die Organe, wie oben beschrieben wurde. Die Temperatursteigerungen, die in den Testobjekten auftreten nach Injektion dieser Lösungen, wurden verglichen mit denjenigen der Auszüge aus den männlichen Blüten (Vergleichslösungen). Man bestimmt so das Verhältnis der Aktivatorkonzentrationen in den untersuchten Organen und in den männlichen Blüten. Das Endvolumen der Lösungen war 2 ccm (2 gr.), entsprechend 5 gr Frischgewicht des Organs. Ich injizierte  $\frac{1}{2}$  bezw.  $2 \times \frac{1}{2}$  ccm.

Ich möchte hervorheben, dass nach einer Verdünnung 1 : 7 der Vergleichslösungen, immer eine Temperatursteigerung nachweisbar war. Tritt nach Zusatz der Versuchslösung keine Reaktion auf, so dürfen wir schliessen, dass sie entweder keinen Aktivator enthält oder eine Menge, die geringer ist als  $1/7$  Teil der Vergleichslösung.

Wegen Materialmangel habe ich die Versuchsanordnung in vielen Experimenten in diesem und dem nächsten Abschnitt vereinfacht. Die Anhängsel wurden 2 Tage vor der Blüte abgeschnitten ohne vorher die männlichen Blüten zu entfernen. Sie wurden 36 Stunden auf Wasser gestellt und danach sowohl ihre oberen wie ihre basalen Teile als Testobjekte verwendet. Es fehlen also die Kontrollversuche (die Injektionen mit Wasser oder Pufferlösungen). Diese Versuchsanordnung beeinträchtigt

das Ergebnis der qualitativen Versuche nicht. Das Abschneiden des Anhängsels hemmt die Entwicklung der männlichen Blüten nicht; ich isolierte den Aktivator aus dieser Zone des Blütenstandes.

Viele Bedenken sind gegen die Extraktionsmethode geltend zu machen. Durch die Zerkleinerung der Zellen könnten chemische Veränderungen auftreten, bei der die wirksame Substanz vernichtet wird. Auch wären die Messungen nicht mehr einwandfrei, wenn die Organe Stoffe enthalten würden, welche die Wirkung des Aktivators hemmen. Man würde so im Extrakt die Gesamtwirkung der Aktivierungs- und Hemmungskörper feststellen, während sie in den Zellen getrennt vorhanden sein könnten.

Gerade die zuerstgenannte Fehlerquelle ist zu befürchten, da der Aktivator wenig beständig ist. Ich versuchte den Einfluss festzustellen, den diese Fehlerquelle auf die erhaltenen Resultate haben könnte.

In einigen Versuchen teilte ich das Gewebe in zwei Hälften und fügte zu der einen eine bestimmte Aktivatormenge hinzu. Beide Teile wurden zerrieben und in gleicher Weise extrahiert. Es stellte sich heraus, dass die Aktivität des zweiten Extraktes nicht genau die Summe der Aktivitäten des ersten Auszuges und des Aktivators ist. Es treten immer Verluste auf; sie betragen 30—40 %. Der höchste Wert, den ich beobachtete, war 60 %. Der Fehler ist am grössten, wenn die zugefügte Substanzmenge gering ist. Die Inaktivierungen werden nicht von einem bestimmten Gewebe verursacht; sie treten auch bei den männlichen Blüten auf.

Aus diesen Versuchen geht einerseits hervor, dass die Konzentrationsbestimmungen nur einen orientierenden Wert haben, andererseits, dass man das Vorhandensein der aktiven Substanz noch nachweisen kann, wenn das Gewebe  $\frac{1}{4}$ — $\frac{1}{7}$  Teil der Aktivatormenge der männlichen Blüten enthält.

Bemerkenswert sind die Ergebnisse der Versuche über das Vorhandensein des Aktivators in verschiedenen Teilen des Blütenstandes. *Weder die Extrakte der weiblichen Blüten, noch die aus dem sterilen Teil oder dem Appendix aktivieren die Testobjekte.* Diese sind unabhängig von dem Zeitpunkt der Probeentnahme. So ist auch einige Stunden vor der Erwärmung kein wirksamer Stoff im Appendix vorhanden.

In diesem Zusammenhang ist natürlich die Frage nach dem Verhalten der in den Testobjekten injizierten wirksamen Substanz nicht ohne Interesse. Ich gebe im Folgenden einen Versuch wieder, bei dem ich drei Gruppen von je zwei Testobjekten mit gleichen Aktivatormengen injizierte und die Pflanzen der ersten Gruppe nach  $1\frac{1}{2}$  Stunden extrahierte und die der zweiten Gruppe nach  $14\frac{1}{2}$  Stunden, also kurze Zeit vor dem Anfang der Erwärmung. Die dritte Gruppe war die Kontrolle; sie zeigte eine starke Temperaturerhöhung und wurde erst nach dem Erkalten untersucht. Aus den Pflanzen der zuerst erwähnten Gruppe habe ich 30 % der injizierten Substanzmenge wieder isolieren können; in allen anderen Testobjekten ist der Aktivator nicht mehr vorhanden.

In welcher Weise können wir diese Versuchsergebnisse zu erklären versuchen?

Erstens könnte man daran denken, dass der Aktivator ein notwendiger Bestandteil des Atmungssystems ist, entweder des anaeroben oder des oxydativen Teilverganges. Dann müsste man aus obigen Versuchen schliessen, dass die Organe nur scheinbar keinen Aktivator enthalten. Seine Menge wäre so gering, dass sie bei der biologischen Analyse nicht erfasst würde. Nur in derjenigen Zone der Infloreszenz, welche die männlichen Blüten trägt, ist die Konzentration außerordentlich gross. Würde diese Anschauung zutreffen, so bleibt zu erklären übrig, weshalb die Reaktion von der Konzentration des Aktivators abhängig ist, da, — immer noch nach dieser Darstellung —, die Substanz in grossem Uebermass injiziert worden ist. Auch wäre es schwer zu erklären, dass die Temperatur- und Atmungserhöhung in den männlichen Blüten einerseits so viel geringer ist, und andererseits so viel längere Zeit anhält als im Appendix. Eine direkte Teilnahme des Aktivators an den Atmungsprozessen scheint vor allem deshalb ausgeschlossen, weil die Latenzzeit der Reaktion so gross ist.

Zweitens könnte die isolierte Substanz nur indirekt auf die Atmungsprozesse der Zellen einwirken. Die dritte Möglichkeit, dass sie das Atmungssubstrat der Appendixzellen wäre, kommt nicht in Betracht<sup>1)</sup>.

Es ist nicht wahrscheinlich, dass die biologische Bedeutung des Stoffes darin zu suchen wäre, dass derselbe, — im allgemeinen —, die Lebensfähigkeit der Zellen erhöht; denn so könnte man die oft explosionsartigen Temperatursteigerungen nicht erklären. Vielmehr müssen wir annehmen, dass er ein Pro-Aktivator ist, der in den Appendixzellen im Katalysator umgewandelt wird. Nach dieser Vorstellung würde er im Organ vernichtet und bei der Extraktion nicht isoliert werden. Man müsste dann annehmen, dass der Aktivator selbst eine sehr labile Substanz sei. In dieser Richtung wäre vielleicht auch die Lösung des Problems der langen Latenzzeit der Reaktion zu suchen: diese ist abhängig von der Geschwindigkeit, mit der die Zwischenreaktionen verlaufen. Diese Geschwindigkeit wäre gross im Anhängsel und verhältnismässig klein in den männlichen Blüten.

Weitere Versuche werden entscheiden müssen, welche von diesen Theorien zutrifft. Das erfordert vor allem jedoch, dass wir die Methoden zum Nachweis und zur quantitativen Bestimmung des Stoffes viel verbessern.

#### *Der Einfluss einiger Substanzen mit bekannter chemischer Zusammensetzung.*

Die wirksame Substanz nimmt in den Zuckerabbauprozessen der Sauromatum-Kolben eine so zentrale Stellung ein, dass der Frage ihrer Spezifität eine allgemeine Bedeutung zukommt. Es fragt sich, ob man durch Zugabe anderer Stoffe ebenfalls eine Erwärmung im Appendix

---

<sup>1)</sup> Mitteilung I.

erhalten kann. Ihre chemische Zusammensetzung ist nicht bekannt; deshalb ist die Wahl der zu prüfenden Stoffe eine willkürliche. Ich habe Lösungen der folgenden Substanzen, — wenn nötig nach Neutralisation mit Natronlauge —, injiziert: Phosphatpuffer (1/30 mol.  $p_H$ : 4,5—7,5), Glukose, Saccharose, Hexosemono- und diphosphorsaures Natrium, Glycocol, Asparaginsäure, Co-Zymase, Ascorbinsäure und  $\beta$ -Indolylessigsäure. Alle Lösungen waren unwirksam. Später werde ich noch andere Substanzen untersuchen.

#### *Zusammenfassung.*

Die wichtigsten Ergebnisse der vorliegenden Arbeit können folgenderweise zusammengefasst werden:

1. Während der Entwicklung des Infloreszenzanhängsels von *Sauromatum guttatum* tritt einmal eine Atmungs- und Temperatursteigerung auf. Der ganze Enzymkomplex, der an diesen Verbrennungsreaktionen beteiligt ist, ist vor der Temperaturerhöhung fast unwirksam. Diese Unwirksamkeit ist darauf zurückzuführen, dass ein Aktivator nicht, oder nur in ungenügender Menge, vorhanden ist. Nach Injektion des Aktivators erwärmt der Appendix sich in normaler Weise nach einer Latenzzeit von 19—22 Stunden.
2. Es wird nachgewiesen, dass dieser atmungsfördernde Stoff allein in der Zone der Infloreszenz gebildet wird, welche die männlichen Blüten trägt. Derselbe fehlt in den weiblichen Blüten, im sterilen Teil und im Appendix selbst.
3. Der Aktivator ist einen Tag vor der Kolbenentfaltung bis kurze Zeit vor der Pollenemission in den männlichen Blüten vorhanden. Der Transport des Katalysators von dieser Zone des Blütenstandes nach dem Appendix findet etwa einen Tag (20—22 Stunden) vor der Erwärmung statt.
4. Innerhalb gewisser Grenzen beschränkt der Aktivator die Erwärmung völlig; ohne Aktivator keine Reaktion. Die Maxima der Temperaturerhöhungen stehen nicht im Verhältnis zu den injizierten Aktivatormengen.
5. Der Aktivator ist nicht beständig und wird vor der Erwärmungsreaktion schon aufgebracht.
6. Ueber die chemische Natur der aktiven Substanz ist nichts bekannt. Ebensowenig wissen wir, ob dieselbe die Geschwindigkeit der Enzymreaktionen des anaeroben oder des oxydativen Teiles des Atmungsprozesses beschleunigt. Auch ist ihre Stellung zu den schon bekannten Aktivatoren der Atmung noch nicht untersucht worden. Deswegen soll man jetzt noch darauf verzichten den atmungsfördernden Stoff mit einem bestimmten Namen zu bezeichnen.

**Mineralogy. — On the relation between the optical properties and the chemical composition of glaucophane.** By H. W. V. WILLEMS.  
 (Communicated by Prof. H. A. BROUWER).

(Communicated at the meeting of September 25, 1937.)

The chemical composition of the alkali-amphiboles can, according to WARREN (1 p. 493), be expressed by the general formula  $(\text{Ca}, \text{Na}, \text{K}, \text{Mn})_{2-3}(\text{Mg}, \text{Fe}, \text{Ti}, \text{Al}, \text{Mn})_5(\text{Si}, \text{Al})_8\text{O}_{22}(\text{OH}, \text{F})_2$ . Calculated according to this formula, the different glaucophanes and related minerals, of which in the literature the chemical composition as well as the optical properties are mentioned, give:

	$n_\alpha$	$n_\beta$	$n_\gamma$	2V	Optical orient.	Ca	Na	K	Mg	Fe <sup>II</sup>	Mn <sup>II</sup>	Fe <sup>III</sup>	Ti	Al	Si
1	1.606	—	1.627	—	y = b	0.15	1.83	0.12	2.62	0.61	—	0.12	—	1.91	7.79
2	1.615	—	1.634	41°	..	0.10	1.81	0.11	2.14	0.95	—	0.30	—	1.76	7.86
3	1.618	—	1.637	—	..	0.19	1.74	0.11	1.85	1.26	—	0.20	—	1.85	7.91
4	1.619	—	1.640	—	..	0.49	1.50	0.10	2.32	1.24	—	0.25	—	1.47	7.86
5	1.621	1.633	1.640	76—80°	..	1.16	1.46	0.05	3.71	—	—	0.88	0.12	0.64	7.58
6	1.622	—	1.640	—	..	0.06	1.82	0.15	1.54	1.61	—	0.17	—	2.04	7.78
7	1.629	—	1.651	—	..	1.67	0.19	0.02	4.08	0.78	0.03	0.15	—	0.10	7.88
8	1.640	—	1.652	—	..	0.24	1.75	0.07	1.55	1.42	0.04	0.76	—	1.40	7.84
9	1.655	1.664	1.668	42°	..	0.33	1.67	0.13	1.99	0.99	—	1.69	0.04	0.63	7.67

	Na+K	Al + Fe <sup>III</sup>		Fe <sup>II</sup> +Mn <sup>II</sup> +Fe <sup>III</sup>	Ca	Fe <sup>II</sup> +Mn <sup>II</sup> +Fe <sup>III</sup>	
	Al+Fe <sup>III</sup>	Ca+Mg+Fe <sup>II</sup> +Mn <sup>II</sup> +Fe <sup>III</sup> +Al	Ca+Mg+Al	Ca+Fe <sup>III</sup> +Al	Mg+Fe <sup>II</sup> +Mn <sup>II</sup> +Fe <sup>III</sup> +Al		
1	0.96	0.37	0.16	0.07		0.14	
2	0.93	0.39	0.31	0.05		0.24	
3	0.90	0.38	0.38	0.08		0.28	
4	0.93	0.30	0.35	0.22		0.28	
5	0.99	0.24	0.16	0.43		0.17	
6	0.89	0.41	0.49	0.03		0.33	
7	0.84	0.04	0.16	0.87		0.19	
8	0.84	0.40	0.70	0.10		0.43	
9	0.78	0.41	0.91	0.12		0.51	

1. glaucophane, Zermatt (2. p. 198).
2. " Champ de Praz (2. p. 198).
3. " Smyrna (2. p. 198).
4. " Mt. Salève (2. p. 202).
5. tremolite-glaucophane, Krivoi Rog (3. p. 234).
6. glaucophane, Cyclades (2. p. 198).
7. actinolite, Comet Vale (4. p. 1).
8. crossite, Berkeley (2. p. 198).
9. ternovskite, Krivoi Rog (3. p. 233).

In all these analyses the replacement of Si by Al + Na is of very subsidiary importance, for Si differs only slightly from the theoretical amount = 8. Also in all of them  $\text{Na} + \text{K} < \text{Al} + \text{Fe}^{\text{III}}$ , but the difference never amounts to very much, for the proportion  $\frac{\text{Na} + \text{K}}{\text{Al} + \text{Fe}^{\text{III}}} = 0.78 - 0.99$  as is shown in fig. 1. The amount of glaucophane-riebeckite is therefore

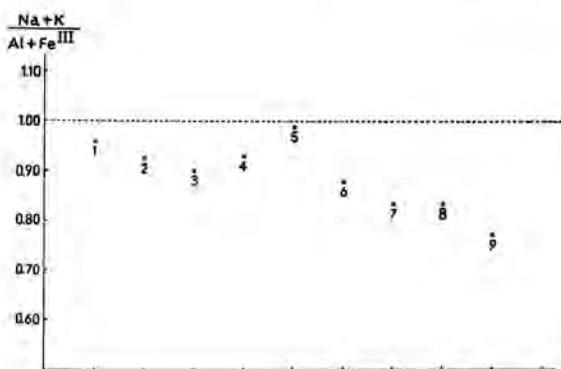


Fig. 1. Graphic representation of the proportion  $\frac{\text{Na} + \text{K}}{\text{Al} + \text{Fe}^{\text{III}}}$  (the numbers refer to those of the analyses).

mainly determined by  $\text{Al} + \text{Fe}^{\text{III}}$ , the more so because in the determination of  $\text{Al}_2\text{O}_3$  and  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  the general tendency is to find these too high, on account of:

1. non- or partial determination of  $\text{SiO}_2$  in the  $\text{R}_2\text{O}_3$  precipitate.
2. non-determination of  $\text{MnO}$ ,  $\text{TiO}_2$ ,  $\text{P}_2\text{O}_5$ ,  $\text{ZrO}_2$ , rare earths, etc.
3. oxidation of  $\text{Fe}^{\text{II}}$  to  $\text{Fe}^{\text{III}}$  while in the determination of  $\text{Na}_2\text{O}$  and  $\text{K}_2\text{O}$  there is a tendency to low results. Furthermore the proportion

$$\frac{\text{Al} + \text{Fe}^{\text{III}}}{\text{Ca} + \text{Mg} + \text{Fe}^{\text{II}} + \text{Mn}^{\text{II}} + \text{Fe}^{\text{III}} + \text{Al}} \leq \pm 0.40,$$

as is shown in fig. 2, which is in agreement with the formulas for glaucophane =  $\text{Na}_4\text{Mg}_6\text{Al}_4\text{Si}_{16}\text{O}_{44}(\text{OH}, \text{F})_4$  and riebeckite =  $\text{Na}_6\text{Fe}_6^{\text{II}}\text{Fe}_4^{\text{III}}$

$\text{Si}_{16}\text{O}_{46}(\text{OH})_2$  given by BERMAN (5. p. 359) and with the conceptions of

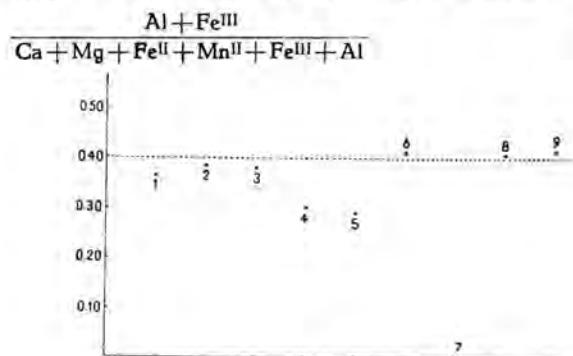


Fig. 2. Graphic representation of the proportion  $\frac{\text{Al} + \text{Fe}^{3+}}{\text{Ca} + \text{Mg} + \text{Fe}^{2+} + \text{Mn}^{2+} + \text{Fe}^{3+} + \text{Al}}$  (the numbers refer to those of the analyses).

KUNITZ (2. p. 204) concerning the miscibility between glaucophane-riebeckite and tremolite-actinolite. It is possible that the proportion

$$\frac{\text{Al} + \text{Fe}^{3+}}{\text{Ca} + \text{Mg} + \text{Fe}^{2+} + \text{Mn}^{2+} + \text{Fe}^{3+} + \text{Al}}$$

amounts to more than 0.40 on account of:

1. replacement of Si by Al + Na.
2. determinations of  $\text{Al}_2\text{O}_3$  and  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  being apt to be high, as already set forth.
3. FeO being frequently found too low.
4. non-determination of MnO.

Those analyses also show that it is impossible to express the chemical composition in what are usually called endmembers as glaucophane =  $\text{Na}_2\text{Mg}_3\text{Al}_2\text{Si}_8\text{O}_{22}(\text{OH}, \text{F})_2$ , riebeckite =  $\text{Na}_3\text{Fe}_3^{\text{II}}\text{Fe}^{\text{III}}_2\text{Si}_8\text{O}_{23}(\text{OH})$ , tremolite =  $\text{Ca}_2\text{Mg}_5\text{Si}_8\text{O}_{22}(\text{OH})_2$  and actinolite =  $\text{Ca}_2\text{Fe}_5^{\text{II}}\text{Si}_8\text{O}_{22}(\text{OH})_2$ . Then for instance  $\text{Mg} \geq 1.5 \text{ Al}$ , while glaucophane of Smyrna contains only 1.54 Mg and 2.04 Al. Therefore the relation between the optical properties and the chemical composition cannot be plotted in the familiar diagrams. Careful examination of those analyses, however, shows that both refractive indices,  $n_x$  and  $n_y$ , increase rather gradually with increasing content of  $\text{Fe}^{2+} + \text{Mn}^{2+} + \text{Fe}^{3+}$ , as is graphically represented in fig. 3, in which is plotted the relation between the refractive indices  $n_x$  and  $n_y$  and the proportion  $\frac{\text{Fe}^{2+} + \text{Mn}^{2+} + \text{Fe}^{3+}}{\text{Mg} + \text{Ca} + \text{Al}}$ . Though it is possible to draw a smooth curve through the analyses 1, 2, 3, 6, 8 and 9, the remaining ones, 4, 5 and 7, deviate very much, but those are the very analyses for which according to fig. 2 the proportion  $\frac{\text{Al} + \text{Fe}^{3+}}{\text{Ca} + \text{Mg} + \text{Fe}^{2+} + \text{Mn}^{2+} + \text{Fe}^{3+} + \text{Al}}$  amounts to much less than 0.40. The lower this proportion, the more

the refractive indices will deviate from the curves, as will be easily seen from combining with each other the figs 2 and 3. Apparently the optical

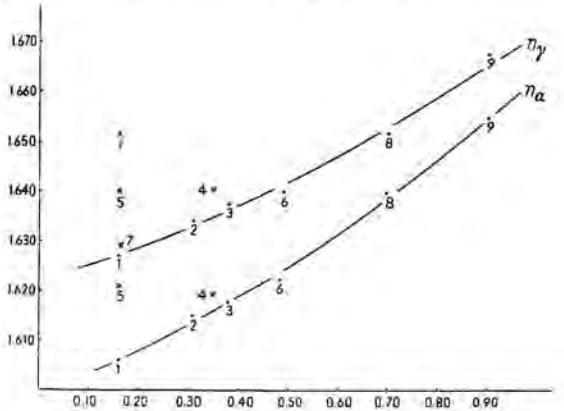


Fig. 3. Relation between the refractive indices and the proportion  $\frac{\text{Fe}^{II} + \text{Mn}^{II} + \text{Fe}^{III}}{\text{Mg} + \text{Ca} + \text{Al}}$  (the numbers refer to those of the analyses).

properties are not only dependent on the amount of  $\text{Fe}^{II} + \text{Mn}^{II} + \text{Fe}^{III}$  but also on the amount of Ca that is present; in other words they seem to be largely controlled by the relation of glaucophane to riebeckite, as

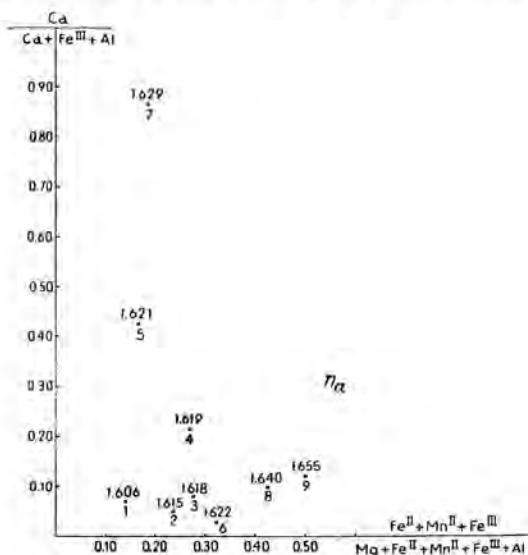


Fig. 4. Graphic representation of  $n_\alpha$  (the numbers refer to those of the analyses).

well as by the proportion of glaucophane + riebeckite to tremolite + actinolite. The proportion of tremolite + actinolite to glaucophane + riebeckite can be expressed by  $\frac{\text{Ca}}{\text{Ca} + \text{Fe}^{III} + \text{Al}}$  and the proportion of

riebeckite to glaucophane as well as the proportion of actinolite to tremolite by  $\frac{\text{Fe}^{\text{II}} + \text{Mn}^{\text{II}} + \text{Fe}^{\text{III}}}{\text{Mg} + \text{Fe}^{\text{II}} + \text{Mn}^{\text{II}} + \text{Fe}^{\text{III}} + \text{Al}}$ . Plotting the optical constants against these two proportions gives the figs 4 and 5, from which can

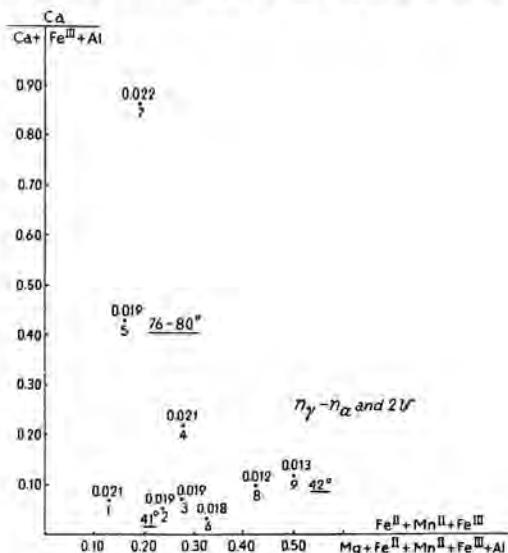


Fig. 5. Graphic representation of  $n_{\gamma} - n_{\alpha}$  and  $2V$  (the numbers refer to those of the analyses).

be seen that the refractive indices increase rapidly with increasing  $\frac{\text{Fe}^{\text{II}} + \text{Mn}^{\text{II}} + \text{Fe}^{\text{III}}}{\text{Mg} + \text{Fe}^{\text{II}} + \text{Mn}^{\text{II}} + \text{Fe}^{\text{III}} + \text{Al}}$ , but slowly with increasing  $\frac{\text{Ca}}{\text{Ca} + \text{Fe}^{\text{III}} + \text{Al}}$ . On the other hand, the birefringence decreases with increasing  $\frac{\text{Fe}^{\text{II}} + \text{Mn}^{\text{II}} + \text{Fe}^{\text{III}}}{\text{Mg} + \text{Fe}^{\text{II}} + \text{Mn}^{\text{II}} + \text{Fe}^{\text{III}} + \text{Al}}$  and probably increases slightly with increasing  $\frac{\text{Ca}}{\text{Ca} + \text{Fe}^{\text{III}} + \text{Al}}$ , as probably does also  $2V$ , so that, as far as our present knowledge of glaucophane is concerned, it seems possible to some extent to predict the chemical composition of a glaucophane, when its refractive indices and  $2V$  are known.

#### LITERATURE.

1. B. E. WARREN: The crystal structure and chemical composition of the monoclinic amphiboles. Zt. f. Krist. **72**, p. 493, 1930.
2. W. KUNITZ: Die Isomorphieverhältnisse in der Hornblendegruppe. N. J. Min. Geol. Pal. BB, **60 A**, p. 171, 1930.
3. I. POLOVINKINA: On some interesting amphiboles from the rocks of Krivoi Rog. Mém. Soc. Russe. Min. **53**, p. 199, 1924.
4. E. S. SIMPSON: Contributions to the mineralogy of Western Australia. Journ. Roy. Soc. W. Australia, **22**, p. 1, 1936. Min. Mag. Abstracts **6**, p. 362, 1936.
5. H. BERMAN: Constitution and classification of the natural silicates. Am. Min. **22**, p. 342, 1937.

**Histology.** — *Grundlinien einer Theorie der Golgikörper. II. Die Golgikörper in der Zeit.* (Vorläufige Mitteilung). Von GOTZWALT CHRISTIAN HIRSCH. (Aus dem Laboratorium für experimentelle Morphologie des Zoologischen Instituts Utrecht). (Communicated by Prof. H. J. JORDAN.)

(Communicated at the meeting of September 25, 1937.)

In der vorhergehenden Mitteilung sind die ersten beiden Teile einer Systemtheorie des Golgikörpers im Raume dargelegt worden. Hier folgt der dritte Teil über das Verhalten des Golgikörpers in der Zeit. Ich schöpfe auch diesen Teil der Theorie teils aus eigenen Erfahrungen, teils aus Angaben der Litteratur. Es ist begreiflich, dass man allgemein zuerst feststellen wollte, welches die Statik des Golgikörpers sei und welche Funktion er ausübe. Seltener hat man sich gefragt und ist der Frage experimentell nachgegangen: welches ist das Schicksal des Golgikörpers in der Zeit? So kommt es, dass wir heute mehr wissen über die Struktur und über die Eigenschaften der Golgikörper, als über ihr Werden und Vergehen. Und doch bietet nur die Untersuchung des Schicksals des Golgikörpers den Schlüssel zum Verständnis des Zusammenhangs jener allzu vielen Stoffwechsel-Strukturen, welche in den Zellen beschrieben wurden. Nur die Untersuchung des Werdens und Vergehens der Golgikörper ermöglicht es zu erkennen; in welchem Verhältnis z.B. „Golgsubstanz“, Vakuom, Neutralrotgranula, Mitochondrien, Sekretstoffe und Plasma zueinanderstehen. Die Babylonische Sprachverwirrung, welche heute auf dem Gebiete der Lehre der Stoffwechselstrukturen der Zelle herrscht, ist grösztenteils zu danken an die rein statische Einstellung der Untersucher, welche meist nur eine einzige Zustandsform des Golgikörpers sahen und beschrieben. Hinzu kommt, dass viele Untersucher eine Vertiefung unserer Kenntnisse in der breiten Masse von Zellarten oder Tierarten suchten, statt eine einzige Zellart in ihrer Dynamik experimentell zu prüfen. So kommt es, dass man ursprünglich und noch häufig sogar heutzutage den „Golgiapparat“ für eine feststehende „Maschine“ hält. Wir wissen aber, dass die mit Osmiumsäure imprägnierbaren schwarzen Ränder, oder Netze, oder (wie wir es heute sagen): die Grenzschicht der Golgikörper in ihren Eigenschaften z.B. Osmiumsäure zu adsorbieren und reduzieren wechseln.

### *Dritter Teil der Theorie: Der wechselnde Zustand der Golgikörper.*

Noch BOWEN hat 1923—1929 geglaubt, der Apparat bliebe „als ein kompaktes Netz“ erhalten. Wahrscheinlich als erster hat J. HIRSCHLER

auf das Anwachsen des „Apparatum internum“ und das allmähliche Vergehen des „Apparatum externum“ aufmerksam gemacht. Es ist bezeichnend, dass die erste gute Analyse der Golgikörper während der Histogenese der Spermien gemacht wurde: hier war man gewöhnt, dynamisch zu denken. Die Untersuchungen von BOWEN, GATENBY, KARPOWA, AVEL, KIRCHNER und zahlreichen anderen Forschern haben hier gezeigt, welchen Wandel die „idiosomalische Substanz“ im Zusammenhang mit dem „Golgiapparat“ durchmacht: beide bilden einen Komplex von Golgikörpern, aus welchem sich das Acrosom allmählich differenziert. Ich halte es für sehr wahrscheinlich, dass die „idiomatische Substanz“ einer Summe von Innenkörpern entspricht, die an bestimmten Stellen ihrer Aussenschicht Osmiumsäure adsorbieren und reduzieren, aber nur in einem gewissen Entwicklungsstadium.

Dann hat besonders JACOBS 1927 die Genese eines Golgikörpers in der Mittelarmdrüse von Astacus durch eine Stufenuntersuchung dargestellt (Abb. 1) und gezeigt, wie zuerst der ganze Körper Osmiumsäure reduziert, wie der Innenkörper dann immer mehr anwächst, während die

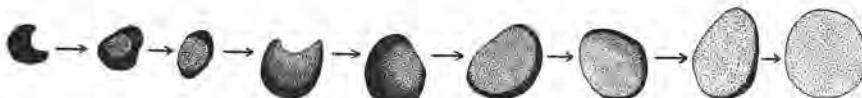


Abb. 1. Genese des Golgikörpers in der Mitteldarmdrüse von *Astacus*  
(Nach den Untersuchungen von W. JACOBS, 1928.)

Fähigkeit, Osmiumsäure an ihrer Grenzschicht zu reduzieren (also das Erscheinen eines schwarzen Randes oder Halbmondes) allmählich verschwindet und der Innenkörper den Träger der Enzyme allmählich aufbaut; schliesslich verliert das grosse Granulum die Adsorptionsfähigkeit vollkommen, ruht als fertiger Enzymträger in der Zelle und wird auf den Sekretionsreiz hin in einer Vakuole verflüssigt. Da bei diesem Objekt die Golgikörper einzeln liegen (Dictyosomen) so war diese Genese besonders gut zu verfolgen.

An Geschlechtszellen hat u.a. IKEDA 1928 an den Eiern von Vögeln, STURDIVANT 1934 an Ascarisspermien und SUBRAMANIAM 1935 an Fischovarien beobachtet, wie die Form und Verbreitung der „Golgikörper“ wechselt, wobei im letzten Falle Teile der Golgikörper der Follikelzellen an das Ei abgegeben werden. R. FARAGGIANI sah 1935 im Magenepithel von Amphibien einen Wechsel im Golgfelde nach Fütterungsreiz; D. VOINOV 1934 den Wechsel der Golgikörper an den Speicheldrüsen von *Helix*, den Leydigischen Zellen und an den Oozyten von *Tegenaria*: Parasomen → Ergastoblasten → Sekret. MAEDA ('32) und ATWELL ('32) stellten die Veränderungen im Hypophysenvorderlappen nach Adrenalininjektion fest, TATE (1932) in den Inselzellen des Pankreas. WEINER hat schon '28 darauf hingewiesen, dass die Golgikörper gehäuft in den Zellen vor-

kamen, welche Fett aufgenommen haben, während HIRSCHLEROWA 1924, 1932, H. OKKELS 1931, E. UHLENHUTH (1934) und J. GILMAN 1934 die wechselnde Menge osmium-adsorbierender Golgikörper in direkten Zusammenhang stellen konnten mit der Rückresorption des Sekretes der Thyreoidzellen. MACDOUGALD wies 1936 den Formwechsel der Golgikörper bei der Entstehung der Herzmuskeln nach; MULIYIL 1935 den Wechsel der Golgikörper in den Neuronen bei Periplaneta von kleinen Stäbchen bis zu Dictyosomen. Schöne Untersuchungen machten AOYAMA 1930 über den Formwechsel der Golgikörper in den Magenzellen und B. KEDROWSKY 1931 über den wechselnden Agregatzustand und die wechselnde Speicherungsfähigkeit des „Sekregationsapparates“ bei Opalina (dessen Identität mit einer Summe von Golgikörpern G. C. HIRSCH 1937 nachweisen konnte). LUDFORD, DORNESCO (1931), KUZUHARA (1931), KAWAI (1933), SATO (1933), SOLÉ et DE ROBERTIS (1935), J. IMAI (1935) und A. J. DALTON (1934) wiesen den Wechsel der Golgikörper in der Leber nach.

Genauer sind wir weiterhin über das Pankreas unterrichtet. Hier gelang es durch Lebendbeobachtung, Imprägnierung mit Osmium und Vitalfärbung Einblick in die Genese der Golgikörper zu erhalten (vergl. G. C. HIRSCH 1931—1932, E. RIES 1935—1936). Mit Sicherheit können genetisch zuerst gewisse Granala B<sub>1</sub> als Golgikörper angesprochen werden, welche zwischen der Basis und dem Golgfelde liegen (Abb. 2 aus dem ersten Teile dieser Abhandlung): sie adsorbieren basische Farbstoffe. Diese Fähigkeit verlieren sie (B<sub>2</sub>) und adsorbieren daraufhin Osmiumsäure (sie liegen jetzt im Golgfelde). Auch diese Fähigkeit geht verloren und der Innenkörper verändert seine Dictheit bis schliesslich die fertigen proenzym-tragenden Granula an den Zellapex geschoben werden. CHU (1933) und AMENOMOZI (1934) und RIES (1935) haben besonders dabei auf die wechselnde Menge jener Golgikörper hingewiesen, welche Osmiumsäure adsorbieren und damit gezeigt, dass der „Apparat“ keine starre Konstruktion ist.

Schliesslich haben G. C. HIRSCH und L. BRETSCHNEIDER an den sehr grossen Golgikörpern im Darm von ASCARIS 1937 die Anzahl derjenigen Zellen gezählt, welche Golgikörper enthalten, die entweder Osmiumsäure reduzieren oder Eisen an ihrer Grenzphase aufspeichern (Abb. 2 und 3): die Golgikörper sind zwar stets in allen Zellen vorhanden, aber sie besitzen nicht zu allen Zeiten die obengenannten beiden Fähigkeiten: in der ersten Zeit ihrer Genese können die Golgikörper adsorbieren, synthetisieren und transportieren (wie im 1. Teil dieser Abhandlung dargelegt). Allmählich aber gehen diese Eigenschaften zurück, je mehr synthetisierte Substanz im Innenkörper aufgestapelt wird. So kommt es, dass während des Hungerns, wo viele reife Granula vorhanden sind, sich die Eigenschaften der Grenzphase zu adsorbieren und zu reduzieren relativ wenig vorfindet; dass jedoch nach Fütterung d.h. in der ersten Zeit der Neu-

bildung von Granula sich diese Eigenschaften in immer stärkerem Masse finden. Schliesslich werden die Granula in Vakuolen aufgelöst.

Früher hat man von einem „Golgiapparat“ gesprochen; dann habe ich

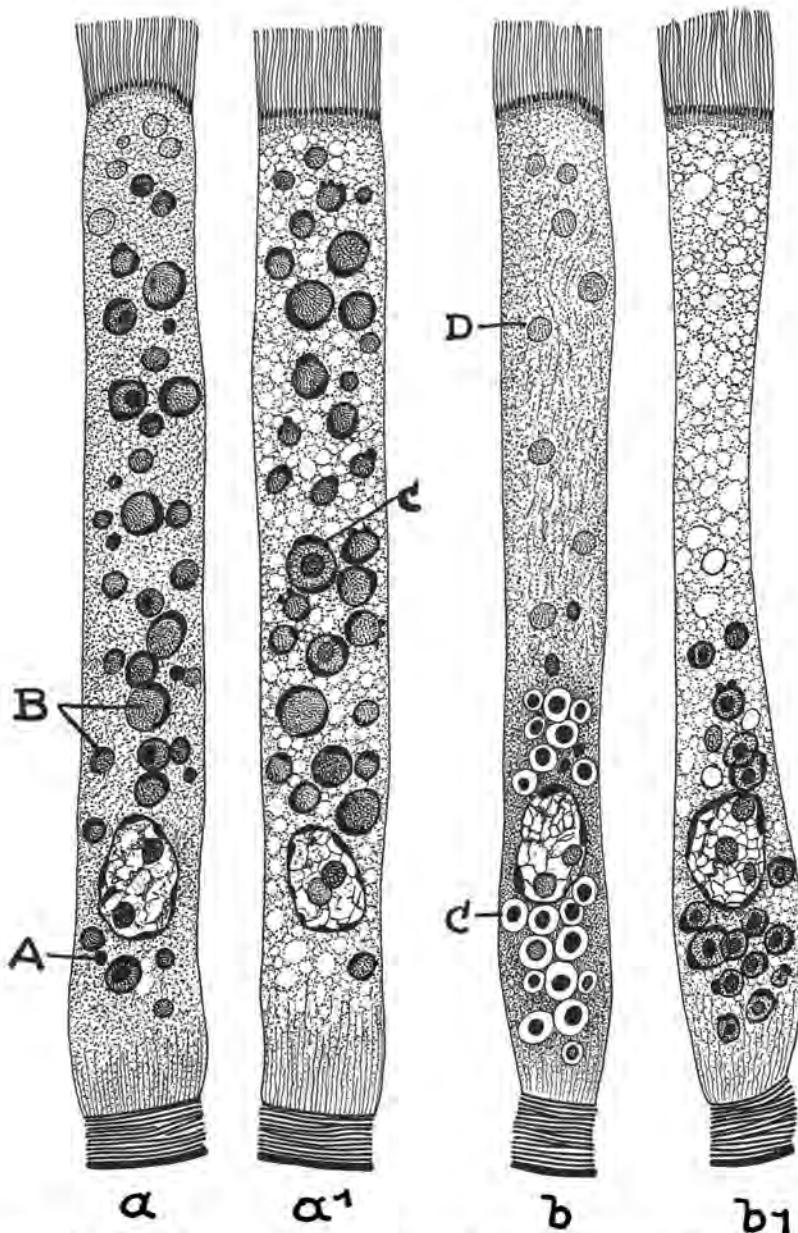


Abb. 2. Darmzellen von *Ascaris*: a, b, nach Imprägnation mit Osmiumsäure, a<sub>1</sub>, b<sub>1</sub>, nach Darstellung des Eisens, welches in a 10 Minuten, in b 30 Minuten nach Fütterung mit Eisen aufgenommen war, a und a<sub>1</sub> und andererseits b und b<sub>1</sub> entstammen also demselben Tiere. Ein Vergleich der beiden Paare zeigt: 1. die Uebereinstimmung der Golgikörper mit den Eisengranula, 2. die Entwicklung der Golgikörper A → B → C → D.

vorgeschlagen, nur noch von einer „Golgsubstanz“ zu sprechen und habe darunter jene Aussenschicht um den Innenkörper verstanden, welche mit Osmiumsüure imprägnierbar ist. (So haben u.A. auch RIES und viele andere Untersucher die Lage aufgefasst). Heute möchte ich noch einen

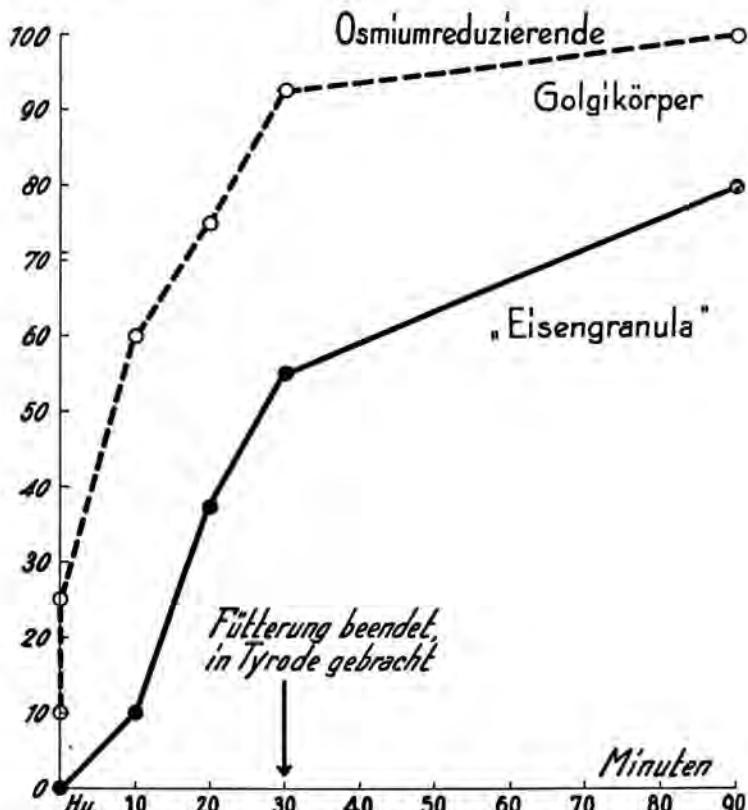


Abb. 3. Darmzellen von *Ascaris*: Ordinate: Prozentsatz der Anzahl Zellen, welche entweder Osmium reduzierende Golgikörper oder (im Parallelversuch) Eisengranula besaßen. — Abszisse: Hu. bedeutet Hungertiere, die darauffolgenden Ziffern bedeuten die Minuten nach Fütterung mit Eisenzucker.

Schritt weiter gehen und auch den Begriff der „Golgsubstanz“ fallen lassen. Zwar scheint für Anwesenheit einer besonderen Substanz das sogenannte „Golginegativ“ und der „Paragolgiapparat“ von SALAZAR zu sprechen, doch sind die angewandten Techniken noch kein Beweis dafür, dass sich eine besondere Substanz um den Innenkörper herum befände. Ich vermute vielmehr, dass die schwarze Masse und der Tannin-Eisen-Niederschlag SALAZAR's eben nur ein Niederschlag sind, und dass das „Negativ“ jenen Hohlraum wiedergibt, der nach Entfernung des Niederschlages entstanden ist.

Der Golgikörper ist nach meiner Meinung ein polyphasisches System, welches an der Aussenseite eine Grenzphase besitzt, die ausserordentlich dünn ist: vielleicht eine monomolekulare Schicht? Was bisher für einen

„Apparat“ oder eine „Substanz“ gehalten wurde, ist wahrscheinlich nur die wechselnde Eigenschaft der Grenzschicht. Osmiumsäure, Eisen, basische Farbstoffe zu adsorbieren. Aber das Wesentliche ist, dass sie diese Eigenschaften nur zu einer bestimmten Zeit besitzt, dass diese Eigenschaft kommt und vergeht im Laufe der Entwicklung des Golgikörpers.

Vergleicht man das Schicksal der Golgikörper bei den mehreren Zellformen, die wir soeben besprachen, dann darf man wohl heute schon sagen: ein Golgikörper entsteht und vergeht. Er durchläuft dabei mehrere Phasen verschiedener chemischer Zusammensetzung und verschiedener physikalischen Zustände: er ist zuerst ein kleiner, sehr dichter Körper (A), der auf seiner Grenzschicht Stoffe adsorbiert und nach dem Innern des Körpers zu transportiert. Dadurch wächst der Innenkörper heran (B) und bildet schliesslich so das Endproduct der Entwicklung des Golgikörpers (D). Ist dies Endstadium erreicht so verliert die Aussenschicht ihre Fähigkeit zu adsorbieren. Dies scheint mir in grossen Umrissen das Wesentliche des Prozesses zu sein, den wir bei allen gut analysierten Fällen finden. Osmiumreduktion und -Adsorption sind dabei nur zwei der vielen Eigenschaften der Grenzschicht. Deswegen fällt der Begriff der „Golgsubstanz“; an seine Stelle tritt der „Golgikörper“ als ein Ganzes.

#### Anhang: Die Herkunft der Golgikörper.

Wenn ein Golgikörper kommt und vergeht, dann entsteht die Frage: woher kommt er? Ich kann diese Frage nur als Anhang behandeln, denn die Antwort ist so ungeklärt, dass ich hieraus noch keinen integrierenden Bestandteil meiner System-Theorie machen kann. Ich kann nur auf verschiedene Möglichkeiten weisen, die alle schon einmal gesehen oder behauptet worden sind. Es will mir vorläufig das Wahrscheinlichste sein, dass die Golgikörper auf verschiedene Weisen entstehen können.

Die erste Möglichkeit ist: ein Golgikörper entsteht aus dem Plasma selbst durch einen Entmischungsprozess, wie viele andere Granula, Vakuolen und ähnliche kleine Körper in der Zelle offenbar aus dem Protoplasma gebildet werden. Diese Möglichkeit ist nicht a priori von der Hand zu weisen. B. KEDRWOSKY, der ja mit den Golgikörpern von Opalina eine jahrelange Erfahrung hat — diese Körper sind physiko-chemisch die bestuntersuchten von allen — betrachtet es 1931 als ein „Faktum“, dass sie im Protoplasma immer neu entstehen als ganz kleine Granula, die anwachsen. Ebenso spricht sich W. JACOBS 1928 mit Bestimmtheit dafür aus, dass die Golgikörper bei Astacus in der unmittelbaren Nähe des Fussplasmas aus dem allgemeinen Plasma der Zelle de novo entstehen; eine Durchschnürung vorhandener Golgikörper konnte er nicht beobachten. Ebenso sah J. GICKELHORN (1932) das Entstehen aus dem Plasma bei Geranium.

Eine zweite Möglichkeit ist diese: Die spezielle Genese der Golgikörper ist vielfach nur ein Teil eines kettenförmigen Stoffwechsel-

prozesses, durch welchen bestimmte Substanzen (wie z. B. Enzymträger) durch die Zellen synthetisiert werden; und zwar steht die Arbeit der Golgikörper innerhalb dieses Stoffwechselprozesses am Ende. Bei diesem Stoffwechsel sind sicher alle Zellteile beteiligt durch eine bestimmte Hintereinanderschaltung ihrer Tätigkeit; darauf haben besonders SUBRAMANIAM (1936), G. C. HIRSCH (1937), und L. LESPERON (1937) hingewiesen; SUBRAMANIAM nimmt sogar an, dass die Fermente zur intracellulären Synthese von Fett und Eiweiss aus den Golgikörpern stammen. Es ist also keineswegs wahrscheinlich, dass das fertige Produkt des Stoffwechsels nur allein entsteht durch eine einzige Stoffwechselstruktur wie z.B. durch die aktive Grenzphase der Golgikörper. So ist AHARA (1933) der Meinung, dass die Ursubstanz der Golgikörper bei den weiblichen Organen der Ratte aus dem Kern stamme, was möglich, aber nicht bewiesen ist. Und so konnten u. A HIRSCH (1931) und DUTHIE (1933) am Pankreas, HIRSCHLER an den Eizellen und H. OKKELS an der Thyreoidea nachweisen, dass erst die Mitochondrien und das allgemeine Zellplasma für die Bereitung bestimmter Vorstoffe sorgen und dass darauf die Tätigkeit der Golgikörper einsetzt. Aber steht nun die Arbeit der Mitochondrien in direktem genetischem Zusammenhange mit dem Entstehen der allerersten Stadia der Golgikörper? Diese Frage ist näher untersucht worden von STEFANELLI (1930) an den Eiweissdrüsen von Limax und in letzter Zeit besonders am Pankreas: es stehen sich hier noch zwei Meinungen gegenüber: G. C. HIRSCH beobachtete am lebenden Pankreas (und DUTHIE bestätigte es), dass sich von den Mitochondrien kleine Granula A (Abb. 2 des 1. Teiles der Abhandlung) abschnüren und zum Golgifelde hinwandern. Auf diesem Wege werden sie verwandelt in Granula B, welche Neutralrot adsorbieren, also schon Golgikörper genannt werden können. Diese gehen dann ein in das Golgifeld, adsorbieren Neutralrot nicht mehr, wurden deshalb Granula B<sub>2</sub> genannt und besitzen jetzt die Fähigkeit, Osmiumsäure zu adsorbieren und zu reduzieren, sind also sicher Golgikörper. Aus diesem B<sub>2</sub> entwickelt sich dann zweifellos das Granulum C, welches zum Apex wandert und adsorptive Eigenschaften nicht mehr besitzt; darüber herrscht Einstimmigkeit. M. YAMASAKI meint sogar (1936), dass aus dem Mitochondrienstoff das Baumaterial des Innenkörpers sich bilde. E. RIES ist aber der Meinung, dass kein genetischer Zusammenhang bestünde zwischen den Granula A, welche sich an der Oberfläche der Mitochondrien bilden und den Granula B<sub>1</sub>, welche Neutralrot adsorbieren; er meint vielmehr, dass die Granula B<sub>1</sub> nur aus sich selbst mittels Durchschnürung entstanden. Die Frage ist nur schwer zu entscheiden und muss mit neuen Hilfsmitteln angegriffen werden. Wir wollen hier deswegen die Frage offen lassen und nur auf die beiden Möglichkeiten hinweisen: entweder entwickeln sich die Golgikörper aus äusserst kleinen Granula A, welche ursprünglich im Zusammenhange mit den Mitochondrien entstehen — oder die genannten Granula A bringen

von den Mitochondrien nur Stoffe an die Golgikörper heran, welche Körper aber auf andere Weise entstehen und die genannten Stoffe nur adsorbieren und verarbeiten. Das Gemeinsame beider Auffassungen beruht darin, dass die Mitochondrien und die Golgikörper im Arbeitszyklus der Zelle hintereinander geschaltet arbeiten. Der Unterschied beider Meinungen beruht darin, dass in dem einem Falle ein direkter, genetischer Übergang A → Golgikörper gesehen wurde, im anderen Falle die Golgikörper entweder aus dem Grundplasma oder aus sich selbst genetisch abzuleiten sind.

Und damit kommen wir zur 3. Möglichkeit: dass die Golgikörper mittels einer Durchschnürung aus sich selbst entstehen, und zwar in sehr jungen Stadien. Dass Granula und Vakuolen in Form einer immer weitergehenden Entmischung und durch teilweise Umregulierung der Oberflächenkräfte sich durchschnüren, ist eine bekannte Tatsache. Und so ist es auch nicht weiter verwunderlich, dass dieses auch bei den Golgikörpern stattfinden könne. Auf eine solche Durchschnürung hat E. RIES besonders Gewicht gelegt und hat sie an mehreren Objekten im Leben beobachtet. Für seine Auffassung spricht auch die sehr starke Vermehrung, welche die Golgikörper zu bestimmten Zeiten bei manchen Objekten erkennen lassen. Mehrere Untersucher, wie z.B. W. JACOBS und B. KEDRWOSKY leugnen aber eine Durchschnürung bei ihren Objekten, was jedoch nicht für das Pankreas auch zu gelten braucht, wo RIES um die 1—2. und die 7—8. Stunde eine Vermehrung der Golgikörper durch Schätzung des Bildes — nicht durch Auszählung — beobachtete. Auch halte ich es für wahrscheinlich, dass diese Durchschnürung eine der bekannten physikalischen Erscheinungen an Partialsystemen der Zellen ist, dass man daraus aber kein spezielles Kennzeichen eines Golgikörpers ableiten kann. Eine solche Durchschnürung kommt bei Entmischungen so häufig vor, dass man in ihr nicht ein spezielles Argument etwa gar für einen neuen Zellkörper erkennen darf. Ob bestimmte Zellteile *nur* aus sich selbst oder auch aus dem Plasma als solchem entstehen könnten, ist eine sehr interessante Frage nach der Autonomie und der Heteronomie der partiellen Systeme, nach dem Protomerencharakter und nach der „lebenden Einheit“. Aber wir sind heute bescheidener als die alte Generation und wissen, wie ausserordentlich schwer z.B. die Behauptung zu beweisen ist: ein Körper x entsteht ausschliesslich aus sich selbst durch Teilung und nicht aus dem Protoplasma. Ich glaube infolgedessen, dass wir jüngeren Cytologen vorläufig noch keinen Streit darüber auszufechten haben, ob ein bestimmter Körper *nur* aus dem Protoplasma als solchem aufgebaut werden kann. Eine solche Ausschliesslichkeit ist in einem strengerem logischen Sinne ungemein schwer zu beweisen. Vorläufig wollen wir unsere Arbeit darauf konzentrieren, zu untersuchen, welches die Genese des Golgikörpers ist, vor allem aber was er zu leisten vermag im Stoffwechselbetriebe der Zelle; später kann man dann die Frage entscheiden, ob der Golgikörper

„Protomerenmaterial“ sei oder nicht. Als verfehlt muss ich es vorläufig noch ansehen, wenn ein solches unentschiedenes Kennzeichen wie die Durchschnürung eines Körpers als Argument für eine neue Namengebung genommen wird, wie E. RIES den neuen Terminus „Lipochondrien“ eingeführt hat. Wir haben schon zu viel Namen, deren Begriffsdefinition oft auf nur recht wenigen Kennzeichen beruht. Ich halte es deswegen auch für notwendig, für meine hier dargelegte Theorie keinen neuen Namen des Körpers einzuführen, sondern den *alten Namen Golgikörper* beizubehalten, auch wenn heute unsere Einsicht in das Werden und die Funktion der Golgikörper eine ganz andere ist, als GOLGI sich das vor 40 Jahren dachte. Aber er hat als Erster auf diese Körper hingewiesen; und deswegen sei ihm auch die Ehre, dass der Name dieser Körper verbunden bleibt mit seiner Entdeckung.

#### ZITIERTE LITTERATUR, JEDOCH MEIST NUR NACH 1930.

- AHARA, M.: (1930) Trans. Jap. Pathol. Soc. **20**, 465. — (1933) Mitt. Med. Akad. Kioto **9**, 1. — (1933) Mitt. med. Akad. Kioto **9**, 603.
- AMENOMORI, J.: (1934) Nagasaki Igakkai Zassi **12**, 62. — (1934) Nagasaki Igakkai Zassi **12**, 44.
- AOYAMA, F.: (1930) Z. Zellforsch. **12**, 179.
- ATWELL, W. J.: (1932) Anat. Rec. **55**, 11.
- BEAMS, H. W.: (1930) Anat. Rec. **45**, 137. — (1931) Anat. Rec. **49**, 309.
- BEAMS, H. W., and J. B. GOLDSMITH: (1930) J. Morph. and Physiol. **50**, 497.
- BEAMS, H. W., and R. L. KING: (1932) Anat. Rec. **53**, 1. — (1932) J. Morph. **53**, 59. — (1932) J. Morph. **53**, 223. — (1935) Proc. R. Soc. London B. **80B**, 264. — (1933) Anat. Rec. **57**, 29. — (1934) Anat. Rec. **59**, 363.
- BEAMS, H. W., and R. K. MEYER: (1931) Physiol. Zool. **4**, 486.
- BEAMS, H. W., J. A. MULIYIL and J. B. GATENBY: (1934) Nature, 810.
- BOWEN, R. H.: (1926) Quart. J. of Micr. Sci., **70**, 193. — (1927) Anat. Rec. **35**, 309. — (1928) Anat. Rec. **38**, no. 3. — (1929) Quart. Review of Biol. **4**, 484.
- CHU, CHI-HSUIN: (1933) Chin. J. Physiol. **7**, 269.
- CRAMER, W., and R. J. LUDFORD: (1925) J. of Physiol. **60**, 342. — (1926) J. of Physiol. **61**, 398.
- DALTON, A. J.: (1934) Anat. Rec. **58**, 321.
- DORNESCO, G. TH.: (1931) C. r. Soc. Biol. Paris, **107**, 1224.
- DORNESCO, G. TH., et TH. BUSNITZA: (1934) C. r. Soc. Biol. Paris, **117**, 297.
- FARAGGIANA, R.: (1935) Monit. zool. ital. **46**, 206.
- FAURÉ-FREMIET, E.: (1906) Compt. rend. Acad. Sc. **142**.
- GATENBY, J. B.: (1931) J. of exper. Zool. **60**, 285.
- GICKLHORN, J.: (1932) Protoplasma **15**, 365.
- GILLMAN, J.: (1934) Anat. Rec. **60**, 209.
- HIRSCH, G. C.: (1924) Zeitschr. vergl. Physiol. **2**. — (1929) Roux' Arch. **117**, 509. — (1931) Zeitschr. f. Zellforsch. **14**, 515. — (1931) Verhand. der deutschen Zoolog. Gesellschaft. — (1931) Biol. Rev. **6**, 88. — (1931) Roux' Arch. **123**, 792. — (1931) Zeitschr. f. Zellforsch. **14**, 517. — (1932) Zeitschr. f. Zellforsch. **15**, 34. — (1932) Z. f. Zellforsch. **15**, 290. — (1937) Proc. Royal Acad. Amsterdam, **40**, 614. — (1937) Biol. Zentralblatt **58**. — (1937) Arch. f. exper. Zellf. **19**, 385.

- HIRSCH, G. C., und L. H. BRETSCHNEIDER: (1937) *Cytologia, Festschrift Fujii.* — (1937) *Protoplasma* **29**, 9.
- HIRSCHLER, J.: (1913) *Arch. Zellforsch.* **9**. — (1915) *Anat. Anz.* **47**. — (1916) *Arch. f. mikr. Anat.* **89**. — (1918) *Arch. f. mikr. Anat.* **91**. — (1927) *Z. Zellforsch.* **5**, 704. — (1928) *Z. Zellforsch.* **7**, 62.
- HIRSCHLER, J., et ZOFJA HIRSCHLEROWA: (1930) *C. r. Soc. Biol. Paris*, **104**, 952.
- HIRSCHLER, J., und L. MONNÉ: (1928) *Z. Zellforsch.* **7**, 201.
- HIRSCHLEROWA, Z.: (1927) *Z. Zellforsch.* **6**, 234.
- HYMAN, O. W.: (1932) *J. of Morph.* **37**, 307.
- IMAI, Y.: (1935) *Jap. J. Gastroenterol.* **7**, 202.
- JACOBS, W.: (1927) *Ergeb. d. Biol.* **2**, 357. — (1928) *Zeitschr. f. Zellforsch.* **8**, 1.
- JÄRVI, OSMO: (1935) *Annales Acad. Sc. Fennicae, Série A, Tom. 63*, N°. 5.
- KARWAI, I.: (1933) *Okayama-Igakkai-Zasshi*, **45**, 1192.
- KEDROWSKY, B.: (1931) *Protoplasma* **12**, 356. — (1931) *Protoplasma* **13**, 26. — (1931) *Protoplasma* **14**, 192. — (1931) *Z. f. Zellforsch.* **12**, 600. — (1931) *Z. f. Zellforsch.* **12**, 666. — (1931) *Z. f. Zellforsch.* **13**, 1. — (1932) *Z. f. Zellforsch.* **15**, 93. — (1932) *Z. f. Zellforsch.* **15**, 731. — (1933) *Z. f. Zellforsch.* **17**, 547. — (1933) *Z. f. Zellforsch.* **17**, 587. — (1933) *Arch. f. experim. Zellforsch.* **14**, 532. — (1934) *Protoplasma*, **22**, 44. — (1935) *Z. f. Zellforsch.* **22**, 411.
- KIRCHNER, Z.: (1933) *C. r. Soc. Biol. Paris*, **113**, 1293.
- KUZUHARA, T.: (1931) *Trans. jap. pathol. Soc.* **21**, 266.
- LUDFORD, R. J.: (1925) *Proc. of the Royal Soc. B.* **98**, 353. — (1927) *Proc. of the Royal Soc. B.* **101**, 409.
- LUDFORD, R. J., and W. CRAMER: (1927) *Proc. of the Royal Soc. B.* **101**, 16. — (1928) *Proc. of the Royal Soc. B.* **104**, 28.
- MACDOUGALD, T. J.: (1936) *Z. f. Zellforsch.* **24**, 399.
- MAEDA, M.: (1932) *Okayama-Igakkai-Zasshi*, **44**, 2749.
- MAKAROV, P.: (1933) *Z. f. Zellforsch.* **19**, 28.
- MORELLE, J.: (1924) *Soc. Biol. belge*, **91**.
- MULIYIL, J. A.: (1935) *Z. f. Zellforsch.* **23**, 627.
- NAHM, L. J.: (1933) *J. of Morph.* **54**, 259.
- NASSONOV, D.: (1923) *Arch. mikr. Anat.* **97**. — (1924), **100**. — (1924) **103**. — (1925) *Z. f. Zellforsch.* **2**. — (1926) *Z. f. Zellforsch.* **3**. — (1927) *Z. f. Zellforsch.* **4**.
- NATH, V.: (1931) *Z. f. Zellforsch.* **13**, 82.
- OKKELS, H.: (1931) *Bull. Histol. appl.* **8**, 277. — (1931) *C. r. Soc. Biol. Paris*, **106**, 305. — (1934) *Skand. Arch. Physiol.* **64**, 97.
- OWENS, H. B., and R. R. BENSLEY: (1929) *Am. J. Anat.* **44**, 1.
- PARAT, M.: (1928) *Arch. d'Anat. micr.* **24**, 73.
- PARAT, M., and MAURICE PARAT: (1930) *Arch. Anat. micr.* **26**, 447.
- RIES, E.: (1935) *Z. f. Zellforsch.* **22**, 523. — (1935) *Z. f. Zellf.* **23**, 63. — (1936) *Arch. exper. Zellf.* **18**, 280.
- SALAZAR, A. L.: (1933) *C. r. Soc. Biol. Paris*, **113**, 529.
- SATO, Y.: (1933) *Okayama-Igakkai-Zasshi* **45**, 366.
- SOLE, R., et E. DE ROBERTIS: (1935) *C. r. Soc. Biol. Paris*, **120**, 814.
- SOKOLSKA, J.: (1931) *Fol. Morph.* **3**, 157.
- STEFANELLI, A.: (1930) *Riv. biol.* **12**, 118. — (1930) *Arch. ital. Anat.* **28**, 268.
- STURDIVANT, H. P.: (1934) *J. of Morph.* **55**, 435.
- SUBRAMANIAM, M. K.: (1934) *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. B*, **1**, 291. — (1935) *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. B*, **1**, 571.
- SUBRAMANIAM, M. K., and R. G. AIYAR: (1937) *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. B*, **5**, 142. — (1936) *Z. f. Zellforsch.* **24**, 576.
- TATE, Y.: (1932) *Okayama-Igakkai-Zasshi*, **44**, 2671.

- ÜHLENHUTH, W.: (1934) Quart. J. micr. Sci., **76**, 615.  
 VOINOV, D.: (1934) Arch. de Zool. **76**, 399.  
 WEINER, P.: (1928) Z. f. mikr. anat. Forschung, **13**. — (1930) Z. f. mikr. anat. Forschung **20**, 122.  
 WILSON, E. B., and A. POLLISTER WAGG: (1937) J. Morph. **60**, 407.  
 YAMASAKI, M.: (1936) Arb. anat. Inst. Sendai H. **18**, 185.
- 

**Zoology.** — *Parerythropodium maris-tenebrosi n. sp.<sup>1)</sup>*, eine neue Alcyonarie von der Küste Nordwest-Afrikas. Von G. STIASNY. (Rijksmuseum van Natuurlijke Historie, Leiden). (Communicated by Prof. H. J. JORDAN).

(Communicated at the meeting of September 25, 1937.)

Eine membranöse Alcyonarie zu bestimmen ist bei dem heutigen Stande der Systematik keine leichte Aufgabe. Fast erscheint es angezeigt, von einer exacten Bestimmung vorläufig überhaupt abzusehen. Aber bei Bearbeitung von Sammlungen, die einem zur Bestimmung anvertraut sind, ist man ja fast gezwungen, jedes halbwegs gut erhaltene Exemplar mit einem Namen zu versehen und so musste ich mich entschliessen, auch die vorliegenden Alcyonarien-Exemplare zu bestimmen. Ich musste dies umso mehr tun, als mir dieselbe Rindenkoralle in drei verschiedenen Sammlungen von Marocco (Dr. DOLLFUS), und Cap Blanco (Mauretanien, von F. VERMEULEN und Dr. MONOD) stets aufs neue begegnete. Sie scheint im ganzen nordwestafrikanischen Gebiete, (Marocco und Mauretanien), dem Gebiete des *mare tenebrosum*, sehr häufig zu sein.

Es handelt sich hier um eine membranös ausgebildete Alcyonarie mit unregelmässigen vertikalen Erhebungen, die sehr verschiedenartige Objecte, vorzugsweise die hornigen Achsen abgestorbener Gorgonarien, auch Muschelschalen, grosse Balaniden u.s.w. krustenartig überzieht. Die Hornskelette mancher Gorgonarien (Plexauriden) erhalten durch diesen fremden Ueberzug, der in seinem Habitus einigermassen an ein *Alcyonium* erinnert, ein sehr charakteristisches Aussehen, so dass die incrustierten Stöckchen unter Hunderten anderen Octocorallia sofort durch ihre Form und Farbe auffallen. Beim ersten Anblick (Taf. 1, Fig. 1, 2) dachte ich natürlich es mit einer fremdartigen Gorgonarie zu tun zu haben, genauere Untersuchung ergab jedoch sofort, dass der eigenartige Ueberzug und die horngige Achse zwei ganz verschiedenen Rindenkorallen angehören.

Bei Bestimmung von Alcyonarien muss man sich in erster Linie der Arbeiten KÜKENTHALS bedienen. Leider liegt hier keine zusammenfassende

<sup>1)</sup> *Mare tenebrosum*, Dunkelmeer, ist die schon im Altertume gebrauchte Bezeichnung für die Gewässer der maroccanisch/mauretanischen Küste, wohl so gewählt wegen der dort häufig auftretenden Nebel und der Passatstaubfälle. Die Reichweite des Dunkelmeeres stimmt fast genau überein mit dem Verbreitungsgebiete der neuen Art.

Uebersicht der bekannten Genera und Arten vor, wie dies bei den Gorgonaria (1924) der Fall ist. Wahrscheinlich hat KÜKENTHAL aus guten Gründen davon abgesehen, denn die Systematik der Alcyonarien ist noch bei weitem nicht so weit vorgeschritten, als die der Gorgonarien. Es gibt hier eine womöglich noch grössere Anzahl von species incertae, ja man wäre sogar auch versucht, die Mehrzahl der Genera als incerta zu bezeichnen. Die Genusdiagnosen sind zumeist unklar, nicht scharf von einander abgegrenzt und von der Unsicherheit bei den Synonyma schweigt man am besten ganz und gar. Die Folge davon ist, dass eine bestimmte Art bald hier, bald da untergebracht wird. Uebersiedlungen von einer Art von einem Genus ins andere von dem einen Autor, Rückübertragungen in das frühere durch einen folgenden sind hier etwas ganz gewöhnliches. MOLANDER (1928), HICKSON (1930) und Verfasser (1937) haben in jüngster Zeit auf diesen traurigen Zustand der Systematik der Alcyonaria hingewiesen.

Es kann hier nicht meine Aufgabe sein, hierauf genauer einzugehen. Wenn man jedoch bei einem gegebenen Objekte vor die Notwendigkeit gestellt wird, sich zu entscheiden, wohin die fragliche Form eigentlich gehört, wird man sich der Schwierigkeiten, die zur Zeit bei dem Versuch einer genauen Bestimmung vorliegen, so recht bewusst. So sieht man sich bei den vorliegenden Objecten wohl oder übel zur Entscheidung gezwungen, ob sie beim Genus *Erythropodium* unterzubringen sind oder zum Genus *Parerythropodium* gehören. Wir müssen daher zunächst auf die Diagnosen KÜKENTHALS dieser beiden Gattungen näher eingehen.

	<i>Erythropodium</i> (1924, S. 10)	<i>Parerythropodium</i> (1916, Zool. Jahrb., S. 461)
Habitus.	Die Kolonie bildet membranöse Ueberzüge, die sich nicht von der Unterlage erheben.	Die Kolonie bildet flache membranöse Ueberzüge, die sich an einzelnen Stellen verdicken können.
Kelche.	Die kleinen Polypen, denen ausgebildete Kelche fehlen, sind völlig retraktile und ihre Gastralhöhlen stehen in direkter Verbindung durch ein Netzwerk von Solenia.	Die retraktile Polypen haben verschiedene tief ins Coenenchym hinein ragende Gastralhöhlen, die an der Basis durch längsverlaufende Solenia direkt verbunden sind.
Coenenchym.	Das Coenenchym ist in eine Oberschicht und eine Unterschicht geschieden mit verschiedenen Scleriten.	Eine Scheidung des Coenenchyms in eine Oberschicht und eine Unterschicht ist nicht ausgesprochen.

*Erythropodium*  
(1924, S. 10)

Scleriten.

Die Grundform der Scleriten ist der Gürtelstab und die dicht bewarzte Spindel.

Hornskelett.

Ausserdem kommt ein besonders in der Unterschicht ausgebildetes mesogloeaes Hornskelett vor, das an der Basis eine feste Membran bildet.

Vorkommen.

Antillen, Marquesas Inseln, Litoral.

*Parerythropodium*  
(1916, Zool. Jahrb., S. 461)

Ein inneres Hornskelett fehlt, doch scheidet die Mesogloea an der basalen Fläche eine hornige Membran ab.

Atlantischer Ocean, Mittelmeer, Rotes Meer, Indik.

Die Notwendigkeit der Errichtung des Genus *Parerythropodium* wird von KÜKENTHAL damit motiviert (1916, S. 462): „insbesondere ist es die Scheidung des Coenenchyms in zwei Schichten und das Vorkommen eines Hornskelettes in der Unterschicht, die dafür ausschlaggebend sind... Ich nenne die Gruppe *Parerythropodium*, es bis auf weiteres unentschieden lassend, ob sie eine Untergattung von *Alcyonium* oder eine eigene Gattung darstellt.“ Im Zool. Anzeiger (1916, S. 171) formuliert KÜKENTHAL die Unterschiede so: „Zur Gattung *Erythropodium* rechne ich nur jene flach ausgebreiteten Formen vom Bau des *Alcyonium*, die in der Basalschicht ein Hornskelett aufzuweisen haben. Die anderen zu *E.* gestellten Arten ohne dieses Hornskelett fasse ich zur Gattung *Parerythropodium* zusammen.“

Vergleichen wir die beiden Diagnosen, so fällt zunächst auf, dass bei *E.* die Form der Spicula wohl als Merkmal herangezogen wird, bei *P.* jedoch nicht. Es ergeben sich somit folgende Unterschiede, wobei ich, die Ergebnisse der folgenden Discussion vorwegnehmend, noch die Kelche und die Spicula als Unterscheidungsmerkmale mit verwendet habe.

	<i>Erythropodium</i>	<i>Parerythropodium</i>
Wachstumsform	nur membranöse horizontale Ausbreitung	stellenweise vertikale Verdickungen
Kelche	klein, unbewaffnet	meist gross, bewaffnet
Coenenchym	zweischichtig	einschichtig
Verbindung der Kelche	indirekt durch Solenia	direkte und indirekte Verbindung
Inneres Hornskelett	vorhanden	fehlt
Spicula	Vierer und Sechssträhler	Spindeln

Ich halte beide Genera neben einander aufrecht.

Die Frage, welches den beiden als das ursprünglichere, welches als das abgeleitete zu betrachten ist, lasse ich gänzlich unerörtert, wobei ich mich auf KÜKENTHALS Ausspruch berufen kann (1916, S. 463/4): „Der Systematiker hat sich in erster Linie an Tatsachen, nicht an phylogenetische Speculationen zu halten“. Ob aber KÜKENTHAL selbst sich nach dieser weisen Maxime gerichtet hat, scheint mir etwas zweifelhaft.

Zu *Erythropodium* rechnet KÜKENTHAL die beiden Arten *caribaeorum* (1916, Z. J., S. 445/450) und *marquesarum*. Die letztere wird wohl auf S. 450 erwähnt, auch im Zoolog. Anz., 1916, Bd. 47, S. 173, aber nur mit dem Namen, nichts weiter. Erst in seiner grossen Gorgonarien-Monographie im Valdivia Werk (1919, S. 34/36) erfolgt die Beschreibung von *marquesarum* — bis dahin also eigentlich ein nomen nudum. Im Tierreich, 1924, S. 10/11, werden beide als bona species von *E.* angeführt. Wenn man die Abbildungen der Spicula beider Arten (am einfachsten im Tierreich, Fig. 8 und 10) mit einander vergleicht, so stellt sich sofort heraus, dass für *caribaeorum* die Genusdiagnose in Bezug auf die Spicula nicht stimmt. Es sind hier keine Gürtelstäbe vorhanden (in der Beschreibung, S. 11, doch als solche bezeichnet), sondern „Vierer“, „Sechser“ und unregelmässige Formen. „Gürtelstäbe“ (vom *Briareum*-Typus) hat nur *marquesarum*. Auf Grund der Nachuntersuchung eines der Original-Exemplare KÜKENTHALS von *marquesarum* aus dem Zoolog. Museum, Berlin, habe ich (Scleraxonia, 1937, S. 7, 15/17) im Anschlusse an MOLANDER die Species zum Genus *Solenopodium* transferiert. So bliebe also nur *caribaeorum* übrig.

Ich habe jedoch die STUDER'sche species *astraeoides*<sup>1)</sup>, von KÜKENTHAL zu *Parerythropodium* gestellt, wieder zum Genus *Erythropodium* zurückversetzt, weniger wegen der grossen Uebereinstimmung in der Wachstumsform, als wegen der Spicula, die gleichfalls „Sechser“ und „Vierer“ aufweisen. So hätten wir 2 gute Arten (Scleraxonia, S. 7).

Aber Miss DEICHMANN rechnet in ihrer jüngst erschienenen Monographie noch *E. polyanthes* (DUCH. et MICH.) dazu, wobei *marquesarum* als Synonym davon betrachtet wird, und bildet auf Pl. 5, Fig. 23 „a simple spindle with a large number of transverse rows of warts“, einen halben Gürtelstab, ab (Spindel vom *Briareum*-Typus). Miss DEICHMANN war so freundlich, mir ein kleines Exemplar von *polyanthes* zur Verfügung zu stellen. Ihr Befund ist richtig, es sind tatsächlich Gürtelstäbe vorhanden, keine Vier- und Sechsstrahler. Daher gehört *polyanthes* — nach meiner Auffassung — nicht in die Gruppe *caribaeorum* und *astraeoides*, sonder zum Genus *Solenopodium*. Die Frage, ob *polyanthes* von Westindien (Florida) identisch ist mit *marquesarum* von den Marquesas Inseln (Welche? die von Westindien oder die pacifischen gleichen Namens,

<sup>1)</sup> Ich schrieb (Scleraxonia, 1937, S. 7) bei Besprechung des Genus *Erythropodium* irrtümlich, dass KÜKENTHAL auf *astraeoides* vergessen hat. Er hat sie nicht vergessen, sondern beim Genus *Parerythropodium* untergebracht.

sieh darüber Scleraxonia, S. 16) möchte ich vorläufig unentschieden lassen, so lange die Provenienz des KÜKENTHAL'schen Materials nicht einwandfrei festgestellt ist. Ich kann *polyanthes* nicht als gute Art von *Erythropodium* anerkennen und es bleiben somit nur 2 gute Arten übrig, *caribaeorum* und *astraeoides*.

Die Genus-diagnose KÜKENTHALS von *Erythropodium* ist nun dahin abzuändern, dass nicht „Gürtelstäbe“, sondern „Vier- und Sechsstrahler“ und unregelmässige Formen im Coenenchym vorherrschen. Damit erhalten wir auch eine reinlichere Scheidung dieses Genus von *Parerythropodium*, für das Gürtelstäbe und bewarzte Spindeln obligat sind. Auch Keulen kommen hier vor, die bei *E.* fehlen.

Wir kommen nun zu den Arten des Genus *Parerythropodium* (Sieh. darüber KÜKENTHAL, 1916, Zoolog. Jahrb., 1916, S. 463),

*coralloides* (G. VON KOCH). Beschreibung und zugleich Diagnose, S. 667/8. Sehr ähnlich *Alcyonium palmatum*. Spindeln und Keulen (Textfig. 19); carminrot, Mittelmeer. Bona sp.

*fulvum* (Forskål). Die beste (sehr ungenaue) Beschreibung und Abbildung dieser als *Sympodium* f. bezeichneten Art bei KLUNZINGER, S. 43, Taf. III, Fig. 6. „Basalausbreitung oben hügelig.“ Lange schlanke Spindeln, (Fig. 6a), bis  $1\frac{1}{2}$  mm lang!; dunkelgoldgelb, Rotes Meer.

Diese Art scheint mir etwas zweifelhafter Natur. Es gibt hier keine vertikalen Erhebungen des Coenenchyms, sondern „zu Hügeln erhobene Ausbreitungen“. Die kleine Abbildung ist undeutlich und nichtssagend, die Spindeln wären ganz ungewöhnlich lang. spec. incerta.

*norvegicum* (KOR. & DAN). Beste Beschreibung bei KÜKENTHAL, 1916, Zoolog. Jahrb., S. 464/6, ohne Abbildung. Walzen oder Spindeln 0,2 bis 0,36 mm lang, mit grossen Warzen besetzt oder mit verzweigten Fortsätzen. Hellrosa, dunkelorange, Polypen oft tiefblau oder weiss. Norwegische Westküste. Bona spec.

*astraeoides* gehört zu *Erythropodium* (sieh oben S. 738), entfällt daher hier.

*punctatum* MAY, S. 53. Sehr mangelhafte Beschreibung. „Die Kolonien überziehen Laminarienstiele“. MAY's Exemplare waren schlecht erhalten. Abgebildet wird nur eine (rote oder farblose) Spindel oder Stab (Taf. V, Fig. 2) mit langen oder kurzen bedornten Warzen besetzt. Grau mit roten Kelchen. Tumbaturiff, (Ostafrika, bei Zanzibar). Spec. incerta.

*membranaceum* KÜKENTHAL (1916, Valdivia-Werk, S. 52/3, Taf. I, Fig. 3; Taf. IX, Fig. 42—44). Keine Diagnose, nur Beschreibung. Mit dicken kurzen Erhebungen von membranöser Basis. Polypenspicula dicke, kräftig bedornte Spindeln von  $\pm 0,24$  mm Länge, fast keulenförmig. Im Coenenchym annähernd kugelige Spicula, dicke Walzen, die in 2 Gürteln angeordnete grosse Warzen tragen. Hellbräunlich/bläulich. Francis Bucht, Südafrika. Bona sp.

*reptans* KÜKENTHAL (1916, Valdivia-Werk, S. 53/4, Taf. II, Fig. 9,

Taf. IX, Fig. 45—49). Membranöser, walzenförmiger Ueberzug auf abgestorbenen Gorgonarien mit breiten, seitlichen Erhebungen. Polypen-spicula zarte, flache Spindeln  $\pm$  0,35 mm lang, mit weitstehenden flachen Dornen besetzt. Im Coenenchym Spindeln mit weitstehenden hohen Dornen besetzt, die auch keulenförmig werden können, von  $\pm$  0,18 mm Länge; kleine, dicke Spindeln von 0,09 mm Länge mit zwei Gürteln hoher Warzen. Hellbräunlich/bläulich. Ostseite Bouvet Insel. Bona spec.

Wir erhalten, wenn wir alle genannten, guten und schlechten, Arten als zum Genus *P.* gehörig annehmen, folgende geographische Verbreitung:

<i>coralloides</i>	Mittelmeer
<i>fulvum</i>	Rotes Meer
<i>norvegicum</i>	Norwegische Westküste
<i>punctatum</i>	Ostafrika (Zanzibar)
<i>membranaceum</i>	Francis Bucht (Südafrika)
<i>reptans</i>	Bouvet Insel

Das wäre nun allerdings eine sehr merkwürdige geographische Verbreitung: Atlantic, Indic; Boreal, mediterran, tropisch, subtropisch, subantarktisch! Eine grössere Abwechselung wäre kaum denkbar! Lassen wir jedoch die beiden Species *fulvum* und *punctatum*, die ich oben als unsichere Arten bezeichnet habe, fort, so ergibt sich rein atlantische Verbreitung mit Ausschluss der Tropenzone; Bevorzugung kühlen Wassers.

KÜKENTHAL hat bei *membranaceum* und *reptans* die „allerdings nicht leicht zu beantwortende“ Frage gestellt, zu welcher Gattung sie gehören (1916, Valdivia-Werk, S. 53). Nur zögernd stellt er sie zur Gattung *Alcyonium*. „Man hat dann die Wahl (1916, Zool. Jahrb., S. 462), entweder diese Formen zur Gattung *Alcyonium* zuzuzählen, wie dies v. KOCH für *A. coralloides* (Pallas) getan hat oder aber eine eigene Gattung zu gründen oder schliesslich die Gruppe als Untergattung von *Alcyonium* aufzufassen.“ Er entschliesst sich zur Zusammenfassung in eine Untergattung oder Gattung und nennt die Gruppe *Parerythropodium*, es bis auf weiteres unentschieden lassend, ob sie eine Untergattung von *Alcyonium* oder eine eigene Gattung darstellt.

So steht es damit noch jetzt!

Die mir vorliegenden Exemplare passen ganz gut in ihrem inneren und äusseren Aufbau in diese etwas gemischte Gesellschaft der vorläufig unter der Bezeichnung *Parerythropodium* vereinigten Arten. Sie sind von allen übrigen 4 der oben als species bonaे bezeichneten Arten verschieden, stellen daher eine neue Art des Genus *Parerythropodium* dar, für das ich jedoch KÜKENTHAL die Verantwortung überlassen muss. HICKSON (1930) möchte das Genus lieber bei seinen Stolonifera unterbringen (S. 240/1). In Bezug auf die geographische Verbreitung schliesst sich die neue Art den übrigen gut an. Die Atlantische Küste Maroccos und Mauretanien mit ihrem kalten Auftriebwasser formt ein Bindeglied zwischen der Norwegischen Küste und den südatlantischen Fundorten.

Ich komme nun zur Beschreibung von

*Parerythropodium maris-tenebrosi* n. sp.

(Taf. 1, Fig. 1, 2, 3, 4, und Textfig. A).

1. Type. F. VERMEULEN, Cap Blanco, Mauretanien, II—35 mm (Taf. 1, Fig. 1).

Die Kolonie überzieht ein lateral/dichotom in einer Ebene verzweigtes abgestorbenes Gorgonarienstückchen, von dem nur die stark abgeplattete hornige Achse erhalten ist. Einige Aeste sind frei vom Ueberzug. Die übrigen Teile des Gorgonarienskelettes sind eingehüllt von einer membranös ausgebildeten Alcyonarienkolonie, die an vielen Stellen verschieden breite und hohe Erhebungen und Verdickungen des Coenenchyms zeigt. Diese Erhebungen sind 3 bis 10 mm hoch, dick oder dünn, keulenförmig oder unregelmässig gelappt und erinnern in ihrem Aussehen etwa an kleine Alcyonium-Stückchen. Die Verdickungen bestehen ausschliesslich aus Coenenchym und enthalten keinerlei Seitenäste des Gorgonarienskelettes.

Das weisse Coenenchym wird durch eine 2—3 mm dicke Lage gebildet, die stellenweise völlig kelchfrei ist. (Die Unterseite ist ganz glatt). Hier und da erheben sich einzelne isolierte Kelche von der Unterlage, meist sind sie jedoch concentrirt auf die Erhebungen, wo sie ziemlich dicht nebeneinander stehen. Die Kelche sind, wenn mehr/minder ausgestreckt, 2 bis 5 mm hoch und fallen sofort durch ihre dunkelpurpurrote Färbung auf, nur die Tentakelkrone ist weiss, meist jedoch ganz eingezogen.

2. F. VERMEULEN, Cap Blanco, Taf. 1, Fig. 2.

Diese Kolonie bildet den Ueberzug eines walzenförmigen, schwach verzweigten Gorgonarienastes. Sehr ähnlich dem ersten, nur sind die Verdickungen hier bis ± 18 mm hoch, 8 bis 10 mm dick. Es ist kräftiger entwickelt als das erste Stückchen.

3. Dr. THÉODORE MONOD, leg. 1923, région du cap Blanc, au chalut.

Etwas zarter, Erhöhungen etwas dünner. Auf einem schwach verzweigten Gorgonarienast, auf dem eine Balanidenschale sitzt, die auch teilweise von der Alcyonarie überzogen ist. Sonst wie die früheren.

4. Dr. R. DOLLFUS. Stat. XI, 8. VII, 1923. „Vanneau“. (südlich von Mazagan, in der Nähe des maroccanischen Cap Blanco, aus 110 m Tiefe; nature du fond; roches perforées, éponges, gorgones).

Zartes Stückchen, ein schwach verzweigtes Hornskelett einer Gorgonarie überziehend. Auf den Erhöhungen sitzen auch vereinzelt ganz isolierte Polypen von ca 5 mm Länge. Die Erhöhungen sind hier ca 10 bis 12 mm hoch. Die Kelche sind hier mehr gestreckt als bei den übrigen Exemplaren, nicht so dunkel gefärbt, sondern mehr rosafarben. Manchmal ist die Tentakelkrone nicht so stark eingezogen als bei den anderen. (Taf. 1, Fig. 3, 4).

Für alle Stückchen gilt das Folgende:

Wir unterscheiden stets eine ganz kelchfreie Unterseite, die dem Substrat anliegt und eine mit Kelchen besetzte Oberseite. Die Unter-

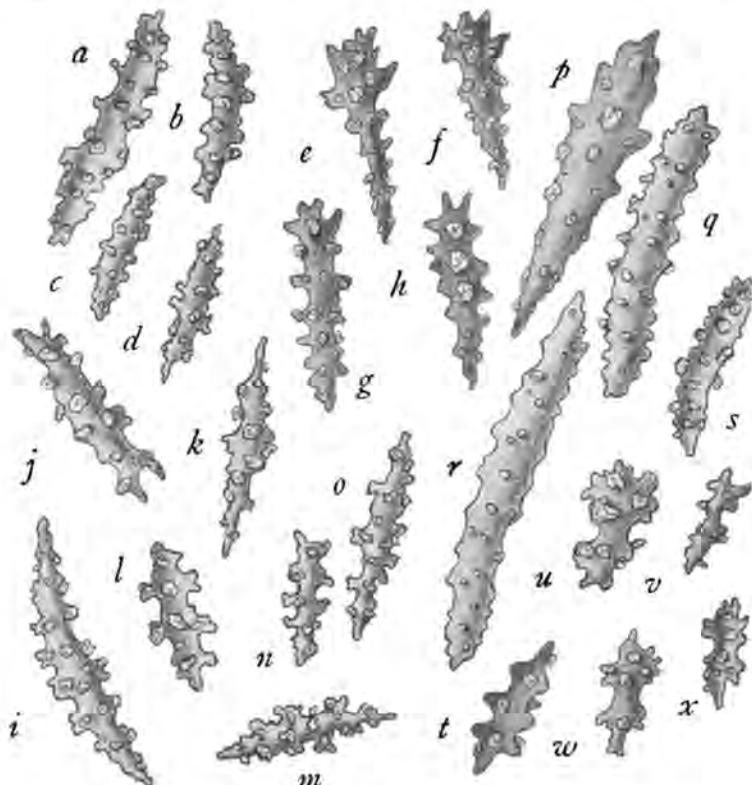
seite ist meist ganz glatt, ohne oder mit einer ganz dünnen, gelblichen Basalmembran. Auch auf Schnitten kann man feststellen, dass die Ausbildung der Hornsubstanz, sowohl an der Basis wie im Inneren sehr schwach ist. In tieferen Lagen sieht man wohl gelbliche Stränge, ob sie aber Teile der Solenialbekleidung oder Hornsubstanz sind, wage ich nicht zu entscheiden. Es gibt ja leider keine Reaction auf Hornsubstanz!

Die Gastralräume der Polypen sind verschieden lang; sehr lang, durch die ganze Länge der vertikalen Erhebungen ziehend bis an die Basis, dazwischen kürzere, anscheinend blind endigende. Die langen Gastralräume verschmälern sich in ihrem Verlaufe gegen die Basis zu und gehen in querlaufende Kanäle über, die etwas breiter sind als die Solenia. Untereinander sind die Gastralräume durch ein ziemlich dichtes Netzwerk ganz dünner Kanälchen verbunden. Man erhält auf Schnittpräparaten Bilder, die stark an die Verhältnisse bei *Alcyonium* erinnern.

Ueberall liegen in den Gastralräumen reife, gelbe Eier verstreut.

Es handelt sich hier also zweifellos um eine *vollentwickelte, geschlechtsreife Alcyonarie*, nicht etwa um ein membranöses Entwicklungsstadium.

Die Scleriten. (Textfig. A). Im Coenenchym können wir zwei ganz unscharf von einander geschiedene Lagen unterscheiden. In der Aussen- schicht (*a—h*) finden wir gerade oder gebogene Spindeln (*a—d*), unregel-



Textfigur A.

mässig, rauh bewarzt, von  $\pm 0,18$  mm Länge, ferner Warzen- oder Stachelkeulen (*e—g*) mit langem dünnem Stiele, unregelmässig, klein, niedrig bewarzt, oder mit wenigen grossen Warzen besetzt (*h*), die Stacheln am Vorderrande sind kurz und glatt ( $\pm 0,066$ — $0,088$  mm lang). In den tieferliegenden Schichten nur Spindeln (*j—m*), gerade oder gebogen, schlank, plump, meist unregelmässig, niedrig, rauh bewarzt ( $\pm 0,132$  mm lang). Alle Spicula weisslich durchsichtig. In den Kelchwänden grosse rote Keulen (*p*) oder Spindeln (*q, r*), wenig, niedrig, rauh bewarzt ( $\pm 0,198$  mm lang). In der Tentakelkrone kleine Spindeln (*s, t*) und kleine platte, keulenförmige Bildungen (*u—x*), beide wenig und niedrig bewarzt, ( $\pm 0,088$  mm lang). Alle sind weisslich/durchsichtig.

Die Kelche (Fig. 3, 4) bestehen aus drei deutlich von einander abgesetzten Teilen: einem cylindrischen basalen Teile, einem mittleren rundlichen und aus der Tentakelkrone. An der Basis sind sie 1 bis  $1\frac{1}{2}$  mm breit. Höhe bis ca 5 mm. Der kugelige Teil ist ca 1 bis  $1\frac{1}{2}$  mm hoch. Der cylindrische Teil weist 8 Längsfurchen auf, zwischen denen breite runde Längsrücken sichtbar sind. Er ist manchmal, an der Uebergangsstelle zum distalen rundlichen Teile, wulstförmig verdickt, ist zumeist ganz weiss, manchmal trägt er schwache dunkelrote Flecken. Der mittlere mehrminder kugelförmige Teil ist auch mit Längsfurchen und Wülsten besetzt und mit zahlreichen Reihen dunkelpurpurfarbener Spicula bedeckt. An der Basis sind sie tangential gelagert, vertikal auf die Langsachse, in höheren Partien sind sie in 8 pyramidenförmig zugespitzten Reihen angeordnet, die en chevron gelagert sind, in convergierenden Reihen, auf den Längsrücken. Der Winkel, in dem die Spiculareihen aufeinander stossen ist in der Nähe der Basis stumpf und wird distalwärts stets spitzer. Sehr ähnlich mit der Bewaffnung der Kelche bei *A. (E.) membranaceum* KÜKENTHAL. Wie die Spicula in der Tentakelkrone angeordnet sind, konnte ich nirgends mit einiger Sicherheit feststellen. Wahrscheinlich in convergierenden Doppelreihen. Sie sind ganz durchsichtig und heben sich durch ihre Form und Farbe scharf ab von den intensiv dunkelrotgefärbten viel grösseren Spindeln des kugelig verdickten Teiles. Die eingezogenen Kelche sind am inneren Rande der Öffnung mit 8 scharfen Einkerbungen versehen.

#### Diagnose von *Parerythropodium maris-tenebrosi*:

Dünne membranöse Kruste mit stellenweisen Verdickungen und Erhebungen, an kleine *Alcyonium*-Stöckchen erinnernd, meist die Hornskelette abgestorbener Gorgonarien (Plexauriden) überziehend. Kelchfreie Unterseite. Erhöhungen bis 18 mm hoch. Auf der Oberseite sind die Kelche fast ausschliesslich auf die Verdickungen concentrirt, stehen hier dicht nebeneinander, sonst nur vereinzelt auf dem Coenenchym. Kelche bis 5 mm lang, mit meist langem Gastralräumen, die tief ins Coenenchym hineinreichen, basal durch breitere Querkanäle, seitlich durch dünne Solenia mit einander in Verbindung stehen. Kelche mit acht Längswülsten, die mit dunkelroten, en chevron angeordneten Spindeln besetzt sind; Tentakelkrone weiss. Schwach ausgebildete Hornmembran auf der Unter-

seite, im Inneren keine Hornsubstanz. Coenenchym in zwei unscharf geschiedenen Lagen: Aussen Spindeln, unregelmässig, niedrig bewarzt,  $\pm 0,18$  mm lang, Warzen- oder Stachelkeulen  $\pm 0,066$  bis  $0,088$  mm lang. In tieferen Lagen niedrig, rauh bewarzte Spindeln  $\pm 0,132$  mm lang. Alle durchsichtig. In den Kelchwänden grosse rote Spindeln oder Keulen,  $\pm 0,198$  mm lang, in den Tentakeln kleine Spindeln von  $\pm 0,099$  mm Länge, weiss.

F a r b e : Coenenchym weiss, Kelche dunkelpurpurrot, Tentakel weiss.

V o r k o m m e n : Maroccanische und Mauretanische Küste, 20 bis 110 m Tiefe.

Die neue Art steht am nächsten *Parerythropodium membranaceum* KÜKENTHAL von Südafrika. Besonders der Aufbau und die Bewaffnung der Kelche stimmt genau überein.

#### LITERATUR VERZEICHNIS.

- AURIVILLIUS, M.: 1931, The Gorgonarians from Dr. SIXTEN BOCK's Expedition to Japan and Bonin Islands 1914. Kung. Svenska. Vetensk. Akad. Handling. 3. Ser., 9. Bd.
- DEICHHMANN, E.: 1936, The Alcyonaria of the Western part of the Atlantic ocean. Mem. Mus. Comp. Zoolog. Harvard Coll. Vol. LIII.
- HICKSON, S. J.: 1930, Some Alcyonarians from the Eastern Pacific ocean and on the classification of the Alcyonaria. Proc. Zool. Soc. London, pt. I.
- KLUNZINGER, C. B.: 1877, Die Koralltiere des Roten Meeres.
- KOCH, G. VON: 1881—1891, Die Alcyonaria des Golfes von Neapel. Mitt. Zool. Station, Neapel, 9. Bd.
- KÜKENTHAL, W.: 1916, Alcyonacea. Wiss. Ergeb. Deutsche Tiefsee-Exped. Valdivia, 13. Bd. 1. Lief.
- 1916, Die Gorgonarien Westindiens. Zool. Jahrb. Suppl. 11.
- 1916, System und Stammesgeschichte der Scleraxonier und der Ursprung der Holaxonier. Zool. Anz. 47. Bd.
- 1919, Gorgonaria, Wiss. Ergeb. Deutsche Tiefsee-Exp. Valdivia, 13. Bd.
- 1924, Gorgonaria, Das Tierreich. Lief. 47.
- LOUVILLE, J.: 1930, Liste provisoire des stations du "Vanneau" etc. sur la côte du Maroc, de 1923 à 1929. Inst. scient. chérifien (Lab. d'océanographie).
- MAY, W.: 1900, Beiträge zur Systematik und Chorologie der Alcyonaceen. Jenasche Zeitschr. f. Naturw. 33. Bd.
- MOLANDER, A. R.: 1917—18, Membranöse Ausbildung der Kolonien bei Gorgonacea. Ark. f. Zool. Bd. II.
- PAX, F.: 1936, Anthozoa. (Teil II: Actiniaria, Octocorallia). In: Die Tierwelt der Nord- und Ostsee. Lief. XXX.
- STIASNY, G.: 1937, Die Gorgonaria der Siboga-Expedition. Suppl. II. Revision der Scleraxonie. Monogr. XIII, b 8.
- STUDER, TH.: 1901, Alcyonaires provenant des campagnes de l'Hirondelle. Res. camp. scient. Albert I., prince de Monaco. Fasc. XX.

#### TAFELERKLÄRUNG.

##### *Parerythropodium maris-tenebrosi* n. sp.

- Fig. 1. Stöckchen, ein fächerförmig in einer Ebene verzweigtes Gorgonarien-Hornskelett überziehend. Weiss, mit dunkelroten Kelchen, Tentakel weiss.
- Fig. 2. Ein anderes, ein schwach verzweigtes Hornskelett überziehend.
- Fig. 3. Detailaufnahme aus etwa halber Höhe des Stöckchens 1. 5 ×.
- Fig. 4. Detailaufnahme einiger Calyces des Stöckchens 4. 8 ×.

G. STIASNY: PARERYTHROPODIUM MARIS-TENEBROSI *n. sp.*, EINE NEUE  
ALCYONARIE VON DER KÜSTE NORDWEST-ÄFRIKAS.



TAFEL 1.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN  
TE AMSTERDAM

---

PROCEEDINGS  
VOLUME XL

No. 9

President: J. VAN DER HOEVE

Secretary: M. W. WOERDEMAN

---

CONTENTS

- COHEN, ERNST, W. A. T. COHEN—DE MEESTER und J. LANDSMAN: "Die akute Zinnpest". (With one plate), p. 746.
- BAAS BECKING, L. G. M., and E. A. HANSON: "Note on the mechanism of photosynthesis", p. 752.
- CORPUT, J. G. VAN DER: "Sur la méthode de WEYL dans la théorie des nombres". (Deuxième communication), p. 756.
- WEITZENBÖCK, R.: "Ueber Trivektoren". II, p. 764.
- VERKADE, P. E., J. VAN DER LEE, A. J. S. VAN ALPHEN and M. ELZAS: "Researches on fat metabolism. VIII. Feeding experiments on dogs with sodium salts of normal saturated dicarboxylic acids", p. 771.
- VEEN, A. G. VAN, and J. C. LANZING: "On the analysis of the provitamins A in blood serum", p. 779.
- BROERSMA, G.: "Preliminary records of the velocity fluctuations in a boundary layer before and after the transition to turbulent motion". (Communicated by Prof. J. M. BURGERS), p. 784.
- HILLE, J. C. VAN: "Influence of Magnesium on the Relation between Chlorophyll Content and Rate of Photosynthesis". (Communicated by Prof. L. G. M. BAAS BECKING), p. 792.
- GEYN, WILHELMINA A. E. VAN DE: "The age of the Elsloo Beds". (Communicated by Prof. L. G. M. BAAS BECKING), p. 796.
- SCHMUTZER, J.: "Driehoekige suikerkristallen". (Communicated by Prof. L. RUTTEN), p. 800.
- ROOS, J., and C. ROMIJN: "The oxygen dissociation curve of the cow's blood during pregnancy and the dissociation curve of the blood of the New Born animal in the course of the first time after birth". (Communicated by Prof. H. J. JORDAN), p. 803.

**Chemistry.—Die akute Zinnpest.** Von ERNST COHEN, W. A. T. COHEN—  
DE MEESTER und J. LANDSMAN.

(Communicated at the meeting of October 30, 1937).

*Einleitung.*

In ihren Untersuchungen über den Einfluss mechanischer Deformation auf die Umwandlungsgeschwindigkeit (U.G.) polymorpher Metalle führten ERNST COHEN, W. A. T. COHEN—DE MEESTER und A. K. W. A. VAN LIESHOUT<sup>1)</sup> den Nachweis, dass, während die U.G. des weissen Zinns in die graue Modifikation (Zinnpest) durch äusserst geringe Zusätze (z.B. ein Tausendstel Gew. Proz.) gewisser Metalle (Bi, Sb, Pb, Cd, Au bezw. Ag) bedeutend herabgesetzt wird, der Zusatz derartiger Spuren von Al, Zn, Co, Mn bezw. Te diese Geschwindigkeit ganz enorm zu erhöhen im stande ist.

Beim Fe, Ni bezw. Cu liess ein solcher Einfluss auf die U.G. sich nicht feststellen. Ferner ergab sich, dass das gleichzeitige Zusetzen von mehreren Fremdmetallen eine additive Wirkung zur Folge hat.

Die genannten Einflüsse treten sowohl beim nicht-deformierten wie beim deformierten Banka-Zinn zu Tage.

Es liegt nach dem soeben gesagten die Frage auf der Hand, wie sich das weisse Zinn bei Temperaturen unterhalb des Umwandlungspunktes (+ 13°. 2 C.) verhalten wird, falls man dafür Sorge trägt, dass selbst die geringsten Spuren des die Umwandlung in graues Zinn so stark verzögernden Bi nicht vorhanden sind und welche U.G. sich erzielen lässt, falls man dem Bi-freien weissen Zinn geringe Mengen eines Metalls zusetzt, welches die U.G. zu beschleunigen vermag (z.B. Al bezw. Zn). Man dürfte dann erwarten, dass die Erzeugung einer „akuten“ Zinnpest möglich wäre.

Die nachstehend beschriebene Untersuchung befasst sich mit diesem Problem.

1. *Darstellung von spektrographisch Bi-freiem weissem Zinn.*

1. Wir verwendeten zur Darstellung eines möglichst Bi-freien Zinns das elegante, von C. W. MASON und W. D. FORGENG<sup>2)</sup> beschriebene Elektrolysen-Verfahren, welches sich auch zur Herstellung grösserer Mengen eines solchen Metalls eignet: In ein etwa 2 Liter fassendes Becherglas gaben wir eine Lösung, welche pro Liter Wasser 250 g

<sup>1)</sup> Proc. Royal Acad. Amsterdam, **38**, 377 (1935); **39**, 352, 1174 (1936). Auch Z. physik. Chem. (A) **173**, 1, 67, 169 (1935); (A) **177**, 331 (1936); (A) **178**, 221 (1937).

<sup>2)</sup> Metals and Alloys, April 1935. S. 87.

reinsten  $\text{SnCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$  (KAHLBAUM), sowie 10 cc konzentrierter, reinster Salpetersäure enthielt. Nach einiger Zeit bildet sich der bekannte weisse Niederschlag der „Metazinnsäure“, welchen man mittels eines WIRTSchen Glasrührers während der Elektrolyse in steter Bewegung erhält. Der Rührer, welcher von einem Elektromotor betrieben wurde, machte hundert Touren pro Minute. Diese Lösung elektrolysierten wir zwischen einer Graphitplatte ( $19.5 \times 4 \times 0.9$  cm) und einer Platte aus weissem Banka-Zinn ( $20 \times 7.5 \times 0.3$  cm), welche in Leinen gewickelt war. Zur Vermeidung einer Verunreinigung des Bades durch Fremdmetalle waren beide Elektroden an Zinndrähten aufgehängt. Die Stromstärke betrug etwa 6.5 Amp., die Klemmspannung 4—20 Volt. Wie auch MASON und FORGENG betonen, üben die Bedingungen, unter welchen die Elektrolyse stattfindet, innerhalb weiter Grenzen keinerlei Einfluss auf die Reinheit des gebildeten Zinns. Steigt die Temperatur des Bades über  $30^\circ$  C., so umgibt man den unteren Teil des Becherglases mit Eis, welches sich in einer Glasschale befindet. Von Zeit zu Zeit entfernt man das gebildete metallische, weisse Zinn mittels eines Hornlöffels aus dem Bade und bringt es in eine Schale, welche verdünnte Salzsäure enthält. Nachdem wir in dieser Art und Weise etwa 450 g weisses Zinn hergestellt hatten, wuschen wir es zunächst mit verdünnter Salzsäure, sodann mit Wasser, Alkohol bezw. Aether, trockneten bei etwa  $100^\circ$  C. und gaben es in einen Tiegel<sup>1)</sup>, in welchem es unter reinstem Zyankalium im FLETCHER-Gasofen geschmolzen wurde. Den so erhaltenen Regulus wuschen wir mit Wasser und verwendeten ihn ohne Weiteres zu unseren Versuchen. In dem so dargestellten Metall lässt sich auf spektrographischem Wege Bi nicht nachweisen<sup>2)</sup>, auch wenn das zur Elektrolyse verwendete Zinn dieses enthielt<sup>3)</sup>. Geringe Spuren Cu, Pb, sowie Fe sind noch spektrographisch nachweisbar<sup>2)</sup>.

## 2. Erzeugung der akuten Zinnpest.

2. Da in dem auf elektrischem Wege hergestellten weissen Zinn das das Eintreten der Zinnpest so sehr verzögernde Bi nicht mehr vorhanden ist, lässt sich erwarten, dass die Anwendung von zwei die Umwandlung beschleunigenden Faktoren, Deformation und Zusatz einer sehr geringen Menge Aluminium, zu einer „akuten“ Zinnpest führen wird. Dass dem tatsächlich so ist, zeigt folgender Versuch, den wir zahllose Male mit gleichem Erfolg wiederholten:

Eine gewogene Menge des elektrolytisch dargestellten weissen Zinns

<sup>1)</sup> Aus s.g. Pariser Masse. Dieselbe, enthält keine Fremdmetalle und wird deshalb in der hiesigen Reichsmünze bei der Darstellung des reinsten Münzsilbers verwendet.

<sup>2)</sup> Vergl. MASON und FORGENG, Metals and Alloys, April 1935, S. 87.

<sup>3)</sup> Die reinsten Zinnsorten des Handels (Banka- und Billiton-Zinn) enthalten stets geringe Mengen Bi, wie die Analysen des International Tin Research and Development Council in London gezeigt haben. Das Banka-Zinn enthält etwa 0.001, das Billiton-Zinn 0.0002 Gew. % Bi. Der Zinngehalt des ersten beträgt 99.97, der des letzteren 99.94 Proz.

gaben wir in eine Pyrexglaskugel, welche zu einem längeren Rohr von 11 mm innerem Durchmesser ausgezogen war. Nach Zusatz von 0.01 Gew. % Aluminium evakuierten wir den Apparat an der Hochvakuum-pumpe und schmolzen das Rohr zu. Man erhitzt den Inhalt der Kugel, sodass dessen Inhalt schmilzt, schüttelt kräftig, bis das Al in Lösung gegangen ist uns lässt durch Umdrehen des Ganzen die Schmelze in das Rohr fliessen. Nachdem der Apparat an der Luft auf Zimmertemperatur gekühlt war, zerschlugen wir das Glasrohr. Den so erzeugten Metallstab reinigten wir mittels einer Feile und walzten ihn bei  $-80^{\circ}$  C.<sup>1)</sup> zu einer längeren Platte, aus welcher wir uns zwei Plättchen von  $93 \times 13 \times 3.5$  mm schnitten.

Diese brachten wir in zwei Glasrohre und verschlossen dieselben mittels Gummipropfen. Sodann tauchten wir die Rohre in flüssiges Ammoniak ( $-50^{\circ}$  C.), welches sich in einem mehrere Liter fassenden DEWARSchen Gefäß befand. Dieses war in einen Holzkasten eingebaut und von Sägemehl umgeben.

Nach einer Stunde entfernten wir die Plättchen aus den Rohren, betrachteten das Metall und machten sodann von beiden Seiten eines jeden Plättchens eine photographische Aufnahme.

Hierauf brachten wir die Plättchen wieder in die Glasrohre und tauchten diese aufs neue in das flüssige Ammoniak.

Nach einer Stunde betrachteten wir das Metall zum zweiten Male, machten von beiden Seiten ein Photogramm u.s.w.

3. Die in unseren Abbildungen 1 bzw. 2 reproduzierten Photogramme  $B_1, B_2 \dots B_8$  belehren uns über den jeweiligen Zustand der einen Seite der Platte B, die Photogramme  $b_1, b_2 \dots b_8$  über denjenigen der anderen Seite dieser Platte und zwar in beiden Fällen nach 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, bzw. 9 Stunden.

Das tatsächliche Eintreten der akuten Zinnpest lässt sich somit in dieser Weise auch bleibend „ad oculos“ demonstrieren.

Unser Bild zeigt, dass nach einer Stunde die eine Seite ( $B_1$ ) bereits Spuren der Zinnpest aufweist, die andere Seite ( $b_1$ ) dagegen noch nicht. Nach zwei Stunden sind beide Seiten affiziert. Die grauen Warzen nehmen stets grössere Dimensionen an. Dies lässt sich in Fig. 2 besonders schön beobachten an den rechts im Bilde vorhandenen Warzen. Es entstehen Risse (wie in  $B_7$ ) und schliesslich ( $B_8$  bzw.  $b_8$ ) ist die Zinnpest so weit fortgeschritten, dass ein Teil der Platte in Pulver zerfallen ist, so dass nur die eine Hälfte noch photographiert werden konnte.

### 3. Das Vergrössern der Geschwindigkeit der akuten Zinnpest.

4. Obwohl das oben mitgeteilte beweist, dass sich die U.G. des Vorganges weisses Zinn  $\rightarrow$  graues Zinn mittels des beschriebenen Ver-

<sup>1)</sup> Proc. Royal Acad. Amsterdam, 38, 377 (1935), speziell daselbst § 8.  
Auch Z. physik. Chem. (A) 173, 169 (1935), speziell daselbst § 8.

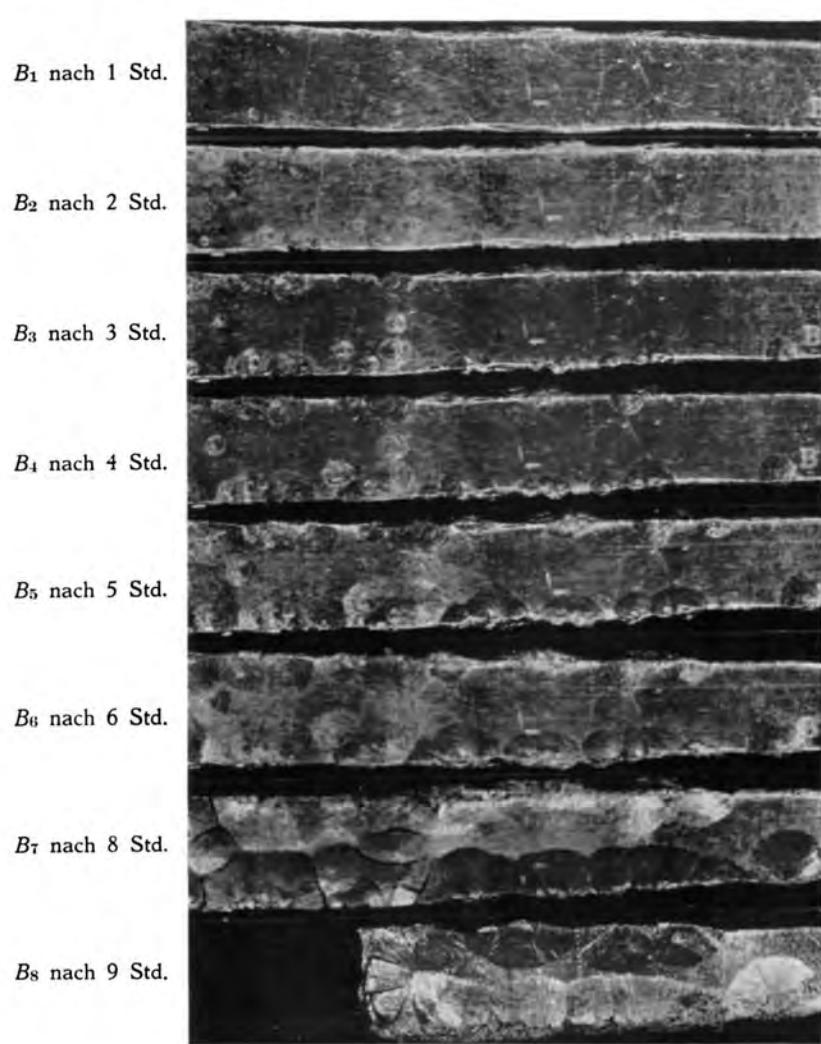


Fig. 1.

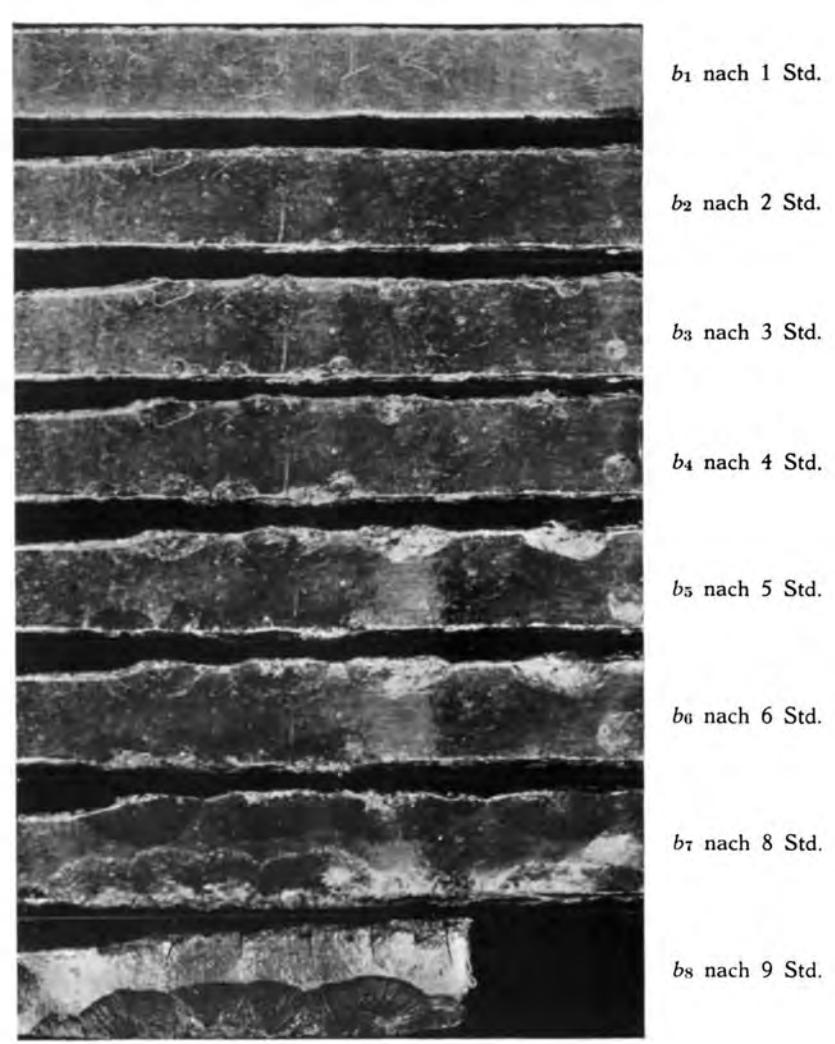


Fig. 2.



Fig. 3.

fahrens ganz enorm steigern lässt, sodass man das Studium der Umwandlung, welches in den älteren Versuchen von ERNST COHEN und seinen Mitarbeitern C. VAN EYK, E. GOLDSCHMIDT, K. DOUWES DEKKER und A. K. W. A. VAN LIESHOUT<sup>1)</sup> selbst bei Zusatz eines Katalysators (alkoholische Pinksalzlösung) Wochen, ja selbst Monate in Anspruch nahm, nunmehr innerhalb äusserst kurzer Zeiträume ausführen kann, versuchten wir dennoch die hier erzielte U.G. zu vergrössern. Dies gelang uns tatsächlich auf zwei Wegen und zwar:

a. Indem man ein Präparat des weissen Zinns verwendete, welches neben dem absichtlich zugesetzten Al (0.01 Gew.%) keine Metalle enthielt, welche die U.G. herabsetzen (wie Bi, Pb, Sb). Wie oben (§ 1) betont, lag aber die Möglichkeit vor, dass unser elektrolytisches Zinn noch eine unzulässige Menge Pb enthielt. Wir verwendeten deshalb das von der Firma WILLIAMS, HARVEY und Co. in London dargestellte, uns von der Firma ADAM HILGER daselbst gelieferte weisse Zinn, worüber dieselbe folgendes berichtet: „Die spektrographische Untersuchung ergab, dass vorhanden sind: Pb 0.0009; Cu 0.0005; Ag geringe Spur; Bi 0.0006; Zn 0.00005; In geringe Spur; Ca sehr geringe Spur; Fe 0.001; Sb 0.00014; As 0.00005 Prozent“. Der Zinngehalt ergibt sich (aus der Differenz) zu 99.996 Proz.<sup>2)</sup>.

Unsere Versuche mit diesem Zinn, welches wir mit dem Namen HILGER-Zinn (H.Z.) bezeichnen, gestalteten sich nunmehr wie folgt: Wir stellten uns in der in § 2 beschriebenen Art und Weise eine bei —80° C. gewalzte Platte mit 0.01 Gew.% Al her, aus welcher wir zwei Plättchen schnitten, und brachten dieselben auf —50° C. Es ergab sich, dass die U.G. des weissen Zinns in das graue eine viel grössere war als bei den in genau derselben Weise hergestellten Plättchen aus unserem elektrolytischen Zinn. Bereits nach 2½ Std. waren beide Plättchen in weit höherem Masse von der Zinnpest affiziert (Vergl. Fig. 3 mit Fig. 1, B<sub>2</sub> bezw. mit Fig. 2, b<sub>2</sub>).

b. Indem man die reversible Umwandlung weisses Zinn  $\rightleftharpoons$  graues Zinn an dem nämlichen Objekt (welches 0.01 Gew.% Al enthielt) öfters sich nach beiden Seiten vollziehen liess, ein Verfahren, welches bekanntlich<sup>3)</sup> die Geschwindigkeit polymorpher Umwandlungen in hohem Masse beschleunigt. Dabei ist indes zu bemerken (wir kommen hierauf in einer späteren Abhandlung zurück), dass die Umwandlung graues Zinn → weisses Zinn bei nicht zu hohen Temperaturen auszuführen ist. Wir

<sup>1)</sup> Z. physik. Chem. **30**, 601 (1899); **33**, 57 (1900); **35**, 588 (1900); **36**, 513 (1901); **48**, 243 (1904); **50**, 225 (1904); **63**, 625 (1908); **68**, 214 (1909); **127**, 178 (1927); (A) **173**, 32 (1935).

<sup>2)</sup> Die betreffende Mitteilung, welche das uns gelieferte Zinn betrifft, sagt u.A.: „Other elements specially sought in the spectrograms described, but with negative result were: Al, Au, B, Ba, Be, Cd, Co, Cr, Ga, Ge (?), Mg, Mn, Mo, Na (?), Ni (if present say 0.00001 per cent), Si, Ti, Tl (?), V, W“.

<sup>3)</sup> ERNST COHEN und A. K. W. A. VAN LIESHOUT, Z. physik. Chem. (A) **173**, 1 (1935), speziell daselbst § 6.

erwärmten unser Material zu diesem Zweck jedesmal, nachdem es sich in die graue Modifikation umgewandelt hatte, auf 25°.0 C. Unsere diesbezüglichen Versuche wurden dementsprechend wie folgt ausgeführt: Wir stellten uns aus unserem elektrolytischen Zinn einen Stab von 4 mm Durchmesser her, welcher aus einem 0.01 Gew.% Al enthaltenden von 12 mm Durchmesser bei —80° C. gewalzt war (Vergl. § 2). Den Stab von 4 mm Durchmesser zerschnitten wir in kleinere Stücke und gaben 10,4 g dieses Materials in ein etwa 12 cc. fassendes Dilatometer, in welchem wir reines Xylol als Messflüssigkeit verwendeten. Die benutzte Kapillare war so bemessen (Durchmesser 1.41 mm), dass 1 mm Steigung des Xylols in derselben der Umwandlung von 0.416 % des weissen Zinns entsprach. Nachdem der Stand des Xylols in der Kapillare bei 13°.2 C. notiert war, brachten wir das Dilatometer in das Kältebad (—50° C.), beliessen es darin während 10 Minuten, und lasen sodann den Stand des Xylols in der Kapillare wieder bei 13°.2 C. ab. Hierauf brachten wir den Apparat in einen auf 25°.0 C. regulierten Thermostaten und beliessen ihn darin solang, bis sich das gebildete graue Zinn quantitativ in das weisse umgewandelt hatte, d.h. bis das Xylol bei 13°.2 C. wieder seinen ursprünglichen Stand angenommen hatte. Hierauf tauchten wir den Apparat aufs neue während 10 Min. in das Kältebad, lasen den Stand der Flüssigkeit bei 13°.2 C. ab, und hielten ihn sodann wieder auf 25°.0 C., bis sich das graue Zinn aufs Neue quantitativ in das weisse umgewandelt hatte. Diese Manipulationen wiederholten wir mehrmals, sodass sich jedesmal feststellen liess, wieviel Prozente des weissen Zinns sich in 10 Min. bei —50° C. in das graue umgewandelt hatten. So fanden wir, dass bei der 4ten Umwandlung weisses Zinn → graues Zinn bei —50° C. der Meniskus in der Kapillare (gemessen bei 13°.2 C.) um 200 mm gestiegen war, was einer Umwandlung von 83.2 Prozent des weissen Zinns in die graue Modifikation entspricht<sup>1)</sup>.

Dies ist wohl die grösste Geschwindigkeit, welche wir bisher erreicht haben. Es ist nicht ausgeschlossen, dass dieselbe sich noch steigern lässt, indem man ein anderes Fremdmetall als Al verwendet. In unseren bisherigen Versuchen haben wir indes kein Metall kennen gelernt, welches eine grössere Beschleunigung der Umwandlung herbeizuführen vermochte.

#### *Rückblick.*

5. Es dürfte nunmehr interessant sein, die älteren Erfahrungen<sup>2)</sup> über die Zinnpest im Lichte der neuen Ergebnisse näher zu betrachten, und zwar um so mehr, als diese auch für das Studium der Allotropie

<sup>1)</sup> Hierzu ist folgendes zu bemerken: Die erste Umwandlung des weissen Zinns in das graue bei —50° C. ging relativ langsam (in 22 Std.) vor sich, da das Material zu Anfang in Stücken vorhanden war. Sind diese infolge der Umwandlung zu Pulver zerfallen, so wird die U.G. bekanntlich eine viel grössere.

<sup>2)</sup> Vergl. Fussnote 1 auf Seite 749.

anderer Metalle von grösster Bedeutung sind<sup>1)</sup>). Von vornherein war es dem Ersten von uns stets unerklärlich gewesen, dass er im Laufe der Jahre von mehreren Forschern die Mitteilung erhielt, dass es ihnen nicht gelungen sei bei dem von ihnen verwendeten Zinn die Umwandlung in die graue Modifikation hervorzurufen, selbst wenn sie genau den gegebenen Vorschriften folgten. Diese Tatsache findet nunmehr ihre Erklärung: die verschiedenen, reinsten Zinnsorten des Handels enthalten stets geringere bzw. grössere Spuren Bi, Pb, bzw. Sb, d.h. Metalle, welche die Umwandlung enorm verzögern. Ja, wir sind im Besitze von zwei Blöcken Banka-Zinn, von welchen der eine sich in graues Zinn verwandeln lässt, der andere dagegen selbst nach längerer Zeit nicht die geringste Spur einer Umwandlung aufweist. Ersterer enthält, wie die mikrochemische Analyse ergab, welche Herr Dr. Ing. C. J. DE WOLFF hier selbst freundlichst für uns ausführte, 0.001 Gew. % Bi, der andere dagegen 0.01 Gew. % dieses Metalls.

6. Auch die Tatsache, dass viele Gebrauchs- bzw. Kunstgegenstände nach längerer Zeit bei Temperaturen unterhalb + 13°.2 C. intakt bleiben, andere dagegen, welche gleichzeitig denselben Temperaturen ausgesetzt waren, der Zinnpest anheim fallen, wird jetzt sofort verständlich.

Von den zahllosen Beispielen, welche nach dieser Richtung (Museumskrankheit) zu unserer Kenntnis gelangten, sei hier ein einziges angeführt: die zinnere Denkmünze (Fig. 4), die das Bild von BALTHASAR BEKKER, *Sacro Sanctae Theologiae Doctor et verbi magister Amstelodami* trägt<sup>2)</sup> und welche seit dem Jahre 1692 in einem ungeheizten holländischen Museum aufbewahrt wurde, ist zwar sehr stark von

der Zinnpest affiziert, jedoch noch nicht gänzlich zerfallen. Wir vermuteten dementsprechend, dass das Material eines der stark verzögernd wirkenden Metalle (wie Bi, Pb) enthalten würde. Die von Herrn Dr. K. PIEPENBROEK hier selbst auf unsere Bitte ausgeführte Analyse ergab tatsächlich, dass Blei sowie auch Wismut sich makroskopisch nachweisen liessen.

#### *Zusammenfassung.*

Es wurde der Nachweis geführt, dass die enorme Verzögerung, welche die Umwandlung des weissen Zinns in das graue häufig aufweist, der Gegenwart sehr geringer Spuren gewisser Metalle (Bi, Pb, Sb) zuzu-

<sup>1)</sup> Vergl. auch A. L. TH. MOESVELD, Proc. Royal Acad. Amsterdam, **40**, 155 (1937); auch Z. physik. Chem. (A) **178**, 455 (1937).

<sup>2)</sup> Vergl. über diese Münze ERNST COHEN, Z. physik. Chem. **63**, 625 (1908), speziell daselbst S. 626 und 629, Fig. 7 und 8.



Fig. 4.

schreiben ist. Zusatz einer geringen Menge Al (z.B. 0.01 Gew. %) zum deformierten, weissen Zinn erhöht die U.G. derart, dass eine „akute“ Zinnpest eintritt, welche in kurzer Zeit zur völligen Disgregation des weissen Zinns zu führen im Stande ist. Es wurde auf die Bedeutung hingewiesen, welche diesen Erscheinungen auch für das Studium der Polymorphie anderer Metalle zukommt. Hier erschliesst sich ein weites Forschungsgebiet, welches wir bereits in Angriff genommen haben.

*Utrecht, Oktober 1937.*

VAN 'T HOFF-Laboratorium.

**Botany. — Note on the mechanism of photosynthesis.** By L. G. M. BAAS BECKING and E. A. HANSON. (From the Botanical Laboratory, the University, Leiden.)

(Communicated at the meeting of October 30, 1937.)

The chlorophyll is not evenly distributed within the plastid, but is concentrated in small granules, of about  $0.3 \mu$  in diameter (1). These granules possess a great absorptive power for light and contain more than 12 % by volume of chlorophyll (2). Earlier investigations have shown that the chlorophyll is present in these structures probably in monomolecular films, in which the pigment, on its hydrophilic side, is bound to a, probably proteinaceous, carrier (3), while on the lipophilic side, (the phytol) the structure is stabilized by a lipid, lecithinoid or carotinoid in nature.

Moreover, the porphin nucleus of the molecule appears always as a flat plate, whether spread in monomolecular layer on water, or in its amorphous, solid, state, and even in crystals of ethyl chlorophyllid. The porphin-nucleus of chlorophyll shows a surface of  $108 \text{ \AA}^2$  and a thickness of  $4.2 \text{ \AA}$  (4).

There is, therefore, reason to assume that also in the living plastid the porphin-nucleus will show these dimensions in the tangential interphases of the granule. The molecules cannot form a continuous pattern for at physiological pH, they appear to be hydrated, at pH 7 the hydration increasing the area of the nucleus by 9 % (5). Radial movement of assimilates in a granule of this structure is therefore possible, while tangential movement of assimilates might take place on the protein film or between the stabilized phytol chains. The entire granule is therefore in communication with the rest of the plastid.

The porphin-nucleus is asymmetrical. This asymmetry is caused partly by the cyclopentanone ring between the  $\gamma$  methine-carbon and the third pyrrol-ring (6). This ring contains an enolizable keto-group, in which the enol form is favoured by the action of light. The hydrogen of the outer hydroxyl appears to be active; quinone being reduced to hydroquinone in the light (7). This pentanon ring may be, therefore, important

in the chemism of photosynthesis. Other important features of the molecule are its large number of conjugated double bonds and its central Magnesium-atom.

Chlorophyll is fluorescent in the living plastid (8). The conjugated double bonds cause the molecule to absorb strongly in the red end of the spectrum. Fluorescence of molecules in the peripheral shell of the granules may excite molecules in the next shell to fluoresce, as the fluorescence- and absorption-bands of the chlorophyll overlap for the largest part. The carrier molecules do not show any absorption-bands in the red, and do not interfere. Therefore an effective optical energy-transmission is given in the granule. The Magnesium atom in the centre of the molecule seems to regulate the hydratation and the activity of the enol-hydrogen (9).

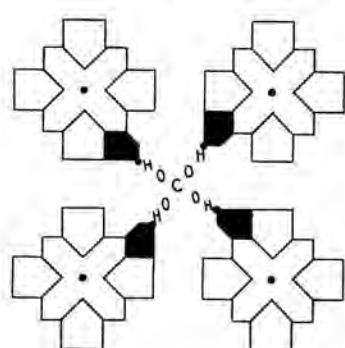
With minor variations, the modern theories on the mechanism of photosynthesis may be divided into two groups. The first group assumes the formation of hydrogen peroxide which, by the action of catalase is decomposed into oxygen and water (10). This idea seems to be untenable both because of recent experimental evidence and because of the fact that in other forms of carbon dioxide-assimilation (whether photosynthetic or chemosynthetic) other peroxides should be formed of which substances chemistry has never heard.

For if hydrogen sulphide should act as hydrogen donator analogy should require a substance of the type  $H_2S_2$  to be formed, while, in the assimilation of the anorgoxidants, or when hydrogen itself is directly brought into the  $CO_2$  molecule, it is hard to imagine which compound of peroxidic nature might originate. The second group of theories consider the chlorophyll itself as a hydrogen donor. Four molecules of chlorophyll contributing the four hydrogens required to reduce one molecule of  $CO_2$ . After this reaction, the chlorophyll should be rehydrogenated at the expense of some hydrogen donor (11). In the case of the green plant, this hydrogen donor should be water; oxygen being liberated. Now it has been established, not only for the green plant but also for the green- and the purple bacteria that the reduction of one molecule of  $CO_2$  requires four energy quanta (12). If the rehydrogenation of the chlorophyll takes place at the expense of two water molecules, this process should also require a large amount of energy, which cannot be found in the four quanta necessary for the transference of the four hydrogen atoms on the  $CO_2$ . If the chlorophyll were rehydrogenated at the expense of  $H_2S$ , less energy would be needed, so that we might expect a different quantum-requirement. As a matter of fact, this requirement is always the same, therefore it is most unlikely that the chlorophyll should act as a hydrogen donor. GAFFRON has pointed out that chlorophyll should only act as a photosensitizer and not as a "photoc enzyme" (13).

The chlorophyll molecules being situated in planes, with their active hydrogens also situated in the same plane, we assume that there exists an active constellation of four chlorophyll molecules, their respective

pentanone rings pointing to the same centre, in which centre the  $\text{CO}_2$  is reduced. The assumption of a porphin "tetrad", fixed to a carrier-molecule, is not improbable when we keep in mind the existence of a similar tetrad in the haemoglobin. In the latter case we have a structure, capable of the binding of two atoms of oxygen, in the former we have a structure with four active hydrogens. In as much as the central Magnesium-atom in the chlorophyll seems to increase the hydration-capacity of the molecule, the porphin-nuclei will be in heat-motion and the statistical probability of the active constellation is rather small. In an orthogonal pattern the probability of the active constellation is  $1/256$ , and the actual geometrical probability will be even smaller. If we assume the presence of an active constellation dictated by chance, only one in a thousand, or even less, molecules of chlorophyll would be active per molecule of  $\text{CO}_2$  reduced. This hypothesis agrees with the experimental data of EMERSON and ARNOLD (14).

We do not know whether the  $\text{CO}_2$  is hydrated by an enzyme, such as found in the blood, nor do we know whether this substance is fixed on the protein as a carbaminic compound, as is shown for haemoglobin (15). We only know that the living plastid has a great affinity for carbon dioxide and that some such process should take place. Several reasons have led us to believe that, if the active porphin-tetrad should be a reality, the carbon dioxide, held in its centre might be present in the form of orthocarbonic acid. The low dissociation-constant of an aqueous solution of carbon dioxide already urged SCHAUM in 1909 to propose this substance rather than  $\text{H}_2\text{CO}_3$ , as the raw material for photosynthesis (16). The pentanone ring being also the centre of hydration we might expect a large hydration tendency in the centre of the porphin tetrad. Here the molecule of orthocarbonic acid may be placed in such a fashion that the distance of its four hydroxyl-hydrogens to the four enol-hydrogens of the pentanone-rings is both short and equal. This may be seen from the structure of a model of this tetrad and is, very schematically, represented in the accompanying figure, which only shows the orthocarbonic acid in projection.



The components of the tetrad, which emit quanta by fluorescence, will cease to emit visible light when a molecule of carbon dioxide is "caught". The heteropolar character of the orthocarbonic acid is changed by the quanta absorbed and, after the fourth quantum is absorbed, the molecule breaks apart into a glucose-radical, oxygen and water. In the green plant, this oxygen partly enters into respiratory metabolism, and is partly liberated. Where active hydrogen-donors are present, the

oxygen enters into combination with these compounds (such as

hydrogen, hydrogen sulphide, sulphur, etc.). It is very unlikely that any of such reactions should be endothermic. Therefore all the energy required is furnished by the four light-quanta, the pigment remaining unchanged during the process. The recent findings of NAKAMURA on the photic oxygen emission of "starved" purple bacteria agrees with the above-mentioned hypothesis (17). The only place of the BLACKMAN reaction in the reaction-scheme given in this paper is prior to the photochemical reaction, and consists of the hydratation of the carbon dioxide. In this, and in several other respects our hypothesis shows similarity with the ideas of GAFFRON (18).

#### LITERATURE.

1. DOUTRELIGNE, Proc. Royal Acad. Amsterdam, **38**, 886 (1935).  
HUBERT, Rec. Trav. Bot. Néerl. **32**, 323 (1935).
2. HANSON, unpublished.
3. SPOEHR, Proc. VI. Int. Botan. Congress, Amsterdam (1935).  
STOLL, Naturwiss. **24**, 53 (1936).
4. BAAS BECKING, Proc. VI. Int. Botan. Congress, Amsterdam (1936).  
KETELAAR and HANSON, Nature **140**, 196 (1937).
5. HANSON, Proc. Royal Acad. Amsterdam, **40**, 281 (1937).
6. FISCHER, Lieb. Ann. **502**, 235 (1936).
7. STOLL, Naturwiss. **24**, 53 (1936).
8. BAAS BECKING and KONING, Proc. Royal Acad. Amsterdam, **37**, 674 (1934).  
KAUTSKY and SPOHN, Bioch. Z. **274**, 435 (1934).  
VERMEULEN, WASSINK and REMAN, Enzymologia **4**, 254 (1937).
9. STOLL, Naturwiss. **24**, 53 (1936).
10. v. NIEL and MÜLLER, Rec. Trav. Bot. Néerl. **28**, 245 (1931).
11. v. NIEL, Cold Spring Harb. Symp. on quant. biol. **3**, 138 (1935).
12. WARBURG, Ueber die Katalytische Wirkungen der Leb. Substanz. Berlin (1928).  
ROELOFSEN, Proc. Royal Acad. Amsterdam, **37**, 660 (1934).  
FRENCH, J. Gen. Physiol. **18**, 209 (1934).  
NAKAMURA, Acta Phytochimica **9**, 189 (1937).
13. GAFFRON, Naturwiss. **24**, 81 (1936).
14. EMERSON and ARNOLD, J. Gen. Phys. **16**, 191 (1932).
15. ROUGHTON, Nature **131**, 874 (1933).
16. WILKE, Chem. Ztg. **39**, 309 (1915).  
SCHAUM, Ber. chem. Ges. **51**, 1372 (1918).
17. NAKAMURA, Act. Phytochimica **9**, 231 (1937).
18. GAFFRON, Bioch. Ztschr. **292**, 241 (1937).  
Naturwiss. **24**, 103 (1936).

**Mathematics.** — *Sur la méthode de WEYL dans la théorie des nombres.*  
 Par J. G. VAN DER CORPUT. (Deuxième communication).

(Communicated at the meeting of October 30, 1937.)

**§ 3. Un théorème de M. VINOGRADOW sur les sommes de WEYL.**

Je dois, avant d'énoncer et de démontrer ce théorème de M. VINOGRADOW<sup>1)</sup>, faire quelques remarques.

1. A tout nombre positif  $\varepsilon$  peut être associé un nombre  $c_1$ , tel que pour tout nombre naturel  $\beta$ , le nombre  $\tau(\beta)$  de diviseurs de  $\beta$  soit inférieur à  $c_1 \beta^\varepsilon$ .

J'écris, pour démontrer cette propriété,  $\beta = \gamma \eta$ , où  $\gamma$  désigne le produit des facteurs premiers de  $\beta$  qui sont  $\leq 2^{\frac{1}{\varepsilon}}$ , et  $\eta$  le produit des facteurs premiers de  $\beta$  qui sont  $> 2^{\frac{1}{\varepsilon}}$ . Si  $\eta > 1$  et si  $\eta = p_1^{i_1} \dots p_s^{i_s}$  est le développement de  $\eta$  en facteurs premiers, alors

$$\eta > 2^{\frac{1}{\varepsilon}(\lambda_1 + \dots + \lambda_s)},$$

donc

$$\tau(\eta) = (\lambda_1 + 1) \dots (\lambda_s + 1) \leq 2^{\lambda_1 + \dots + \lambda_s} \leq \eta^\varepsilon.$$

La relation  $\tau(\eta) \leq \eta^\varepsilon$  est évidente si  $\eta = 1$ . Le théorème est donc démontré si  $\gamma = 1$ . Je suppose par conséquent  $\gamma \geq 2$ ; soit  $\gamma = q_1^{\mu_1} \dots q_t^{\mu_t}$  le développement de  $\gamma$  en facteurs premiers.

Donc

$$\gamma \geq 2^{\mu_1 + \dots + \mu_t}.$$

Mais  $t$  est inférieur ou égal au nombre des nombres premiers  $\leq 2^{\frac{1}{\varepsilon}}$ , donc certainement inférieur ou égal à  $2^{\frac{1}{\varepsilon}}$ . Donc

$$\begin{aligned} \tau(\gamma) &= (\mu_1 + 1) \dots (\mu_t + 1) \\ &\leq (1 + \mu_1 + \dots + \mu_t)^t \\ &\leq \left(1 + \frac{\log \gamma}{\log 2}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \leq \left(\frac{2 \log \gamma}{\log 2}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} < c_1 \gamma^\varepsilon. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> I. M. VINOGRADOW, Analytischer Beweis des Satzes über die Verteilung der Bruchteile eines ganzen Polynoms, Bull. Acad. Sci. U.R.S.S. (6), 21, 567—578 (1927) (en langue russe).

$c_1$  désignant un nombre convenablement choisi, ne dépendant que de  $\varepsilon$ . Les nombres  $\gamma$  et  $\eta$  étant premiers entre eux, il vient que

$$\tau(\beta) = \tau(\gamma)\tau(\eta) < c_1 \gamma^\varepsilon \eta^\varepsilon = c_1 \beta^\varepsilon.$$

2. Soit  $k \geq 1$  et soit  $\tau_k(\beta)$  le nombre des systèmes de nombres naturels  $\beta_1, \dots, \beta_k$  tel que  $\beta_1 \beta_2 \dots \beta_k = \beta$ . Je dis qu'à tout nombre positif  $\varepsilon$  peut être associé un nombre  $c_2$ , dépendant seulement de  $\varepsilon$  et de  $k$ , et tel que  $\tau_k(\beta) < c_2 \beta^\varepsilon$ .

Cette remarque est évidente pour le cas  $k=1$ , et a déjà été démontrée pour le cas  $k=2$ , car  $\tau_2(\beta)$  est précisément le nombre des diviseurs de  $\beta$ . Soit donc  $k \geq 3$  et soit le théorème démontré lorsque  $k$  est remplacé par  $k-1$ . De la définition de  $\tau_k(\beta)$  suit immédiatement que

$$\tau_k(\beta) = \sum_{d|\beta} \tau_{k-1}(d),$$

la somme étant étendue à tous les diviseurs  $d$  de  $\beta$ . En vertu de ce qui est supposé, il existe un nombre  $c_3$ , dépendant seulement de  $\varepsilon$  et de  $k$ , et tel que

$$\tau_{k-1}(d) < c_3 d^{\frac{1}{k}\varepsilon} \leq c_3 \beta^{\frac{1}{k}\varepsilon},$$

donc tel que

$$\begin{aligned} \tau_k(\beta) &\leq \sum_{d|\beta} c_3 \beta^{\frac{1}{k}\varepsilon} = c_3 \beta^{\frac{1}{k}\varepsilon} \tau(\beta) \\ &< c_3 \beta \cdot c_4 \beta^{\frac{1}{k}\varepsilon} = c_3 c_4 \beta^{\frac{1}{k}\varepsilon}. \end{aligned}$$

$c_3$  et  $c_4$  dépendant uniquement de  $\varepsilon$  et de  $k$ . La remarque est donc démontré.

3. Soient  $\sigma \geq 1$ ,  $X > 0$ ,  $D$  entier,  $a$  et  $q$  deux nombres entiers premiers entre eux,  $q > 0$ , et  $\psi(v)$  une fonction réelle de  $v$  définie pour les valeurs de  $v = D+1, D+2, \dots, D+q$ . Soit encore

$$\left| \Delta \psi(v) - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{\sigma}{q^2} \quad (v = D+1, \dots, D+q-1) \dots \quad (5)$$

Alors

$$\sum_{v=D+1}^{D+q} \text{Min}(X, |\sin \pi \psi(v)|^{-1}) < 5 X \sigma + 2 q \log q. \quad \dots \quad (6)$$

Soit  $C = D + \frac{1}{2}q$  ou  $C = D + \frac{1}{2}(q+1)$  selon que  $q$  est pair ou impair. Il suit de là que  $|v - C| \leq \frac{1}{2}q$ . L'expression

$$\psi(v) - \left( \psi(C) + (v-C) \frac{a}{q} \right) = \begin{cases} \sum_{w=C}^{v-1} \left( \Delta \psi(w) - \frac{a}{q} \right) & \text{quand } v > C, \\ 0 & \text{quand } v = C, \\ - \sum_{w=v}^{C-1} \left( \Delta \psi(w) - \frac{a}{q} \right) & \text{quand } v < C. \end{cases}$$

est donc, en valeur absolue, inférieure ou égale à  $\frac{1}{2}q \cdot \frac{\sigma}{q^2} = \frac{\sigma}{2q}$ .

Je considère ensuite les nombres  $\varrho_v$  ( $v = D+1, \dots, D+q$ ) définis par les relations

$$\varrho_v \equiv \frac{a}{q} (v - C) \pmod{1} \text{ et } -\psi(C) - \frac{1}{2} < \varrho_v \leq -\psi(C) + \frac{1}{2}.$$

Je dis que si un nombre  $\tau$  figure parmi ces nombres  $\varrho_v$ ,  $\tau + \frac{1}{q}$  figure aussi parmi ces nombres, si du moins  $\tau + \frac{1}{q} \leq -\psi(C) + \frac{1}{2}$ . Il y a, en effet, alors, un nombre entier  $v$  tel que  $D < v \leq D+q$  et que

$$\tau q \equiv a(v - C) \pmod{q},$$

cette dernière relation indiquant en même temps que  $\tau q$  est un nombre entier. Mais  $a$  et  $q$  étant premiers entre eux,  $a(v - C)$  parcourt un système complet de restes pour le module  $q$ , lorsque  $v$  prend successivement les valeurs  $D+1, \dots, D+q$ . Il existe donc certainement un nombre entier  $v'$ , tel que  $D < v' \leq D+q$  et que

$$\tau q + 1 \equiv a(v' - C) \pmod{q};$$

$\tau + \frac{1}{q}$  figure donc bien parmi les  $q$  nombres  $\varrho_v$ . Il en est de même de  $\tau - \frac{1}{q}$  si du moins

$$\tau - \frac{1}{q} > -\psi(C) - \frac{1}{2}.$$

Les  $q$  nombres  $\varrho_v$  forment donc un système équidistant, la distance entre deux nombres consécutifs quelconques étant  $\frac{1}{q}$ .

Je pose alors

$$r_v = \varrho_v + \psi(C) \quad (v = D+1, \dots, D+q).$$

Les  $q$  nombres  $r_v$  ainsi définis vérifient les relations

$$-\frac{1}{2} < r_v \leq \frac{1}{2} \text{ et } r_v \equiv \frac{a}{q}(v - C) + \psi(C) \pmod{1}.$$

Le nombre des  $r_v$  tels que  $|r_v| \leq \frac{2\sigma}{\epsilon}$ , est tout au plus égal à

$$1 + \frac{2 \cdot \frac{2\sigma}{\epsilon}}{\frac{1}{q}} = 1 + 4\sigma \leq 5\sigma.$$

La contribution de ces  $r_v$  à la somme figurant dans le membre de gauche de (6) est donc  $\equiv 5\sigma X$ .

Je considère maintenant les valeurs  $r_v > \frac{2\sigma}{q}$ , et je définis pour les valeurs correspondantes de  $v$  les nombres  $g_v$  par

$$g_v = \frac{a}{q} (v - C) + \psi(C) - r_v;$$

de là suit que ces nombres  $g_v$  sont entiers.

Il vient alors

$$\begin{aligned}\psi(v) - g_v &\equiv \psi(C) + \frac{a}{q}(v - C) + \frac{\sigma}{2q} - g_v \\ &= \frac{\sigma}{2q} + r_v \equiv 1 - r_v + \frac{\sigma}{2q} < 1 - \frac{3}{4}r_v\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\psi(v) - g_v &\equiv \psi(C) + \frac{a}{q}(v - C) - \frac{\sigma}{2q} - g_v \\ &= -\frac{\sigma}{2q} + r_v > \frac{3}{4}r_v,\end{aligned}$$

donc

$$|\sin \pi \psi(v)| = |\sin \pi(\psi(v) - g_v)| \equiv \sin \frac{3\pi r_v}{4} \equiv \frac{3}{2}r_v > r_v.$$

La contribution apportée par ces  $r_v > \frac{2\sigma}{q}$  à la somme figurant dans le membre de gauche de (6) est donc inférieure à

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{q} < q \int_1^q \frac{du}{u} = q \log q.$$

La même limitation s'obtient pour la contribution apportée par les nombres  $r_v < -\frac{2\sigma}{q}$ . La troisième remarque est donc démontrée.

4. Soient  $\sigma \geq 1$ ,  $G$  entier  $> 0$ ,  $X > 0$ ,  $a$  et  $q$  deux nombres premiers entre eux, avec  $q > 0$ , et  $\psi(v)$  une fonction réelle de  $v$ , définie pour toute valeur entière de  $v$  située dans le segment  $1 \leq v \leq G$ . Soit encore

$$\left| \Delta \psi(v) - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{\sigma}{q^2} \quad (v = 1, 2, \dots, G-1).$$

Alors

$$\sum_{v=1}^G \min(X, |\sin \pi \psi(v)|^{-1}) < (1 + q^{-1} G)(5X\sigma + 2q \log q).$$

La démonstration de cette remarque est très simple. J'applique la remarque précédente avec  $D=0, D=q, \dots, D=Lq$ ,  $L$  désignant le plus grand nombre entier tel que  $Lq \leq G$ . Cette remarque précédente étant ainsi appliquée  $1+L$  fois, la remarque nouvelle résulte immédiatement de ce que  $1+L \leq 1+q^{-1}G$ .

5. Soient  $\sigma \geq 1$ ,  $A$  entier  $> 0$ ,  $H$  entier  $> 0$ ,  $X > 0$ ,  $a$  réel,  $a$  et  $q$  deux nombres entiers premiers entre eux, avec  $q > 0$ , et tels que

$$\left| a - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{\sigma}{q^2}.$$

À chaque couple de nombres  $l$  et  $\varepsilon$ , avec  $l$  entier  $> 0$  et  $\varepsilon > 0$ , correspond alors un nombre  $c_5$  dépendant seulement de  $l$  et  $\varepsilon$ , et tel que

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^H \sum_{a_1=1}^{A-1} \dots \sum_{a_l=1}^{A-1} \min(X, |\sin \pi a h a_1 \dots a_l|^{-1}) \\ < c_5 A^\varepsilon H^\varepsilon (1 + q^{-1} HA^l) (X\sigma + q \log q). \end{aligned}$$

Pour la démonstration je pose  $ha_1 \dots a_l = \beta$ . Le nombre  $\beta$  ne prend que des valeurs  $\leq HA^l$  et le terme  $\min(X, |\sin \pi a \beta|^{-1})$  apparaît tout au plus  $\tau_{l+1}(\beta)$  fois. Or, de la seconde remarque suit, avec  $k=l+1$  et  $\frac{\varepsilon}{l}$  au lieu de  $\varepsilon$ , que

$$\tau_{l+1}(\beta) < c_6 \beta^{\frac{\varepsilon}{l}} \leq c_6 H^{\frac{\varepsilon}{l}} A^\varepsilon \leq c_6 H^\varepsilon A^\varepsilon,$$

$c_6$  désignant un nombre dépendant uniquement de  $\varepsilon$  et  $l$ . Le membre de gauche de l'inégalité à démontrer est donc inférieur ou égal à

$$\sum_{\beta=1}^{HA^l} \tau_{l+1}(\beta) \min(X, |\sin \pi a \beta|^{-1}) < c_6 H^\varepsilon A^\varepsilon \sum_{\beta=1}^{HA^l} \min(X, |\sin \pi a \beta|^{-1})$$

et la remarque 5 résulte maintenant immédiatement de la remarque 4.

Ces remarques préliminaires étant établies, il n'est pas difficile d'énoncer et de démontrer le théorème de M. VINOGRADOW. Je considère dans ce théorème la somme

$$S = \sum_{x=P+1}^{P+X} e^{2\pi i f(x)},$$

où  $P$  désigne un nombre entier,  $X$  un nombre naturel, et  $f(x)$  un polynôme réel, de degré  $k \geq 2$ , dont le coefficient de la plus haute puissance est le nombre irrationnel  $\frac{a}{k!}$ .

Je considère encore une fraction irréductible  $\frac{a}{q}$  à dénominateur  $> 0$ , arbitrairement choisie telle que

$$\left| a - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{a}{q^2},$$

$\sigma$  désignant un nombre  $\geq 1$ . Il existe une infinité de telles fractions, même avec  $\sigma = 1$ , car le nombre  $a$  peut être développé en fraction continue illimitée, et toute réduite  $\frac{a}{q}$  vérifie l'inégalité  $\left| a - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}$ .

Le théorème de M. VINOGRADOW s'énonce maintenant comme suit:

*Avec les conditions déjà énoncées, il peut être associé à tout nombre positif  $\varepsilon$  un nombre  $c_7$ , dépendant uniquement de  $\varepsilon$  et de  $k$ , et tel que*

$$|S| < c_7 X^{1+\varepsilon} (X^{1-k} + q^{-1})^{\frac{2}{\varepsilon}} (\sigma + q X^{-1})^{\frac{2}{\varepsilon}},$$

où  $\varkappa = 2^k$ .

Je démontrerai le théorème suivant, qui est un peu plus général:

*Avec les conditions déjà énoncées, il peut être associé à tout nombre positif  $\varepsilon$  un nombre  $c_8$  dépendant uniquement de  $\varepsilon$  et de  $k$ , et tel que pour tout nombre naturel  $H$*

$$\sum_{h=1}^H \left| \sum_{x=P+1}^{P+X} e^{2\pi i h f(x)} \right| < c_8 H^{1+\varepsilon} X^{1+\varepsilon} (H^{-1} X^{1-k} + q^{-1})^{\frac{2}{\varepsilon}} (\sigma + q X^{-1})^{\frac{2}{\varepsilon}},$$

où  $\varkappa = 2^k$ .

Le cas particulier  $H=1$  de ce dernier théorème fournit le théorème de M. VINOGRADOW.

Dans la suite,  $c_9, \dots, c_{13}$  représenteront des nombres, dépendant uniquement de  $\varepsilon$  et de  $k$ .

Je peux, pour la démonstration, supposer  $q < X^k H$ , car sinon le membre de droite de l'inégalité à démontrer est  $> c_8 H^{1+\varepsilon} X^{1+\varepsilon} \geq c_8 H X$ , et le membre de gauche est  $\leq H X$ . Donc

$$\log q < c_9 H^\varepsilon X^\varepsilon. \quad . . . . . \quad (7)$$

Je peux de même supposer  $X \geq k-1$ .

Soit  $A = A_1 = \dots = A_{k-1}$  le plus grand nombre entier  $\leq \frac{X}{k-1}$  et soit  $l = k-1$ . La première inégalité fondamentale généralisée donne

$$X^{-1} H^{-1} \sum_{h=1}^H \left| \sum_{x=P+1}^{P+X} e^{2\pi i h f(x)} \right| < 5 \operatorname{Max} \left( A^{-\frac{1}{2^{k-1}}}, T^{\frac{1}{2^{k-1}}} \right),$$

où

$$T = X^{-1} H^{-1} A^{1-k} \sum_{a_1=1}^{A-1} \dots \sum_{a_{k-1}=1}^{A-1} \left| \sum_{h=1}^H \sum_{x=P+1}^{P+X-a_1-\dots-a_{k-1}-1} e^{2\pi i h f(a)(x)} \right|,$$

$f(a)(x)$  désignant une fonction linéaire de  $x$ , dans laquelle le coefficient de  $x$  est égale à  $a_1 a_2 \dots a_{k-1} \alpha$ . Donc

$$T \leq X^{-1} H^{-1} A^{1-k} \sum_{a_1=1}^{A-1} \dots \sum_{a_{k-1}=1}^{A-1} \sum_{h=1}^H \operatorname{Min} (X, |\sin \pi h a_1 \dots a_{k-1}|^{-1})$$

est en vertu de la remarque 5 et de l'inégalité (7)

$$\begin{aligned} &< X^{-1} H^{-1} A^{1-k} c_{10} A^\varepsilon H^\varepsilon (1 + q^{-1} H A^l) (X \sigma + q \log q) \\ &< c_{11} H^\varepsilon X^\varepsilon (H^{-1} X^{1-k} + q^{-1}) (\sigma + q X^{-1}) \cdot c_9 H^\varepsilon X^\varepsilon \\ &\equiv c_{11} H^{\frac{1}{2} \varepsilon} X^{\frac{1}{2} \varepsilon} (H^{-1} X^{1-k} + q^{-1}) (\sigma + q X^{-1}). \end{aligned}$$

En outre

$$A^{-1} < c_{12} X^{-1} < c_{12} H^{\frac{1}{2} \varepsilon} X^{\frac{1}{2} \varepsilon} (H^{-1} X^{1-k} + q^{-1}) (\sigma + q X^{-1}),$$

par conséquent

$$X^{-1} H^{-1} \sum_{h=1}^H \left| \sum_{x=P+1}^{P+X} e^{2\pi i h f(x)} \right| < c_{13} H^\varepsilon X^\varepsilon (H^{-1} X^{1-k} + q^{-1})^{\frac{2}{\varepsilon}} (\sigma + q X^{-1})^{\frac{2}{\varepsilon}}.$$

Le théorème est donc démontré.

Je vais considérer maintenant un cas particulier du théorème de VINOGRADOW, à savoir le cas où les quotients incomplets du développement en fraction continue de  $\alpha$  sont bornés. Ceci est certainement le cas lorsque  $\alpha$  est un nombre irrationnel quadratique (c'est-à-dire un nombre irrationnel, qui satisfait à une équation du second degré à coefficients entiers), car pour de tels nombres, le développement en fraction continue est périodique.

Soit  $b_m$  le  $m^{\text{ème}}$  quotient incomplet, et  $q_m$  le dénominateur de la  $m^{\text{ème}}$  réduite. Donc, en vertu des propriétés des réduites

$$q_m = b_m q_{m-1} + q_{m-2} \quad (m \geq 2).$$

En vertu de  $q_{m-2} \leqq q_{m-1}$ , il est donc possible de trouver une constante  $B$ , dépendant de  $a$ , mais non de  $m$ , et pour laquelle

$$q_m \leqq B q_{m-1} \quad (m \geqq 2).$$

Je peux même mettre  $m \geqq 1$ , car la propriété est aussi vérifiée pour  $m=1$ , vu que  $q_1 = b_1$  et  $q_0 = 1$ . Soit alors  $\frac{a}{q}$  la première réduite de  $a$  telle que  $q > X$ , et soit  $\frac{a'}{q'}$  la réduite précédant immédiatement  $\frac{a}{q}$ . Donc  $q' \leqq X$  et  $q \leqq Bq'$ , d'où suit que  $q \leqq BX$ , ce qui donne, en vertu de ce que  $k \geqq 2$  et  $X \geqq 1$

$$\begin{aligned} (X^{1-k} + q^{-1})(1 + q X^{-1}) &= X^{1-k} + q^{-1} + q X^{-k} + X^{-1} \\ &< X^{-1} + X^{-1} + B X^{-1} + X^{-1} = (3 + B) X^{-1}. \end{aligned}$$

Nous arrivons ainsi à la conclusion :

*Si  $f(x)$  est un polynôme en  $x$ , de degré  $k \geqq 2$ , dont le coefficient de la plus haute puissance est un nombre irrationnel  $\frac{a}{k!}$ , et si les quotients incomplets du développement en fraction continue de  $a$  sont bornés, alors à chaque nombre positif  $\varepsilon$  peut être associé un nombre  $C$ , dépendant seulement de  $\varepsilon$ ,  $k$  et  $a$ , et tel que pour tout nombre naturel  $X$*

$$X^{-1} \left| \sum_{x=P+1}^{P+X} e^{2\pi i f(x)} \right| < C X^{\varepsilon - \frac{1}{2^{k-1}}},$$

*P désignant un nombre entier quelconque.*

Soit par exemple  $f(x) = \sqrt[11]{3} x^{11}$ ; alors  $a = 11! \sqrt[11]{3}$  et  $k = 11$ , et il vient, en choisissant  $\varepsilon = \frac{1}{1024} - \frac{1}{1025}$

$$X^{-1} \left| \sum_{x=P+1}^{P+X} e^{2\pi i \sqrt[11]{3} x^{11}} \right| < C' X^{-\frac{1}{1025}},$$

$C'$  étant une constante absolue convenablement choisie. Lorsque  $X$  croît au delà de toute limite, le membre de droite de la dernière inégalité tend vers zéro, mais assez lentement. Le mérite de M. VINOGRADOW est d'avoir crée une nouvelle méthode, donnant dans de nombreux cas un résultat beaucoup plus serré. J'en parlerai dans un autre article.

**Mathematics. — Ueber Trivektoren. II. Von R. WEITZENBÖCK.**

(Communicated at the meeting of October 30, 1937.)

**§ 3. Syzygien.**

Es sei jetzt  $n \geq 6$  und eine Ebene  $a_{ijk}$  sei durch die drei Punkte  $\xi$ ,  $\eta$  und  $\zeta$  gegeben, d. h. es sei  $a_{ijk} = (\xi \eta \zeta)_{ijk}$ . Wenn wir die Matrix

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots & \dots & \xi_n \\ \eta_1 & \eta_2 & \dots & \dots & \eta_n \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \dots & \dots & \zeta_n \end{vmatrix}$$

transponieren, so können wir die  $\xi_i$ ,  $\eta_i$ ,  $\zeta_i$  als ternäre Koordinaten eines Punktes  $P_i$  auffassen. Statt der drei Punkte  $\xi$ ,  $\eta$  und  $\zeta$  im  $G_n$ , die eine Ebene  $a_{ijk}$  bestimmen, haben wir dann  $n$  Punkte  $P_i$  im  $G_3$ , also in der projektiven Ebene; die  $a_{ijk}$  werden jetzt ternäre Klammerfaktoren  $(\xi \eta \zeta)_{ijk}$  also Invarianten der Punkte  $P$  im  $G_3$ , eine  $p$ -Relation zwischen den  $a_{ijk}$  wird zu einer Syzygie zwischen diesen Invarianten.

Die quadratischen  $p$ -Relationen werden zu irreduziblen Syzygien erster Art  $S_1$ . Allgemein, bei  $G_d$ -Koordinaten im  $G_n$ , wobei wir  $2d \leq n$  voraussetzen dürfen, ergibt sich dieser Zusammenhang wie folgt. Seien  $p_{i_1 i_2 \dots i_d}$   $G_d$ -Koordinaten im  $G_n$  und  $q$  äquivalent mit  $p$ . Dann werden alle quadratischen  $p$ -Relationen analog zu (3b)<sup>1)</sup> durch das identische Nullsein der Komitante

$$(q^d p \pi^{n-d-1}) (p q')^{d-1}$$

dargestellt, d. h. es ist für beliebige Indizes  $i$  und  $k$ :

$$(q^d p)_{i_1 i_2 \dots i_{d+1}} p_{k_1 k_2 \dots k_{d-1}} = 0.$$

Entwickeln wir hier die  $(d+1)$ -reihige Determinante  $(q^d p)$  nach der letzten Zeile und lassen den Zahlenfaktor  $d!$  weg, so kommt

$$\left. \begin{aligned} q_{i_1 i_2 \dots i_d} p_{i_{d+1} k_1 \dots k_{d-1}} - q_{i_{d+1} i_2 \dots i_d} p_{i_1 k_1 \dots k_{d-1}} + \dots \\ + (-1)^d q_{i_{d+1} i_2 \dots i_{d-1}} p_{i_d k_1 \dots k_{d-1}} = 0. \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (23)$$

Und dies ist nichts anderes als die Identität, die beim Umformen des Produktes  $(i_1 i_2 \dots i_d) (i_{d+1} k_1 k_2 \dots k_{d-1})$  zweier  $d$ -ärer Klammerfaktoren gebraucht wird, wobei die Reihe  $i_{d+1}$  in den ersten Klammerfaktor hineingebracht wird.

<sup>1)</sup> Vgl. die erste Mitteilung in diesem Bande, S. 676.

Im Falle  $d=3$  haben wir dann nach (3a) und (3b), wenn wir die bei Tensoren übliche Schreibweise mit hoch- und tiefstehenden Indizes verwenden:

$$(a^3 bxy \dots z)(bu') (bv') = A_{i_1 \dots i_{n-4}} x_{i_1} y_{i_2} \dots z_{i_{n-4}} u' v' = \\ = \frac{1}{4!} (A^4 xy \dots z)(a u') (a v') \equiv 0$$

und hieraus also die Syzygien erster Art  $S_1$ :

$$A_{rs}^{i_1 \dots i_{n-4}} = A_{i_1 \dots i_{n-4}} a_{rs} = A_{k_1 k_2 k_3 k_4, rs} = (a^3 b)_{ijk} b_{rs} = \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. . \quad (24)$$

Die Identität (5a) gibt dann für die Komponenten des Tensors (24):

$$4 A_{rs}^{i_1 \dots i_{n-4}} = A_{\varrho s}^{\varrho i_1 \dots i_{n-4}} \delta_r^{i_1} - A_{\varrho s}^{\varrho i_1 i_2 \dots i_{n-4}} \delta_r^{i_2} + A_{\varrho s}^{\varrho i_1 \dots i_{n-4}} \delta_r^{i_3} - \dots \\ - A_{\varrho r}^{\varrho i_2 \dots i_{n-4}} \delta_s^{i_1} + A_{as}^{\varrho i_1 i_2 \dots i_{n-4}} \delta_s^{i_2} - A_{\varrho r}^{\varrho i_1 \dots i_{n-4}} \delta_s^{i_3} + \dots \}, \quad (25)$$

wobei rechts die verjüngten Tensoren  $A_{q,s}^{p_1 p_2 \dots}$  auftreten, die den Klammerfaktoren  $(a^3 b^2 \dots)$  entsprechen. Zweimalige Verjüngung gibt hier Null:

$$A_{\alpha z}^{\rho \sigma i k l \dots} = 0 \quad , \quad (n > 6), \quad . . . . . \quad (26)$$

und zwar identisch Null in den  $a_{ijk}$ , ohne dass man auf die  $\xi$ ,  $\eta$  und  $\zeta$  zurückzugehen braucht. (26) gibt die Reduktion aller Syzygien erster Art  $S_1$  auf irreduzible Syzygien erster Art. Der Tensor (24) hat nämlich, da er in den  $n-4$  oberen und in den zwei unteren Indizes alternierend ist,  $\binom{n}{4} \cdot \binom{n}{2}$  Komponenten; wir haben also ebensoviele  $S_1$ . Nach (25) sind diese linear-homogen ausdrückbar durch die einmal verjüngten Tensoren

$$A_{\rho, i_1 \dots i_{n-5}}^{\rho i_1 \dots i_{n-5}} = A_s^{i_1 \dots i_{n-5}} = (a^3 b^2)_{k_1 \dots k_n} b_s, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

was nur  $n \cdot \binom{n}{5}$  Komponenten liefert. Aus (26) folgen dann noch  $\binom{n}{6}$  lineare, homogene, unabhängige Gleichungen

$$A_{\sigma(i_1 \dots i_{n-6})} = 0,$$

sodass sich im Ganzen

$$n \cdot \binom{n}{5} - \binom{n}{6} = \frac{5}{6} \cdot \binom{n}{5} \cdot (n+1)$$

irreduzible Syzygien  $S_1$  ergeben.

Dass zwischen den Grössen  $A_s^{i_1 \dots i_{n-5}}$  in der Tat keine anderen linearen Beziehungen mit konstanten Koeffizienten bestehen als die soeben genannten Gleichungen

$$A_s^{i_1 \dots i_{n-6}} = \sum_{s=1}^n A_s^{i_1 \dots i_{n-6}} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

kann man wie folgt zeigen. Sei

$$A_s^{i_1 \dots i_{n-5}} L_{i_1 \dots i_{n-5}}^s = (a^3 b^2 l^{n-5}) (b \lambda') = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

eine lineare Gleichung zwischen den  $A_s^{i_1 \dots i_{n-5}}$ . Gehen wir im Klammerfaktor  $(a^3 b^2 l^{n-5})$  zu Symbolreihen  $l'$  über, so entsteht

$$(l' a)^3 (l' b)^2 (b \lambda') = 0;$$

dies muss für alle  $a_{ijk} = b_{ijk}$  Null sein, was

$$l_{ijk[rs,t]} + l_{rst[ij,k]} = 0,$$

oder, nach der Bezeichnung (29)

$$L_{ijkrst}^i + L_{jkirst}^i + L_{kijrst}^i + L_{rstijk}^i + L_{strijk}^i + L_{trsijk}^i = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

ergibt. Setzen wir hier z.B.  $i=r$ , so folgt  $L_{ijkrst}^i = 0$ , d.h. es verschwindet jedes  $L_{i_1 \dots i_{n-5}}^k$  bei dem der obere Index  $k$  von allen unteren Indizes verschieden ist. Sind aber in (30) alle sechs Indizes untereinander verschieden und gehen wir bei jedem  $L_{ijkrst}^i$  zum algebraischen Komplement von  $jkrst$  über, so entsteht

$$L_{ii_1 \dots i_{n-6}}^i + L_{ji_1 \dots i_{n-6}}^i + L_{ki_1 \dots i_{n-6}}^i = L_{ri_1 \dots i_{n-6}}^r + L_{si_1 \dots i_{n-6}}^s + L_{ti_1 \dots i_{n-6}}^t.$$

Die Vertauschung von  $i$  und  $r$  gibt hier z.B.

$$L_{ii_1 \dots i_{n-6}}^i = L_{ri_1 \dots i_{n-6}}^r,$$

d.h.  $L_{ii_1 \dots i_{n-6}}^i$  ist konstant und unabhängig von den sechs möglichen Werten für  $i$ , was genau die Gleichungen (28) liefert.

#### § 4. Syzygien $S_2$ vom Typus B.

Wir geben jetzt noch eine Uebersicht über die einfachsten Syzygien zweiter Art  $S_2$ . Eine  $S_2$  ist eine Linearform  $L$  der irreduziblen Syzygien  $S_1$ , also der  $A_s^{i_1 \dots i_{n-5}}$  mit Koeffizienten  $K$ , die von den  $c_{ijk} = a_{ijk}$  abhängen, die identisch in diesen  $a_{ijk}$  Null wird, wenn die  $A_s^{i_1 \dots i_{n-5}}$  nach (27) durch die Invarianten  $a_{ijk} = b_{ijk} = c_{ijk}$  ausgedrückt werden. Ueberdies gilt  $S_2 \neq 0 \{S_1\}$ .

Die Koeffizienten in  $L$  müssen also wenigstens linear in den  $a_{ijk}$  sein und dies gibt die zwei Möglichkeiten:

1. die  $c_{ijk}$  sind durch einen oberen Index mit  $A_s^{i_1 \dots i_{n-5}}$  verbunden:

$$A_s^{e i_1 \dots i_{n-6}} c_{\varrho v w} = P_{s, v w}^{i_1 \dots i_{n-6}} \text{ aus } (a^3 b^2 c x_1 \dots x_{n-6}) (b s') (c v') (c w') \quad (31)$$

oder 2.: die Verbindung geschieht mit den unteren Index  $s$ , also in der Form

$$A_s^{i_1 \dots i_{n-5}} c^{s k_1 \dots k_{n-4}} = Q^{i_1 \dots i_{n-5}; k_1 \dots k_{n-4}} \text{ aus } (a^3 b^2 x_1 \dots x_{n-5}) (c^3 b y_1 \dots y_{n-4}). \quad (32)$$

Dass man keine weiteren Verbindungen zu berücksichtigen hat, lässt sich wie folgt einsehen. Die linke Seite einer  $S_2$  ist eine Summe von projektiven Komitanten  $K$  im  $G_n$ , die linear sind in den Tensorkomponenten  $A_s^{i_1 \dots i_{n-6}}$  und überdies die  $c_{ijk}$  enthalten. Man hat also für diese  $K$  in erster Linie aus den  $A_s^{i_1 \dots i_{n-6}}$  und den  $c_{ijk}$  Komitanten aufzubauen. Stellt man  $A_s^{i_1 \dots i_{n-6}}$  durch Symbole  $A'$  und  $a$  dar, wobei die  $A'$  ( $n-5$ )-fältige Komplexsymbole, die  $A$  also fünf-fältige Komplexsymbole sind, so kommen für den Aufbau der  $K$  nur die Linearfaktoren

$$(A' c), (A c') \text{ und } (\alpha c')$$

in Betracht, denn  $(A' a)$  liefert nach (28) Null, identisch bezüglich der irreduziblen Syzygien  $S_1$ .

Gehen wir bei  $(A' c)$  zu Komplexsymbolen  $A$  über, so entsteht der Klammerfaktor

$$(A^5 c x_1 \dots x_{n-6}) = (a^3 b^2 c x_1 \dots x_{n-6}),$$

wir erhalten also den Typus (31). Bei  $(A c')$  gehen wir zu Komplexsymbolen  $c$  über und erhalten für  $K$  den Ansatz

$$K = (A c^3 x_1 \dots x_{n-4}) (A u') (A v') (A w') (A s') (\alpha t').$$

Hier bringen wir alle Reihe  $A$  in den Klammerfaktor. Die hierzu nötigen Identitäten gelten für alle  $A_s^{i_1 \dots i_{n-6}}$ , sind also keine Syzygien  $S_2$ . Man kommt so wieder auf den Typus (31) oder auf ein zerfallendes

$$K = (A^5 x_1 \dots x_{n-5}) (a t') . (c u') (c v') (c w').$$

Der Linearfaktor  $(a c')$  liefert schliesslich den Typus (32).

Was zunächst die Ausdrücke  $P$  betrifft, so ist bei  $n \geq 7$  zu bemerken, dass die Verjüngungen  $P_{\sigma, v w}^{\tau, x_2 \dots x_{n-6}}$  nicht nur identisch in den  $a_{ijk}$ , sondern auch schon identisch in den irreduziblen Syzygien erster Art  $S_1$  verschwinden. Es ist nämlich nach (31) und (28):

$$P_{\sigma, v w}^{\tau, x_2 \dots x_{n-6}} = A_{\sigma}^{\tau, x_2 \dots x_{n-6}} c_{\varrho v w} = - A_{\sigma}^{\tau, x_2 \dots x_{n-6}} c_{\varrho v w} = 0 \{A\}. \quad (33)$$

Die einzige möglichen  $S_2$ , die sich aus den Ausdrücken  $P$  ergeben können, müssen aus

$$(a^3 b^2 c x_1 \dots x_{n-6}) (b u') (c v') (c w')$$

entstehen durch identisches Umformen, bei dem die zwei Reihen  $c$  von

$(cv')(cw')$  in den Klammerfaktor gebracht werden, d.h. also aus der Identität (7). Wir setzen

$$\begin{aligned} B_{u,v,w}^{x_1 \dots x_n=6} = & 2P_{u,v,w}^{x_1 \dots x_n=6} + P_{v,u,w}^{x_1 \dots x_n=6} + P_{w,v,u}^{x_1 \dots x_n=6} - \\ & \left. \left\{ \frac{1}{2}P_{u,\varrho w}^{\varrho x_2 x_3 \dots} \delta_v^{x_1} + \frac{1}{2}P_{u,\varrho w}^{\varrho x_1 x_3 \dots} \delta_v^{x_2} - \dots \right. \right\} . \quad (34) \\ & \left. + \frac{1}{2}P_{u,\varrho v}^{\varrho x_2 x_3 \dots} \delta_w^{x_1} - \frac{1}{2}P_{u,\varrho v}^{\varrho x_1 x_3 \dots} \delta_w^{x_2} + \dots \right\} \end{aligned}$$

Hier gilt  $n \geq 6$  und drückt man die  $P$  nach (31) durch die  $A$  aus, so sieht man leicht, dass die  $B$  nicht für alle  $A$  verschwinden. Also ist  $B=0$  eine Syzygie zweiter Art.

Wenn  $n=6$  ist, so tragen die  $B$  keine oberen Indizes. In (34) fehlen dann die Glieder mit  $\delta_i^k$ .

Vertauschen wir in (34)  $u, v$  und  $w$  zyklisch und addieren, so fallen rechts alle nicht verjüngten  $P$  heraus und es bleibt:

$$\sum B_{u,v,w}^{x_1 \dots x_n=6} = \sum \sum_{x_i} \delta_u^{x_1} (P_{v,\varrho w}^{\varrho x_2 \dots x_n=6} - P_{w,\varrho v}^{\varrho x_2 \dots x_n=6}) . \quad . . . \quad (35)$$

Bei  $n=6$  wird dies zu

$$B_{u,v,w} + B_{v,w,u} + B_{w,u,v} \equiv 0 \quad \{irred. S_1\}, \quad . . . \quad (36)$$

gibt also, wenn die drei Indizes  $u, v, w$  untereinander verschieden sind, eine lineare Abhängigkeit zwischen Syzygien  $S_2$ . Dies ist aber auch bei  $n > 6$  der Fall. Verjüngen wir nämlich (34) durch  $x_1 = u = \sigma$  zu setzen (und über  $\sigma$  von 1 bis  $n$  zu addieren), so entsteht wegen (33)

$$B_{\tau,v,w}^{\tau x_2 \dots x_n=6} = \frac{1}{2} (P_{v,\varrho w}^{\varrho x_2 \dots} - P_{w,\varrho v}^{\varrho x_2 \dots}), \quad . . . \quad (37)$$

Daher haben wir an Stelle von (35)

$$\sum B_{u,v,w}^{x_1 \dots x_n=6} = \sum \sum_{x_i} \delta_u^{x_1} B_{\tau,v,w}^{\tau x_2 \dots x_n=6} \quad . . . \quad (38)$$

Wegen der schießen Symmetrie von  $B_{u,v,w}$  in  $v$  und  $w$  sind also von den sechs Syzygien  $B_{u,v,w}$ , die sich durch Permutation der Indizes ergeben, höchstens zwei irreduzibel.

Verjüngen wir in (34) bei  $n > 6$  so:  $x_1 = v = \sigma$ , so entsteht

$$\begin{aligned} B_{u,\varrho w}^{\tau x_2 \dots x_n=6} = & P_{w,\varrho u}^{\tau x_2 \dots x_n=6} - P_{u,\varrho w}^{\tau x_2 \dots x_n=6} - \frac{1}{2} P_{u,\varrho \tau}^{\varrho \sigma x_3 x_4} \delta_w^{x_2} + \left. \right\} \\ & + \frac{1}{2} P_{u,\varrho \tau}^{\varrho \sigma x_3 x_4 \dots} \delta_w^{x_3} - \dots \quad (n \geq 7) \end{aligned} \quad (39)$$

und bei  $n=7$  fehlen rechts die Glieder mit  $\varrho \sigma$ .

Dieselbe Verjüngung in (37) ausgeführt ergibt

$$B_{\tau,\varrho w}^{\varrho x_2 \dots x_n=6} = -\frac{1}{2} P_{w,\varrho \tau}^{\varrho x_2 \dots x_n=6} \quad (n \geq 8). \quad . . . \quad (40)$$

Hier gibt  $x_3 = w = \tau$  wegen (33):

$$B_{\varrho,\tau}^{\varrho \sigma x_3 \dots x_n=6} \equiv 0 \quad \{irred. S_1\} \quad (n \geq 9). \quad . . . \quad (41)$$

Diese letzte Gleichung gibt  $\binom{n}{9}$  lineare Beziehungen zwischen den  $S_2$ .

Verjüngt man (39) für  $n > 7$  so:  $x_2 = w = \varrho$ , so erhält man:

$$B_{u,\varrho}^{\sigma \varrho x_3 \dots x_{n-6}} = -5 P_{u,\varrho}^{\sigma \varrho x_3 \dots x_{n-6}} \quad \dots \quad (42)$$

und dies gibt mit (40) zusammen:

$$B_{u,\varrho}^{\sigma \varrho x_3 \dots x_{n-6}} = 10 B_{\varrho,u}^{\sigma \varrho x_3 \dots x_{n-6}} \quad (n \geq 8) \quad \dots \quad (43)$$

Setzen wir dagegen (37) und (42) in (39) rechts ein, so entsteht

$$B_{u,\varrho w}^{\sigma x_3 \dots x_{n-6}} = -2 B_{\varrho,u w}^{\sigma x_3 \dots x_{n-6}} + \sum_{x_i} B_{\varrho,\varrho u}^{\sigma x_3 \dots \delta_w^{x_2}} \quad (n \geq 8). \quad \dots \quad (44)$$

### § 5. Die $S_2$ -Typen C, D und E.

Bei den Ausdrücken (32):

$$\begin{aligned} Q^{x_1 \dots x_{n-5}; y_1 \dots y_{n-4}} &= (a^3 b^2 x_1 \dots x_{n-5}) (c^3 b y_1 \dots y_{n-4}) = \\ &= (A^5 x_1 \dots x_{n-5}) (c^3 a y_1 \dots y_{n-4}) \end{aligned}$$

gibt die Umformung (5a), wobei wir die zwei Reihen  $b$  aus dem ersten Klammerfaktor in  $(c^3 b y_1 \dots y_{n-4})$  hineinbringen:

$$\begin{aligned} D^{x_1 \dots x_{n-5}; y_1 \dots y_{n-4}} &= 2 Q^{x_1 \dots x_{n-5}; y_1 \dots y_{n-4}} + \left. \right\} \\ &+ Q^{y_2 \dots y_{n-4}; y_1 x_1 \dots} - Q^{y_1 y_2 \dots y_{n-4}; y_2 x_1 \dots} + \dots \left. \right\} \\ &\dots + (-1)^{n-3} Q^{y_1 \dots y_{n-5}; y_{n-4} x_1 \dots x_{n-5}} \left. \right\} \end{aligned} \quad \dots \quad (45)$$

Auch hier gilt

$$D \equiv 0 \{a_{ijk}\}, \quad \not\equiv 0 \{\text{irred. } S_1\},$$

also ist  $D = 0$  eine Syzygie zweiter Art.

Den gleichen Typus  $D$  einer  $S_2$  erhält man aus

$$(a^3 b^2 x_1 \dots x_{n-5}) (c^3 b y_1 y_2 \dots y_{n-4}), \quad \dots \quad (46)$$

wenn man eine der Reihen  $y_i$  aus dem zweiten Klammerfaktor in den ersten hineinbringt. Das bei dieser Umformung entstehende Glied

$$(a^2 b^2 y_i x_1 \dots x_{n-5}) (c^3 a b y_1 \dots)$$

verschwindet identisch in den  $a_{ijk}$ , wie die Vertauschung der Reihen  $a$  und  $b$  zeigt.

Ein weiterer Typus  $S_2$  entsteht, wenn man in (46) die erste Reihe  $c$  des zweiten Klammerfaktors in den ersten hineinbringt. Auch hier ergeben sich zuerst zwei verschwindende Terme und es bleibt

$$\begin{aligned} C^{x_1 \dots x_{n-5}; y_1 \dots y_{n-4}} &= (a^3 b^2 x_1 \dots x_{n-5}) (c^3 b y_1 \dots y_{n-4}) + \\ &+ (a^3 b^2 c x_2 \dots) (c^2 b x_1 y_1 \dots) - (a^3 b^2 c x_1 x_3 \dots) (c^2 b x_2 y_1 \dots) + \dots \left. \right\} \\ &= Q^{x_1 \dots x_{n-5}; y_1 \dots y_{n-4}} + R^{x_1 \dots x_{n-5}; x_1 y_1 \dots} - R^{x_1 x_3 \dots; x_2 y_1 \dots} + \dots \end{aligned} \quad (47)$$

Auch hier gilt  $C \equiv 0 \{a_{ijk}\}, \not\equiv 0 \{irred. S_1\}$ . Die letzten  $n-5$  Terme  $R$  von (47) lassen sich auf die bei den Typen  $B$  gebrauchten Bildungen  $P$  (vgl. (31) und (34)) zurückführen. Es war

$$P_{u,v,w}^{x_1 \dots x_{n-6}} = (a^3 b^2 c x_1 \dots x_{n-6}) (bu') (cv') (cw').$$

Gebrauchen wir hierfür die Symbole  $P^6 b c^2$ , setzen also

$$(a^3 b^2 c x_1 \dots x_{n-6}) (bu') (cv') (cw') = (P^6 x_1 \dots x_{n-6}) (bu') (cv') (cw'),$$

so ist z.B.

$$R^{x_1 x_2 \dots x_{n-5}; x_1 y_1 \dots y_{n-4}} = (P^6 x_2 \dots x_{n-5}) (c^2 b x_1 y_1 \dots y_{n-4})$$

und die Gleichung (47) lässt sich dann auch wie folgt schreiben:

$$C^{x_1 \dots x_{n-5}; y_1 \dots y_{n-4}} = Q^{x_1 \dots x_{n-5}; y_1 \dots y_{n-4}} - 6(P^5 x_1 \dots x_{n-5})(Pbc^2 y_1 \dots y_{n-4}). \quad (47a)$$

Im Falle  $n=6$  lautet (47):

$$C^{x;yz} = (a^3 b^2 x)(c^3 b y z) + (a^3 b^2 c)(c^2 b x y z) = Q^{x;yz} + (a^3 b^2 c)(c^2 b x y z); \quad (48)$$

(45) dagegen wird bei  $n=6$ :

$$D^{x;yz} = 2Q^{x;yz} + Q^{z;yx} - Q^{y;zx}. \quad (49)$$

Eliminiert man hier die Terme rechts mit Hilfe von (48), so erhält man

$$D^{x;yz} = 2C^{x;yz} + C^{z;yx} - C^{y;zx}. \quad (50)$$

Im Falle  $n=6$  wird also der Typus  $D$  überflüssig, er gibt nach (50) Reduzibilität auf den Typus  $C$ .

Bei  $n > 6$  geben die Bildungen

$$R^{x_1 \dots x_{n-6}; z_1 \dots z_{n-3}} = (a^3 b^2 c x_1 \dots x_{n-6}) (b c^2 z_1 \dots z_{n-3})$$

zu einem letzten Typus  $E$  einer Syzygie  $S_2$  Anlass. Bringt man nämlich eine der Reihen  $x$ , z.B.  $x_1$ , des ersten Klammerfaktors in den zweiten, so entsteht:

$$E^{x_1; x_2 \dots x_{n-6}; z_1 \dots z_{n-3}} = R^{x_1 \dots x_{n-6}; z_1 \dots z_{n-3}} - \\ - R^{x_1 x_2 \dots x_{n-6}; x_1 z_1 \dots z_{n-3}} + R^{x_2 x_3 \dots x_{n-6}; x_1 z_1 z_2 \dots z_{n-3}} - \dots \quad (51)$$

Hier bildet der Fall  $n=7$  noch eine Ausnahme. Wir haben dann nämlich nach (45) und (47):

$$D^{xy;rst} = 2Q^{xy;rst} + Q^{st;xy} - Q^{rt;xy} + Q^{rs;txy}, \quad (52)$$

$$C^{xy;rst} = Q^{xy;rst} + R^{y;xrst} - R^{x;yrst}, \quad (53)$$

Eliminieren wir in (52) wieder alle  $Q$  vermöge (52), so kommt

$$D^{xy;rst} = 2C^{xy;rst} + C^{st;xy} - C^{rt;xy} + C^{rs;txy} + 2E^{xy;rst}, \quad (54)$$

d.h. der Typus  $E$  wird im Falle  $n=7$  reduzibel auf  $C$  und  $D$ .

**Chemistry. — Researches on fat metabolism. VIII. Feeding experiments on dogs with sodium salts of normal saturated dicarboxylic acids.**  
By P. E. VERKADE, J. VAN DER LEE, A. J. S. VAN ALPHEN and  
M. ELZAS. (From the chem. lab. of the Dutch Commercial Uni-  
versity and the State Serum Institute, Rotterdam.)

(Communicated at the meeting of October 30, 1937.)

§ 1. We have shown that excretion of the dicarboxylic acid formed by  $\omega$ -oxidation of the component acid (*diaciduria*) takes place both in man<sup>1)</sup> and in the dog<sup>2)</sup> to very different degrees after administration of various saturated mono-acid triglycerides under as nearly as possible similar conditions. In both cases this phenomenon has up to the present been observed only after the consumption of a few lower triglycerides.

The conclusion has been drawn by B. FLASCHENTRÄGER and his collaborators<sup>3)</sup> from this fact, as well as from the results of their own feeding experiments on dogs with salts and esters of fatty acids, that the way of degradation of saturated fatty acids discovered by us — consisting of  $\omega$ -oxidation followed by bilateral  $\beta$ -oxidation of the dicarboxylic acid produced — is restricted to lower members of the series. In their 1936 paper quoted above, B. FLASCHENTRÄGER and K. BERNHARD expressly state that  $\omega$ -oxidation is restricted to the fatty acids with 8—11 carbon atoms and that one must think of a "spezifische Tendenz zur  $\omega$ -Oxydation von Seiten der mittleren Fettsäuren". Consequently the error in principle is committed of inferring the non-occurrence of  $\omega$ -oxidation from the absence of diaciduria. In a similar way one might also, or rather might have to, come to the conclusion that there is a question of an appreciable unilateral  $\beta$ -oxidation of fatty acids only in pathological states, namely when ketonuria (ketosis) occurs.

If this standpoint were correct the way of degradation we have found would be physiologically of but little importance since the lower fatty acids occur to an appreciable extent as component acids in only a few of the customary food fats. In our opinion it is, however, untenable. The work to be discussed below leaves indeed little or no reasonable

<sup>1)</sup> P. E. VERKADE and J. VAN DER LEE, Biochem. J. **28**, 31 (1934).

<sup>2)</sup> P. E. VERKADE, J. VAN DER LEE and A. J. S. VAN ALPHEN, Z. physiol. Chem. **247**, 111 (1937).

<sup>3)</sup> B. FLASCHENTRÄGER, K. BERNHARD, C. LÖWENBERG and M. SCHLÄPFER, Z. physiol. Chem. **225**, 157 (1934); B. FLASCHENTRÄGER and K. BERNHARD, Helv. chim. acta **18**, 962 (1935); Z. physiol. Chem. **238**, 221 (1936); see also K. SCHLUMPF, Diss. Univ. Zürich (1936).

doubt that all saturated fatty acids — we are only concerned with these here — are catabolised in the way we have discovered.

§ 2. In our opinion it was already very improbable *a priori* that, for example, the terminal methyl group of the fatty acids with 8—11 carbon atoms can indeed be oxidised in the human organism to a carboxyl group and in two cases (capric acid and undecic acid) recognisably fairly readily, and on the other hand that of the members of the series immediately above or below would be non-oxidisable. One should not lose sight of the fact, already pointed out by us in previous papers<sup>4)</sup> and also by others<sup>5)</sup> that the oxidation of the methyl group in fatty acids discovered by us and called  $\omega$ -oxidation for the sake of brevity is certainly not an isolated phenomenon. On the contrary numerous cases of methyl group oxidation *in vivo*, and indeed in compounds of very divergent constitution, have already been described in the literature<sup>6)</sup>. The following may serve as typical examples: the formation of benzoic acid from toluene, of mandelic acid from methylphenylketone, of HILDEBRANDT's acid from geranic acid, citral, geraniol and dihydromyrcene<sup>7)</sup>, of 3-methyl-nonene-(2)-dioic acid-(1,9) from 3-methyl-nonene-(2)-oic acid-(1)<sup>5)</sup>, of polyene dicarboxylic acids from monocarboxylic acids of the type (I) and of trans- $\pi$ -



-apocamphor-carboxylic acid-(7) from camphor<sup>8)</sup>.

The formation of succinic acid in cultures of *Aspergillus niger* with calcium butyrate as the sole source of carbon reported by H. B. STENT, V. SUBRAMANIAM and TH. K. WALKER<sup>10)</sup> is also interesting in this connection; the workers just quoted however rightly observe that a different way of formation of this succinic acid than by methyl group oxidation is also quite conceivable.

Certain processes observed *in vivo* receive a very satisfactory explanation on the assumption of a primarily occurring methyl group oxidation. Reference may be made to the well known observation of H. THIERFELDER and F. KLENK<sup>11)</sup> that *n*-propyl- and *n*-amylbenzene are oxidised to

<sup>4)</sup> P. E. VERKADE and J. VAN DER LEE, Chem. Weekblad **33**, 163 (1936); P. E. VERKADE, Bull. soc. chim. biol. **18**, 989 (1936).

<sup>5)</sup> R. KUHN, F. KÖHLER and L. KÖHLER, Z. physiol. Chem. **242**, 171 (1936).

<sup>6)</sup> See the reviews of K. FROMHERZ in Handb. norm. path. Physiol. **5**, 1001 (1928), of H. GESENUS in E. ABDERHALDEN's Handb. d. biol. Arbeitsmeth. IV, **5** (1st half), 863 (1931) and of K. SCHLUMPF, loc. cit.

<sup>7)</sup> H. HILDEBRANDT, Arch. exptl. Path. Pharmacol. **45**, 110 (1901); R. KUHN and K. LIVADA, Z. physiol. Chem. **220**, 235 (1933); R. KUHN, F. KÖHLER and L. KÖHLER, loc. cit.

<sup>8)</sup> R. KUHN, F. KÖHLER and L. KÖHLER, Z. physiol. Chem. **247**, 197 (1937).

<sup>9)</sup> Y. ASAHIWA and M. ISHIDATE, Ber. **68**, 947 (1935).

<sup>10)</sup> J. Chem. Soc. 1929, 1987.

<sup>11)</sup> Z. physiol. Chem. **141**, 13 (1924).

benzoic acid and n-butyl- and n-hexylbenzene to phenylacetic acid; the fate of the  $\omega$ -phenylsubstituted fatty acids produced from these hydrocarbons by  $\omega$ -oxidation had in fact already been cleared up by the classical researches of F. KNOOP<sup>12)</sup>. Other examples are the transformation of 2-methyl(benzenesulphonyl)amino-dodecoic acid-(1) into 2-methyl-(benzenesulphonyl)amino-hexanedioic acid-(1,6) in the dog found by B. FLASCHENTRÄGER, K. BERNHARD, C. LÖWENBERG and M. SCHLÄPFER<sup>3)</sup> and the formation of 3-methyl-hexene-(2)-dioic acid-(1,6) from 3-methyl-dodecen-(2)-oic acid-(1) observed recently in the rabbit by R. KUHN, F. KÖHLER and L. KÖHLER<sup>5)</sup>; in both these cases the  $\omega$ -oxidation would then be followed by a triple  $\beta$ -oxidation.

According to A. CH. CHIBNALL and S. H. PIPER<sup>13)</sup>  $\omega$ -oxidation may perhaps play a part in the formation of sabinic acid (12-hydroxy-dodecoic acid), thapsic acid (hexadecanedioic acid), juniperic acid (16-hydroxy-hexadecenoic acid) and similar products in the plant. Likewise it has already been postulated that civetone is produced from oleic acid and indeed by ring closure of the  $\omega$ -oxidation product of the latter. It is also surmised that methyl group oxidation plays a part in the transitions between sterols, bile acids, heart poisons, sex hormones, etc. These examples show that the notion of a methyl group oxidation as a general and important biological principle is everywhere a pregnant one.

Our standpoint, that all normal saturated fatty acids are capable of undergoing  $\omega$ -oxidation in the animal organism, taken up directly after the discovery of the first case of diaciduria<sup>14)</sup> is the result of consideration of the facts brought up in this § and is indeed the only logical one.

§ 3. Experiments of J. BAER and L. BLUM<sup>15)</sup>, B. FLASCHENTRÄGER<sup>16)</sup>, H. G. SMITH<sup>17)</sup> and E. ANDERSEN<sup>18)</sup> with one or more normal saturated dicarboxylic acids with 6—10 carbon atoms have shown that, after administration of the sodium salts either by subcutaneous injection or *per os* to dogs, a considerable portion of the acid is excreted in the urine. Y. MORI<sup>19)</sup> observed the same thing for adipic acid in the rabbit and E. ANDERSEN<sup>18)</sup> in man; the latter, for example, administered 25 g of adipic acid as sodium salt in daily amounts of 5 g *per os* to two subjects and found not less than 55 % and 72 % respectively of the acid in the

<sup>12)</sup> Hofmeisters Beitr. **6**, 150 (1905).

<sup>13)</sup> Biochem. J. **28**, 2209 (1934).

<sup>14)</sup> P. E. VERKADE, M. ELZAS, J. VAN DER LEE, Miss. H. H. DE WOLFF, Mrs. A. VERKADE—SANDBERGEN and D. VAN DER SANDE, Proc. Royal Acad. Amsterdam **35**, 251 (1932).

<sup>15)</sup> Hofmeisters Beitr. **11**, 101 (1908).

<sup>16)</sup> Z. physiol. Chem. **159**, 297 (1927); B. FLASCHENTRÄGER and K. BERNHARD, ibid. **238**, 221 (1936).

<sup>17)</sup> J. Biol. Chem. **103**, 531 (1933).

<sup>18)</sup> See B. FLASCHENTRÄGER, loc. cit., p. 299.

<sup>19)</sup> J. Biol. Chem. **35**, 341 (1918).

urine. These acids are thus combustible with difficulty in the organism. It has as yet been tacitly assumed that such would also be the case with the higher members of this series. The standpoint of B. FLASCHENTRÄGER *et al.* as regards the way of degradation of the saturated fatty acids discovered by us is obviously based on this assumption.

In the feeding experiments on dogs with the sodium salts of sebacic acid and undecanedioic acid, described in another connection in part VII of this series<sup>20)</sup>, we were struck by the fact that the latter acid ( $C_{11}$ ) was excreted to a noticeably smaller extent in the urine than the former ( $C_{10}$ ). This observation suggested the incorrectness of the above-mentioned assumption and was in fact the motive for comparative feeding experiments with the sodium salts of various normal saturated dicarboxylic acids, which are discussed below.

§ 4. The adult, healthy dogs Tommy (about 12 kg, ♂) and Fox (about 13 kg, ♂) served for the experiments in question. They received twice a day for three successive days, always at the same times (11 h and 17 h), 2.5 g of the neutral sodium salt of the dicarboxylic acid to be investigated, as an addition to a meal, consisting of 20—30 g dog biscuit and 10—20 g lean horse meat. Water was supplied as desired. The urine passed during the test-days and several (at least 5) succeeding days was collected. In the experiments with sebacic acid and undecanedioic acid the course of the excretion of these acids in the urine could be readily followed, namely by testing the successive portions of urine with the aid of concentrated phosphoric acid. A total duration of 8 days for the experiment was always found to be amply sufficient with these acids. There was absolutely no reasonable ground for the supposition that such would not be the case with the other dicarboxylic acids investigated by us. Nevertheless for sake of safety the test-period was extended by some days especially in the investigation of the higher acids. Failures of the experiments due to vomiting, diarrhoea, etc. did not occur.

An adequate space of time always intervened between the various experiments made with one and the same dog, during which the animal resumed its normal mode of life.

The dicarboxylic acids employed ( $C_4$ ,  $C_6$ ,  $C_8$ ,  $C_{10}$ ,  $C_{11}$ ,  $C_{13}$ ,  $C_{16}$ ) were prepared or purified in our laboratory, with the exception of hexadecanedioic acid. A considerable quantity of this acid (eq. wt. 142.8; m.p. 123—124.5°) was very kindly put at our disposal by the S. A. M. Naef & Cie (Firmenich & Cie, Succrs) of Geneva; to them we offer our hearty thanks.

Two experiments at least were always made with each of the acids on one and the same dog. The urines obtained during these experiments

<sup>20)</sup> P. E. VERKADE, J. VAN DER LEE, A. J. S. VAN ALPHEN and M. ELZAS, Proc. Royal Acad. Amsterdam 38, 945 (1935).

were worked up separately until it had been adequately proved that they furnished concurrent results; then for the purpose of determining the amount of dicarboxylic acid excreted unchanged they were combined for the sake of simplicity. Indications regarding the manner of working up the urine and the isolation of the dicarboxylic acids present have already been given sufficiently elsewhere<sup>21).</sup>

In certain experiments with various dicarboxylic acids — among them all those with brassylic acid and hexadecanedioic acid, in which this was particularly important — also the faeces were tested for the presence of these acids, however, always with a negative result; all dicarboxylic acids were completely resorbed.

§ 5. The accompanying table gives a survey of the results obtained.

	TOMMY		FOX	
	administered	excreted unchanged	administered	excreted unchanged
C <sub>4</sub> succinic acid . . . . .	21.9 g	none	—	—
C <sub>6</sub> adipic acid . . . . .	23.1	about 58%	—	—
C <sub>8</sub> suberic acid . . . . .	24.0	.. 45%	—	—
C <sub>10</sub> sebatic acid . . . . .	36.9	.. 33%	24.6 g	about 28%
C <sub>11</sub> undecanedioic acid . . . .	24.9	.. 17%	24.9	.. 7%
C <sub>13</sub> brassylic acid. . . . .	25.4	very little?	25.4	very little?
C <sub>16</sub> hexadecanedioic acid . . .	26.0	none	39.0	none

In what follows we shall occupy ourselves exclusively with the dicarboxylic acids with six or more carbon atoms and first of all attempt to answer the question why these acids are excreted in the urine to such a typically decreasing degree on proceeding up the series. The possibility had certainly to be kept in mind *a priori* that the cause of this phenomenon might lie in a rapid decrease of the resorbability of these acids (perhaps as a consequence of their rapidly decreasing solubility in water) or of their sodium salts by the intestinal wall on mounting the homologous series. The assumption that the "combustibility" of these acids in the organism rapidly rises on passing up the series, was however much more attractive. Obviously then also the possibility had to be borne in mind that both these factors are operative together. The latter assumption can

<sup>21)</sup> See P. E. VERKADE and J. VAN DER LEE. Z. physiol. Chem. 227, 215 (1934); P. E. VERKADE, J. VAN DER LEE, A. J. S. VAN ALPHEN and M. ELZAS, Proc. Royal Acad. Amsterdam 38, 945 (1935).

best be tested by means of comparative experiments in which the neutral sodium salts of the dicarboxylic acids are supplied by injection. Experiments of this nature are now in progress.

In the meantime it has however been shown in the following way that the just mentioned assumption is indeed correct:

It has already been shown in part VII of this series<sup>20)</sup> that in feeding experiments on dogs with sebacic acid ( $C_{10}$ ) and with undecanedioic acid ( $C_{11}$ ), dicarboxylic acids with 8 and 6 or 9 and 7 carbon atoms respectively were also present in the urine. Naturally we have also examined the urine obtained in feeding experiments with the other dicarboxylic acids from this point of view. In the experiments with suberic acid ( $C_8$ ) the dicarboxylic acid with 6 carbon atoms was also found to be present. In those with brassylic acid ( $C_{13}$ ), which itself practically failed to be excreted, we nevertheless found lower dicarboxylic acids, namely those with 11, 9 and 7 carbon atoms, in appreciable amounts in the urine. Finally also in the experiments with hexadecanedioic acid ( $C_{16}$ ), which was itself never encountered in the urine, lower dicarboxylic acids were however found to be excreted and indeed those with 10, 8 and 6 carbon atoms. These facts are summarised in the accompanying table. They lead to the unavoidable conclusion that *the dicarboxylic acids with 6—11 carbon atoms are more difficultly catabolised by the organism, at least by that of the dog, than the higher members of the series.*

Administered	Present in the urine
$C_4$ succinic acid	
$C_6$ adipic acid	$C_6$
$C_8$ suberic acid	$C_8$ $C_6$
$C_{10}$ sebacic acid	$C_{10}$ $C_8$ $C_6$
$C_{11}$ undecanedioic acid	$C_{11}$ $C_9$ $C_7$
$C_{13}$ brassylic acid	$C_{11}$ $C_9$ $C_7$
$C_{16}$ hexadecanedioic acid	$C_{10}$ $C_8$ $C_6$

These experiments on the "combustibility" of dicarboxylic acids *in vivo* did not furnish any indication of a contrast in this respect between the even and the odd members of the series. That does not however mean to say that in our opinion such a contrast is to be considered as definitely excluded<sup>22).</sup>

The question as to the cause of this increase of the "combustibility" on ascending the series can best be dealt with in connection with the discussion of the injection experiments previously mentioned. Consequently reference may be made to part XI for this. To prevent misunderstanding it may be mentioned here that by the term "combustibility" we merely wish to indicate in a very general way the possibility of being catabolised

<sup>22)</sup> See F. P. MAZZA, Arch. sci. biol. (Ital.) 22, nr. 3 (1936).

and that the "velocity of oxidation" of a dicarboxylic acid<sup>23)</sup> — already in itself a very complex concept — need in no wise be *a priori* regarded as the only factor which determines its "combustibility".

Finally these experiments confirm in a very convincing way our idea, based as yet really only on our experiments with sebacic acid and undecanedioic acid, that all normal saturated dicarboxylic acids are catabolised by bilateral  $\beta$ -oxidation.

§ 6. The above facts in our opinion leave little or no reasonable doubt that in fact all normal saturated fatty acids are catabolised by the dog besides by the classical way of unilateral  $\beta$ -oxidation by  $\omega$ -oxidation and subsequent bilateral  $\beta$ -oxidation of the dicarboxylic acids produced. Direct evidence is still missing only for the  $\omega$ -oxidation of the higher fatty acids; unfortunately with regard to these we had as yet to be satisfied with pointing out the general character of methyl group oxidation (§ 2) and with a few demonstrations that the higher dicarboxylic acids are very well acceptable as intermediate products (§ 5). Naturally our attention remains fixed on this gap and we hope to arrive at an exact proof in this case also.

In our opinion it is quite beyond dispute that than the way of degradation of the fatty acids discovered by us does play a part also with other species of animals and in man. Further researches on this matter — among others on the rabbit (which on the basis of the work of R. KUHN, F. KÖHLER and L. KÖHLER may be considered as a very suitable experimental animal) and on man — are on our program. It may be expected that the quantitative picture of the phenomena will vary therewith.

We can leave undiscussed here the question first raised in the literature by B. FLASCHENTRÄGER and K. BERNHARD<sup>24)</sup> and which had already occurred to us before that, whether an "anchoring" of the carboxyl group of the fatty acid is favourable or necessary for the occurrence of  $\omega$ -oxidation.

At the same time the facts mentioned do to some extent explain why only lower simple triglycerides give rise to diaciduria in dogs<sup>2)</sup> and also in man<sup>1)</sup>. The variation of the diacidogenic properties of these glycerides on ascending the homologous series is however by no means quite clear as yet. In particular there is no parallelism between the diacidogenic action of these substances in the dog and the "combustibility" observed there of the corresponding  $\omega$ -oxidation products administered *per os*: tricaprylin ( $C_8$ ) was here found to be the most strongly diacidogenic, the most difficultly "combustible" on the other hand not the corresponding dicarboxylic acid but very probably adipic acid ( $C_6$ ). Further research

<sup>23)</sup> See F. P. MAZZA, loc. cit.; N. L. EDSON, Biochem. J. 30, 1855 (1936).

<sup>24)</sup> Helv. chim. acta 18, 962 (1935); see also B. FLASCHENTRÄGER, K. BERNHARD, C. LÖVENBERG and M. SCHLÄPFER, Z. physiol. Chem. 225, 157 (1934) and K. SCHLUMPF, loc. cit.

is necessary here. We shall not anticipate regarding the many questions which arise in this connection.

§ 7. Unfortunately very little can yet be answered with certainty to the important question as to the quantitative relationship in normal cases between  $\omega$ -oxidation followed by bilateral  $\beta$ -oxidation on the one hand and unilateral  $\beta$ -oxidation (and possibly other ways of degradation of the fatty acids) on the other hand. It must be expected that it is different for each kind of animal, for each individual and also for each fatty acid and furthermore depends on the form in which the fatty acid is administered (sodium salt, triglyceride, etc.). We are convinced that the first mentioned way of degradation can play an important part. The question raised by B. FLASCHENTRÄGER and K. BERNHARD<sup>25)</sup> whether the above mentioned ratio can change in the case of illness must certainly be answered in the affirmative. An argument for this is already to be found in the connection of the two ways of degradation of the fatty acids known up to the present with carbohydrate metabolism which will be discussed in later communications from our laboratory. Moreover, we found that even a "healthy" man does not always show the same tendency to dioic acid-acidosis and diaciduria.

The basic question is actually always to what extent a fatty acid can be catabolised in the organism via its  $\omega$ -oxidation product without the threshold concentrations of the "difficultly combustible" dicarboxylic acids in the blood being exceeded and consequently excretion of these acids by the kidneys taking place.

In this connection the following remark of a polemical nature must be made. In § 1 it was already stated that according to B. FLASCHENTRÄGER and K. BERNHARD the way of degradation we have discovered is restricted to the fatty acids with 8—11 carbon atoms. Furthermore these workers<sup>26)</sup> now believe that they can argue that in man and in the dog only a small or even practically insignificant part of these fatty acids undergoes  $\omega$ -oxidation. Their argumentation consists of a combination of the results of feeding experiments with fatty acid derivatives (sodium salts; esters; triglycerides) and those of feeding or injection experiments with the sodium salts of dicarboxylic acids. Serious objections can be raised to this argumentation, making it worthless. First of all B. FLASCHENTRÄGER and K. BERNHARD, basing themselves on the older and very fragmentary researches on the matter (see § 3), certainly estimate the "combustibility" *in vivo* of the dicarboxylic acids in question too low. Secondly they take no account of the well known fact<sup>27)</sup> that, as a consequence of the

<sup>25)</sup> Helv. chim. acta 18, 967 (1935).

<sup>26)</sup> Helv. chim. acta 18, 966 (1935); Z. physiol. Chem. 238, 221 (1936).

<sup>27)</sup> See e.g. H. J. PRINS, Chem. Weekblad 11, 483, 784 (1914); 23, 389 (1926); F. R. GOSS and C. K. INGOLD, J. Chem. Soc, 127, 2776 (1926).

increased reactivity of newly formed molecules, reactions frequently proceed differently or go further than corresponds to the properties of the ordinary (non-active) forms of the species of molecules taking part therein. The normal saturated dicarboxylic acids in particular offer fine examples of this phenomenon; a number of cases, in which dicarboxylic acids formed by oxidation processes were found to possess a much increased vulnerability to oxidative degradation at the instant of their formation, are enumerated in a paper by P. E. VERKADE<sup>28</sup>). It therefore certainly will not do to apply quantitatively the results of experiments with dicarboxylic acids administered *per os* or subcutaneously, in which the body is flooded from time to time with these substances, to cases in which these acids are formed *in vivo* as intermediate products. A too unfavourable impression of the importance of  $\omega$ -oxidation and related phenomena is doubtless obtained in such a way.

We are indebted to the VAN 'T HOFF-Fund and the HOOGEWERFF-Fund for financial assistance in the execution of these investigations.

*Rotterdam, September 1937.*

---

<sup>28)</sup> Rec. trav. chim. **46**, 200 (1927).

**Chemistry. — On the analysis of the provitamins A in blood serum.** By  
A. G. VAN VEEN and J. C. LANZING.

(Communicated at the meeting of October 30, 1937.)

*Introduction:*

The quantitative determination of vitamin A in blood serum is complicated by the fact that by the side of vitamin A there occur in the serum carotinoids, some of which may serve as provitamin A, since they may be converted into vitamin A, especially in the liver. The qualitative composition of these carotinoids largely depends on the carotinoids in the food consumed.

It is an open question whether one has to reckon only with the concentrations of vitamin A itself or also with the provitamins A present, when wishing to show a relation between the determinations of vitamin A in the blood and the clinical deficiencies (xerophthalmia, hemeralopia) occurring among the population. This relation between clinical deficiencies<sup>1)</sup> and A concentration (both vitamin A itself and provitamin A from the carotinoids) of the blood appeared to us to be much less simple than supposed at first. Perhaps the fact that clinical symptoms develop only some time after the A level of the organism has sunk and that, after a

---

<sup>1)</sup> On Java, as also in other tropical countries, ophthalmic deviations as a result of vitamin A deficiency prove to be much more frequent than was formerly supposed.

vitamin A containing diet, they recover more slowly than the A level of the blood, may play a part here. So that one single determination in the blood serum may not be sufficient, but possibly a whole curve is necessary. However this may be, in regard to the intricacy of the problem we thought fit to determine not only the vitamin A really present but also the carotinoids serving as provitamin, without adding up the Int. Units derived from the two separate determinations, as is sometimes done. To be sure it is often sufficient, as e.g. done by L. K. WOLFF<sup>1)</sup> and cooperators, to consider part (i.e. half) of the carotinoids as real  $\beta$ -carotene and thus to take only this part into account (after conversion into Int. Units). This procedure appeared to us undesirable for the problems of interest in this country. As mentioned before, the carotinoid composition of the blood depends in the first place on nutrition. The diet of the European in the tropics is often greatly varied; this is reflected in the blood serum carotinoids which also differ more in quantity than vitamin A.

In 16 Europeans, of a vitamin A reserve varying between 5.9 I. U. per 10 cc serum as lowest and 13.2 I. U. as highest value the carotinoid content varied between 7  $\gamma$  and 21.8  $\gamma$ .

Name	I. U. vit. A per 10 cc serum	$\gamma$ carotinoids (calc. as $\beta$ -carotene)
Al.	7.4	16.8
d. N.	10.6	7.—
A.	7.4	11.5
P.	6.8	10.—
Bz.	9.2	10.2
P.	9.2	14.—
K.	9.3	7.4
v. V.	10.8	8.4
v. d. P.	6.9	21.8
Ae.	9.—	13.3
V.	11.1	8.4
Bc.	12.6	17.5
L.	5.9	9.—
I.	6.7	9.7
L.	9.3	13.2
v. V.	13.2	10.5

<sup>1)</sup> Oral information.

We also found, by means of our serum-carotinoid-analysis to be described below, greatly varying qualitative compositions for the blood of healthy Europeans. Sometimes there was much  $\beta$ -carotene, sometimes hardly any, notwithstanding the large quantity of carotinoids in the serum.

For instance: B has per 10 cc serum 8.9 I. U. vit. A and 11.3  $\gamma$  carotinoids. The carotinoids consist of 30 %  $\beta$ -carotene, 40 % cryptoxanthene and 30 % xanthophyll. The provitamin here is equal to almost 10 I. U. vit. A and so exceeds the real A value.

L. has per 10 cc serum 9.3 I. U. vit. A and 13.6  $\gamma$  carotinoids; these consist of very little (not quite a half-gamma)  $\beta$ -carotene, 45 % lycopene, 20 % cryptoxanthene and 30 % xanthophyll. The provitamin value is here only 2 I. U. vit. A. From this it appears that in persons living on a greatly varied diet the provitamin A reserve may be strongly varying and that, therefore, the determination of carotinoids only is of little practical use in this case.

If during some successive weeks the vitamin A and carotinoid reserve of a person who has a fairly regular diet is determined, it appears that the quantity of both is practically constant and that the composition of the carotinoids is also mostly the same.

Moreover, it is "a priori" possible that in persons of an insufficient vitamin A and provitamin A reserve the, in itself low, carotinoid concentration is practically devoid of provitamin A, since the body, driven by its need of vitamin A, rapidly converts this scanty supply of provitamin A into vitamin A. We intend to investigate this point more in detail. It may be that with certain groups of the population, whose diet is very monotonous, (which is of very frequent occurrence in the tropics) the level of these substances is much more constant than with the Europeans examined by us, and thus the determination of provitamin A content gets much more practical value in relation to A deficiency.

An important final consideration is that the population of these countries, whose diet is to a great extent vegetarian, must derive practically all their vitamin A from the carotinoids acting as provitamin A. Consequently a better knowledge of provitamin in the principal Indian foodstuffs and also in the blood serum of the population living on these foodstuffs is of great importance. That is why we felt the necessity of finding and working out a method that allows us to determine qualitatively and roughly quantitatively blood carotinoids and that preferably in small quantities of serum. Once more: if the relation between clinical vitamin A deficiency and the blood level of real vitamin A were simple, and if the fact that the carotinoid fraction of the serum might be a good producer of vitamin A were not a complicating factor, a similar study were superfluous.

#### *Experimental.*

The carotinoids from 5 cc. of serum (from 10 cc., however, when in very low concentrations) were analysed chromatographically. For larger quanti-

ties this had been done previously<sup>1)</sup>. As there was generally no more than 5 γ<sup>2)</sup> of carotinoid available, microchromatograms were made.

A tube of 20 cm. length and 3 mm. diameter is closed at the bottom with cotton-wool and filled up to 15 cm. with  $\text{Al}_2\text{O}_3$ , from MERCK (standardised after BROCKMANN). At the top it is connected by means of rubber tubing via a washing bottle with a  $\text{CO}_2$ - bomb or a Kipp apparatus. The tube is fitted with a bored cork in a straight allonge and placed on a suction flask. It is then filled with petrol ether (boiling-point 40—60°) and, if this does not run through quickly enough, it is put under pressure of  $\text{CO}_2$ . When the whole of the  $\text{Al}_2\text{O}_3$  column is moistened, the petrol ether extract of about 5 cc. blood serum is run through. (This extract is obtained by saponifying the blood in heat during half an hour with 60 % KOH, extracting it with petrol ether, washing this with water and drying it.) Very plainly visible coloured bands will appear. In the extracts examined by us there was as a rule a narrow yellow band at the top, under this usually one or more bands of a brown, pink or light red hue. When the whole of the extract has run through, "developing" with petrol ether is still continued for some time. Since the whole procedure is only short, isomerising and similar phenomena are practically excluded. With solutions of pure α-, β-carotene and cryptoxanthene and, when necessary, other carotinoids of known strength microchromatograms of some gammas of substance are made for the purpose of comparison, in a similar tube. Half a gamma of cryptoxanthene as well as half a gamma of β- and γ-carotene still yield a clear narrow band, α-carotene is still visible in this quantity, but not very clearly.

When thus through comparison in the chromatogram of the blood-carotinoids the different components and especially the provitamins A have been recognised (which is not difficult after some practice), a quantitative estimation, accurate to about  $\frac{1}{2}$  γ can be made at the same time, by measuring the thickness of the different bands. If, in order to separate the bands, the blood chromatogram is "developed" with petrol ether to which an other solvent has been added, this has of course to take place analogously with the artificial chromatogram. By the way it may be observed that, because of the high temperature at Batavia (28—32° C), Ca-hydroxyde is not very serviceable, in contrast with Europe, as the adsorption is too weak. For the same reason the adsorption of the carotinoids to  $\text{Al}_2\text{O}_3$  is also less strong, in consequence of which a better separation is most likely obtained with this adsorbent than in Europe. In considering the experimental part, the peculiar circumstances under which the work is done here should therefore be remembered.

<sup>1)</sup> See: ZECHMEISTER u. CHOLNOKY. Die chromatogr. Adsorptions-methode. Wien, 1937, p. 114, 115; and: DANIEL u. BERES: Z. f. Physiol. Chem. 238, 160 (1936).

<sup>2)</sup> Calculated as β-carotene: thus no error is made for α- and β-carotene and cryptoxanthene, a slight one for xanthophyll, but a rather large one for γ-carotene and lycopene.

$\alpha$ - and  $\beta$ -carotene were mostly determined after development with petrol ether and 2 to 5 % benzene. A benzene concentration of 10 to 25 % causes the  $\alpha$ - and  $\beta$ -carotene to disappear entirely from the chromatogram. In this benzene concentration it is the lycopene and the  $\gamma$ -carotene that are seen to broaden into brightly coloured bands, whereas cryptoxanthene is then only just separated from the uppermost yellow edge. A peculiar quality of the cryptoxanthene is that, when developed with a mixture of petrol-ether-benzene 1 : 1 or with pure benzene, it has a brownish-yellow to yellow colour which merges into orange-pink when afterwards petrol ether is run through again. So there are a number of slight indications from which it may be concluded, after some practice, what materials are dealt with.

In order to be absolutely certain whether it was a definite carotinoid, a mixed chromatogram was also often used. To make this, a solution of one or more gammas of pure provitamin is run through the blood chromatogram. If the provitamin concerned is already present in the chromatogram, the relative band broadens, otherwise a new band is formed between (or under or above) those existing. Further checking by means of developing with petrol ether with 10 or more percent benzene or by means of a mixed chromatogram is absolutely necessary. Often, when no or hardly any  $\beta$ -carotene was present, lycopene was taken for  $\beta$ -carotene.  $\beta$ -Carotene, when added, however, would then appear below the supposed  $\beta$ -carotene in the blood chromatogram; when developed with petrol ether with about 20 % benzene, the real carotene would run through rapidly, whereas the lycopene would only broaden into a light red colour characteristic of lycopene.

#### Results.

By means of this method the qualitative composition of the serum-carotenoids of Europeans, native servants and native prisoners was determined. These last are more especially interesting because their physical condition as well as their nutrition (the composition of which has not been changed since rather more than a year and a half) are exactly known. The provitamin A both in their food and in the blood serum was analysed; vitamin A proper they practically do not get. The uniformity of the provitamin A supply from vegetable food was reflected in the uniformity of the chromatograms. In contrast with what was observed in many (but not all) Europeans (who as a rule take in much vitamin A in the animal food and the dairy produce they consume),  $\alpha$ -carotene is mostly absent,  $\beta$ -carotene only present in small quantities (< 15 %); crypto-xanthene, however, (from Indian corn and tjabe = Capsicum) was mostly found in rather large quantities in the blood serum of the native prisoners (25—35 %) of the total carotenoids, though in their food it occurs in much smaller concentration than  $\beta$ -carotene (viz.

about only 10 % of the total vitamin A activity of the provitamins). The average real vitamin A level of prisoners and Europeans, etc. is practically equal, notwithstanding the fact that the former in contrast with the latter have to draw all their vitamin A from the provitamin mentioned. The low  $\alpha$ - and  $\beta$ -carotene level may be explained by the fact that much more than in the case of Europeans, etc. this is (and has to be) converted into vitamin A. The conversion of  $\alpha$ - and  $\beta$ -carotene into vitamin A is apparently easier than that of cryptoxanthene. It may be questionable whether cryptoxanthene (which in the vegetable foodstuffs of tropical countries occurs much more frequently than in those of colder regions) is indeed a provitamin A for man as it is for the rat. To these and similar questions we shall revert more explicitly in future publications.

Finally we wish to express our thanks to the Institute for Nutrition Research for the financial aid received.

Batavia C., September 1937.

*Chemical Department of the Central Medical Laboratory.*

**Hydrodynamics.** — *Preliminary records of the velocity fluctuations in a boundary layer before and after the transition to turbulent motion.* (Mededeeling №. 33 uit het Laboratorium voor Aero- en Hydrodynamica der Technische Hoogeschool te Delft.) By G. BROERSMA. (Communicated by Prof. J. M. BURGERS.)

(Communicated at the meeting of October 30, 1937.)

### 1. Introduction.

In an earlier communication from the Laboratory for Aero- and Hydrodynamics of the Technical University at Delft<sup>1)</sup> some experiments have been described on the simultaneous recording of the fluctuations of the air velocity in a windtunnel by means of two hot wire anemometers, which were placed at a small distance from each other in the same plane perpendicular to the direction of the motion of the air. At distances of the order of magnitude of 1 cm or less a distinct correlation can be remarked in the records given by the two wires, which correlation gradually disappears when the distance becomes larger. It was then planned to perform similar experiments in the boundary layer along a flat plate, and extensive series of measurements have been performed already in 1924, on which, however, only a short communication has been published<sup>2)</sup>. Afterwards, in 1930

<sup>1)</sup> J. M. BURGERS, Experiments on the fluctuations of the velocity in a current of air, Proc. Royal Acad. Amsterdam, 29, 547 (1926).

<sup>2)</sup> J. M. BURGERS, Experimental investigation of the motion of the air in the boundary layer along a smooth surface (in Russian), Journ. of Applied Physics (Moscow), 4, 7—9 (1927).

and 1931, experiments were made by ZIEGLER with two hot wires of very small dimensions, connected with the amplifying sets described in "Mededeelingen N°. 20, 21" <sup>3)</sup>, and it had been observed by ZIEGLER that when two hot wires were placed one at a distance of e.g. 40 cm downstream of the other, in the boundary layer developing along a flat plate with a velocity in the windtunnel of the order of 5 m/sec (so that the state of motion in the layer for the main part was laminar), fluctuations recorded by the foremost wire sometimes were found back, smeared out over a longer interval of time and often with more rapid fluctuations developed, in the records obtained with the second wire.

Plans were made for investigating more systematically the development of disturbances arising in a laminar boundary layer, but a delay arose in consequence of other work, and it was only recently that some preliminary experiments on the simultaneous recording of fluctuations in the laminar and in the turbulent part of a boundary could be taken in hand.

## 2. Installation of the glass plate for the boundary layer measurements.

Before beginning with the measurements proper the velocity distribution was investigated in a cross section of the windtunnel which was to be used for the experiments. This tunnel is of the closed type; the measuring space has a square cross section of  $50 \times 50$  cm<sup>2</sup>, and a length of 270 cm. The results of the exploration at a distance of 25 cm behind the entrance of the measuring space proved to be sufficiently favourable both with a mean velocity of 6 m/sec and of 16 m/sec (deviations from the mean value of less than 2 %, with a rather regular distribution, over an area of 40 cm width and 30 cm height); it was thought unnecessary to explore also sections further downstream.

A difficulty which is encountered with experiments on the flow along glassplates in windchannels of restricted dimensions is to give such a position to the plate that the velocity of the flow outside of the boundary layer shall have a constant velocity over the whole length of the plate. In the present case the leading edge of the glassplate was sharpened unsymmetrically; moreover it was considered desirable to bring the plate rather near to the lower wall of the channel. The plate was first laid parallel to the axis of the tunnel; investigation, however, of the velocity distribution in a vertical section of the boundary layer at a distance of 6,0 cm from the leading edge of the plate, gave a curve with a distinct S-shape, thus revealing that separation of the flow from the plate had occurred. After several adjustments finally a position was found in which this shape had disappeared, and for which at the same time in points at 70 and 111 cm respectively from the leading edge (the distance at which

<sup>3)</sup> M. ZIEGLER, The application of the hot-wire anemometer for the investigation of the turbulence of an airstream. Proc. Royal Acad. Amsterdam. **33**, 723 (1930); A complete arrangement for the investigation, the measurement and the recording of rapid airspeed fluctuations with very thin and short hot wires, *ibid.* **34**, 663 (1931).

the records have been taken to be considered below) the velocities at 7 cm from the plate proved to be equal, so long as they did not surpass ca. 11 m/sec. In this case the plate from leading edge to trailing edge inclined upwards at an angle of  $0.89^\circ$  with respect to the bottom of the windtunnel. The leading edge was 3 cm behind the entrance plane of the measuring space.

In order to keep the tunnel free from unessential apparatus which might influence the airflow, the windspeed at the points mentioned was compared with the pressure drop between two points of the wall of the tunnel, one well upwards from the measuring space, where the cross sectional area of the tunnel was much larger, and one near to the measuring space. The windspeed then afterwards was found from this pressure drop.

### *3. The transition point between the laminar and the turbulent parts of the boundary layer.*

The object of the experiments was to produce a situation in which the wire at 70 cm from the leading edge still should be in the laminar part of the boundary layer, whereas the wire at 111 cm should be in the turbulent part, in order to obtain a comparison between the simultaneous fluctuations at those two places. It was necessary therefore to ascertain the position of the transition point for various velocities, so that a velocity might be chosen at which the transition point would be situated between those two places.

This was done by measuring the velocity distribution at the two places chosen by means of hot wires, for velocities  $V$  outside the boundary layer increasing with steps of about 0.5 m/sec. With increase of the tunnel velocity the transition point moves towards the leading edge; when it passes the position of a measuring wire, a characteristic change occurs in the shape of the curve representing the distribution of the velocity as a function of the distance from the plate. So long as the motion is either laminar or turbulent, there is a gradual increase of the velocity gradient at the surface of the plate, and simultaneously a gradual decrease of the boundary layer thickness; when the transition from the laminar motion occurs to the turbulent motion, however, the velocity gradient at the surface of the plate takes a greater value while at the same time the thickness of the boundary layer increases: hence the curve for the case of turbulent motion crosses the curve for the case of laminar motion in a way which has been described already earlier<sup>4)</sup>, and which is not difficult to recognize.

The measurements were repeated a number of times on various days; they gave the following results:

<sup>4)</sup> J. M. BURGERS and B. G. VAN DER HEGGE ZIJNEN, Preliminary measurements of the distribution of the velocity of a fluid in the immediate neighbourhood of a plane, smooth surface, Verhandel. Kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam (1e sectie) XIII, №. 3 (1924); J. M. BURGERS, Versl. Kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam, 32, p. 856 (1923).

a. mean value of  $V$  when the transition point was at  $x = 70$  cm from the leading edge: 7.75 m/sec;

corresponding mean value of REYNOLDS' number ( $R = \rho V x / \mu$ ): 362.000;

b. mean value of  $V$  when the transition point was at  $x = 111$  cm from the leading edge: 5.55 m/sec;

corresponding mean value of REYNOLDS' number: 412.000.

The difference between the two values found for the REYNOLDS number must be ascribed to the fact that the fluctuations of the velocity in the flow outside of the boundary layer are more damped at the larger distance from the leading edge.

The experiments further were made with a velocity  $V = 6.4 - 6.5$  m/sec, for which the transition point could be assumed to be at 90.5 cm.

#### 4. Arrangement and calibration of the hot wires.

The hot wires used had a length between 2 and 3 mm, and a thickness of 0.015 mm. They could be moved upwards and downwards from the glassplate; measurements were performed at distances of 1, 2, 3, ... 10, 15 and 50 mm from the latter. The electrical connection for every wire was the ordinary Wheatstone bridge arrangement, two independent circuits being used; no amplifiers were inserted, as torsion string galvanometers were used, which had sufficient sensitivity for the currents applied here, and which responded to fluctuations with a maximum frequency of about 50 per second. The deviations of the galvanometers were recorded photographically on a film of sensitive paper, together with a time signal.

From the curves for the velocity distribution in function of the distance from the plate the value 7 mm was estimated for the thickness of the boundary layer at  $x = 70$  cm, and the value 9 mm at  $x = 111$  cm.

The determination of the scale of the records was made in the following way:

The calibration curve for a hot wire anemometer can be represented by a formula:

$$I^2 = f(V, W) \dots \dots \dots \quad (1)$$

where  $V$  is the velocity of the wind,  $I$  the electric current through the wire and  $W$  the electrical resistance of the wire, the equation referring to the state in which the production of heat by the electric current is equal to the loss of heat due to the wind. From this equation one deduces by differentiation:

$$2I \left( \frac{\partial I}{\partial W} \right)_{V=const.} = - \frac{\partial f}{\partial V} \left( \frac{\partial V}{\partial W} \right)_{I=const.} \dots \dots \quad (2)$$

As the function  $f$  generally has the form:  $f = a + b \sqrt{V}$ , ( $a$  and  $b$

being functions of  $W$ ), we have  $\partial f/\partial V = b/2 \sqrt{V}$ , and hence it is found:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial W}\right)_{I=\text{const.}} = - \left[ \frac{4IV\sqrt{V}}{b} \right] \left(\frac{\partial I}{\partial W}\right)_{V=\text{const.}} \quad (3)$$

The expression [ ] can be derived from the calibration curve corresponding to the state in which the hot wire was used for the recording of the velocity fluctuations. The differential quotient  $\left(\frac{\partial I}{\partial W}\right)_V$  can be obtained by taking calibration curves ( $I$  vers.  $V$ ) for different values of the resistance of the wire. These different resistances are obtained by balancing the bridge for zero velocity at different values of the electric current through the wire.

A variation of the resistance of the wire with the amount  $\Delta W$  now will cause a shift  $\Delta s$  on the record. Hence eq. (3) leads to the following one:

$$\frac{dV}{ds} = \frac{\partial V}{\partial W} \frac{dW}{ds} = - \left[ \frac{4IV\sqrt{V}}{b} \right] \left(\frac{\partial I}{\partial W}\right)_V \frac{dW}{ds}.$$

The value of the quotient  $\frac{dW}{ds}$  we find as follows: substitute for the hot wire successively two resistances of known values, slightly differing from the resistance of the hot wire. Let the electric current through the substituting resistance have the same value as the one used when the record was taken (the distance of the galvanometer from the film being, of course, unchanged). Then the shift  $\Delta s$  corresponding to a known value of  $\Delta W$  can be determined.

As an instance we give the values obtained for  $dV/ds$  for the records with the two wires at a distance of 1 mm from the plate:

	Forward wire	Backward wire	
Series I	0.051	0.098	{ m/sec windvelocity per mm
Series II	0.043	0.082	on the record.

##### 5. Results of the measurements.

The obtained records revealed a marked difference in the character of the fluctuations recorded respectively in the laminar and in the turbulent part of the boundary layer. (See f.i. fig. 1 in which are reproduced some of the analysed parts of records taken on 10-IX-1937).

An extensive search was made in order to find whether a disturbance could be pointed out, which had been recorded by both wires. Owing to the fact that the records were too full of detail no sharp evidence could be found.

It was then tried to arrive at a numerical characterisation of the records by determining the mean square of the deviations of the velocity from its mean value, and the mean frequency. In order to find the mean square

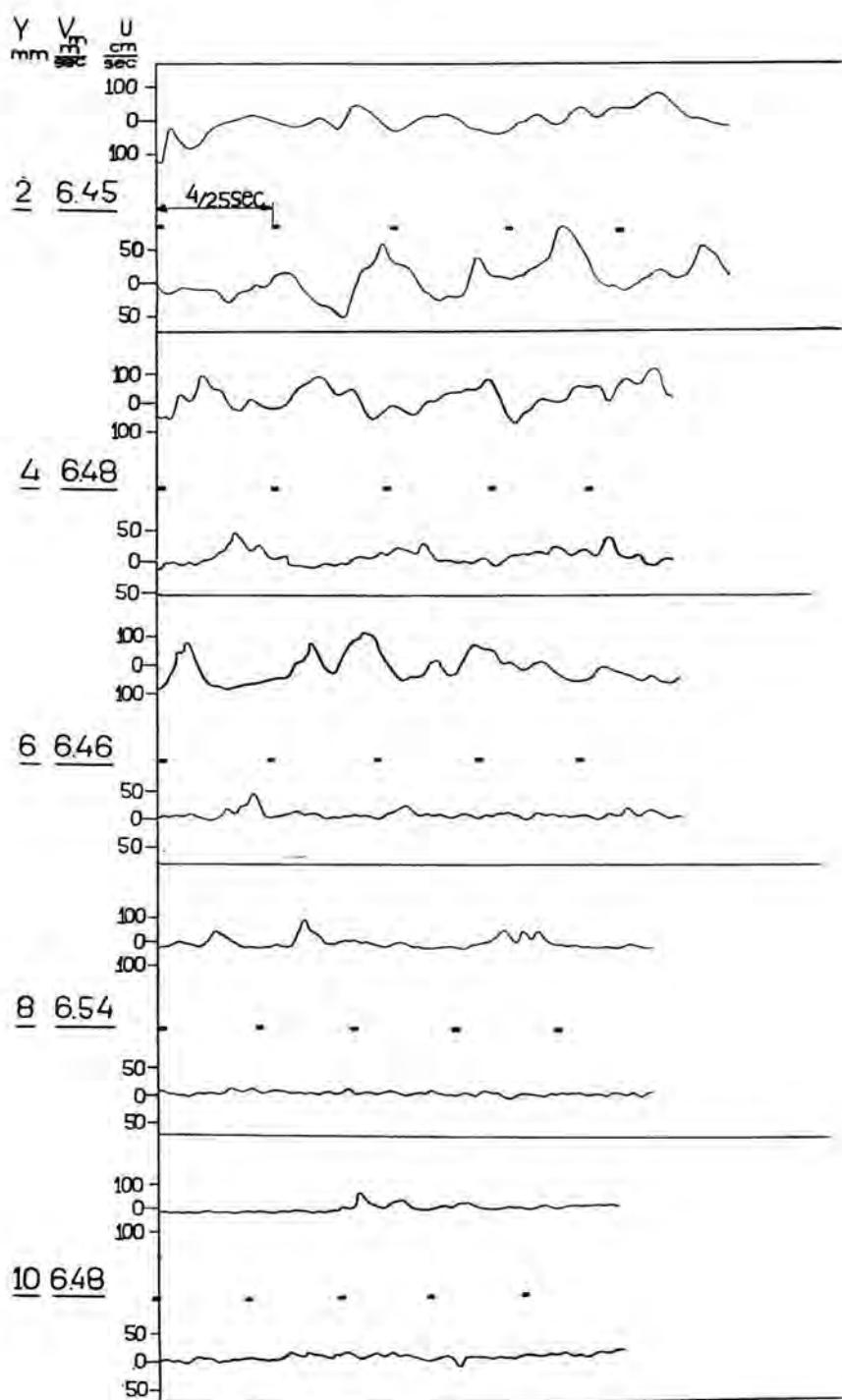


Fig. 1. Sections from records of velocity fluctuations in the boundary layer, obtained at various distances  $y$  from the wall. The upper curve of every record refers to the turbulent part of the boundary layer; the lower curve to the laminar part. The mean air velocity in the windtunnel is given to the left of each record; practically:  $V = 6.5$  m/sec.

of the deviations, a transparent scale of horizontal lines was laid over the record, and for a definite period it was counted how many times every line was crossed by the record. When the lines are numbered 1, 2, 3, .... and when the number of times that the record crosses the line  $p$  is indicated by  $n$ , then the mean position of the line recorded is given by:

$$a \frac{\sum p n_p}{\sum n_p},$$

and the mean square of the deviation from this position by:

$$a^2 \left\{ \frac{\sum p^2 n_p}{\sum n_p} - \left( \frac{\sum p n_p}{\sum n_p} \right)^2 \right\}.$$

$a$  in these equations being the change in velocity corresponding to a displacement on the record, equal to the distance between two consecutive lines of the scale. — The frequency was found by counting the number of extremes over a definite period. — Both methods of evaluation are rather rough, but in consequence of the absolutely irregular character of the fluctuations, the application of any other method would lead to an enormous amount of work. In view of the circumstance that records taken over consecutive periods of a second may give quite different results, so that a large number of cases ought to be considered in order to get reliable statistical results, such methods would be out of place here.

The values found for  $\bar{u}^2$  in the flow outside of the boundary layer were less than  $0.01 \text{ (m/sec)}^2$ , thus corresponding to a mean amplitude of the fluctuation of about 1 or 2 % of  $V$ . (See fig. 2 which gives sets of curves

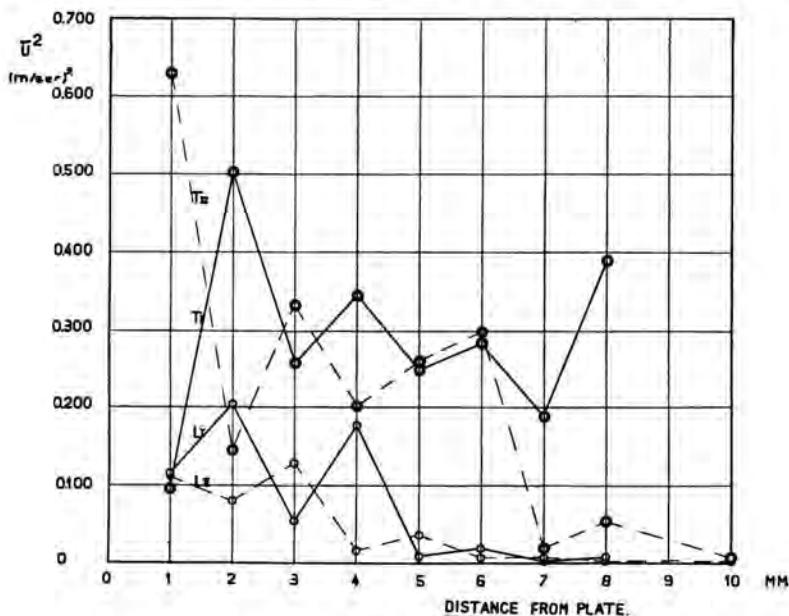


Fig. 2.

calculated from two series of records of the velocity-fluctuations in the laminar and turbulent parts of the boundary layer). Both in the case of the laminar and in that of the turbulent boundary layer the value of  $\bar{u}^2$  increases when the distance from the place becomes less; for the laminar layer to values between 0.1 and 0.2 ( $m/sec$ )<sup>2</sup>, and for the turbulent layer to values ranging up to 0.5 or 0.6 ( $m/sec$ )<sup>2</sup>. In the first case we have fluctuations of the order of 5 %; in the second case of more than 10 %. In this respect the difference between the two types of flow seems to be well marked, although it appears that in the laminar layer under the conditions of the experiment (that is, in a section already near to the transition point, which of course must not be considered as a well marked point, but as a more or less broad region), the fluctuations of the velocity are not negligible.

The results for the frequency are less clear, and they are influenced by the fact, that the galvanometer used did not react to frequencies higher than ca. 50 per sec. (See fig. 3). In the case of the laminar layer a strong impression is obtained that the frequency decreases when we go to smaller distances from the plate: whereas for the flow outside of the boundary layer a frequency of about 46 per second was noted (which is too near to the

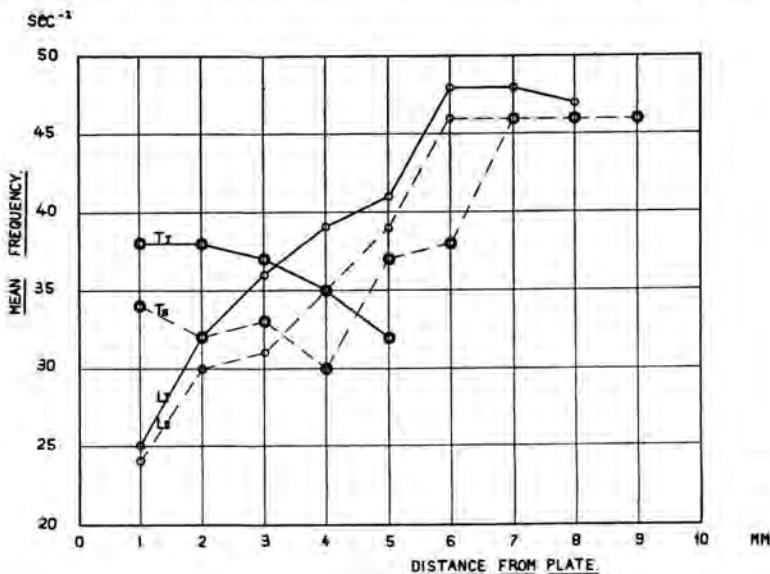


Fig. 3.

limit set by the galvanometers for making further conclusions), at a distance from the plate of 3 mm and less, the frequency had decreased to ca. 30 per second. — In the case of the turbulent boundary layer frequencies of a similar order were noted near to the plate, and there seemed to be some indication of a slight increase of the frequency with decreasing distances.

**Botany. — Influence of Magnesium on the Relation between Chlorophyll Content and Rate of Photosynthesis.** By J. C. VAN HILLE. (Communicated by Prof. L. G. M. BAAS BECKING).

(Communicated at the meeting of October 30, 1937.)

#### *Introduction.*

In the Journal of General Physiology vol. 18, p. 573, W. E. FLEISCHER (1) published the data of his experiments on the relation between chlorophyll content and rate of photosynthesis in *Chlorella*.

This alga was grown in nutrient solutions with graded quantities magnesium, nitrogen and iron. In the cultures with low concentrations of one of these elements the cells of *Chlorella* were chlorotic.

3 to 6 days after inoculation the photosynthesis and chlorophyll content were determined. The results of the experiments are:

- a. that the rate of photosynthesis is proportional to the chlorophyll content, when the latter is varied by iron supply or nitrogen supply.
- b. the behaviour of the *Chlorella* cells in nutrient solutions with graded quantities of magnesium is quite different.

FLEISCHER writes: "At low concentrations of magnesium the rate of "photosynthesis is relatively independent of the chlorophyll content. As "the magnesium concentration is increased, the rate of photosynthesis "rises rapidly and during the rise is relatively independent of the chloro- "phyl content. Eventually the rate of photosynthesis reaches the value "indicated by full nutrient determinations and at that point the relation "between the rate of photosynthesis and chlorophyll content is comparable "to the relation existing in the iron and nitrogen graphs for similar values."

#### *Methods.*

In my work I followed the methods of FLEISCHER. The work was done with a pure strain of *Chlorella pyrenoidosa*, while FLEISCHER worked with a pure strain of *Chlorella* of undetermined species.

I also used *Chlorella vulgaris* var. *viridis* which yielded the same results.

Both strains have been obtained from E. PRINGSHEIM, Praha.

The same nutrient solution was used as in FLEISCHER experiments.

FeSO <sub>4</sub>	0.03 g.
Na <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>	1.42 g.
Na citrate	1.— g.
KNO <sub>3</sub>	1.26 g.
KH <sub>2</sub> PO <sub>4</sub>	1.22 g.
Glucose	15.— g.
Aq. dest.	1 L.

The standard solution of Mg was a solution of  $MgSO_4$ , which contained 1 mg of magnesium per  $cm^3$ . FLEISCHER used  $MgCl_2$  for his standard solution.

*Chlorella* was cultivated in 100  $cm^3$  Erlenmeyer flasks containing 50  $cm^3$  nutrient solution.

The cells were cultivated in the constant light at 0.9 m distance from a 500 Watt bulb. The temperature in the incubating room varied from 24° to 27°. To secure a regular growth the cultures were shaken continuously.

The photosynthesis and the respiration were determined after the method of WARBURG in the single manometer. The cells were centrifuged and suspended in WARBURG's mixture Nr. 9. Photosynthesis and respiration were determined during at least half an hour each.

Readings were made every ten minutes. If no regular values were obtained during half an hour the readings were continued for some ten minutes longer. The temperature of the thermostat was 25.8° C.

The chlorophyll content was determined by measuring the light absorption by  $\lambda 6600$  of the methylalcoholic chlorophyll extract of the cells, used for the photosynthesis determination, in the spectralpyrometer (3).

As no absolute chlorophyll determinations were carried out, the concentration of the chlorophyll was indicated by the logarithm of the absorption, after it had been ascertained, that the laws of BEER and LAMBERT are followed by the chlorophyll solutions of the occurring concentrations.

Cell-volumes were determined by centrifuging the cell suspensions in THROMSDORF tubes during 1.5 minute at a definite rate.

### Results.

Though the methods followed for determining photosynthesis and chlorophyll content did not differ in any essential point from the methods of FLEISCHER, I could not confirm his results of the most interesting part of his investigations: the influence of magnesium.

As FLEISCHER gives no data of the Mg concentrations which give rise to the abnormally low photosynthesis values, I tried a wide range of magnesium concentrations, beginning with no magnesium at all up to the normal magnesium rate, corresponding with an addition of 2.5  $cm^3$  of the standard solution.

It appeared that *Chlorella* needs very little magnesium. Even if no magnesium at all was added to the nutrient solution, there was some development of the alga, though distilled water and pure salts were used.

The growth of the alga must have been a little slower than in FLEISCHER's case, since I never could carry out the experiments three days after the inoculation, the growth then being insufficient.

Only once I could make the determinations after four days of growth,

but for the greater part the first determinations of a series were made five or six days after inoculation.

In fourday old cultures the photosynthesis and the chlorophyll content were quite proportional, as appears from table I, column 2.

It also appears (table I, column 3) that there is no question of chlorosis as the quantity of chlorophyll contained in 1 mm<sup>3</sup> of cells is also rather constant.

TABLE I.

Data of Mg series 4 days (and 6) after inoculating.

cm <sup>3</sup> of Mg standard sol. added to the nutrient sol.	photosynthesis chlorophyll	chlorophyll mm <sup>3</sup> cells	chlorophyll cm <sup>3</sup> nutrient sol. after inoculation		mm <sup>3</sup> cells cm <sup>3</sup> nutrient sol. after inoculation	
			4 days	6 days	4 days	6 days
0	1.31	38	32	35	0.85	1.17
0.001	1.44	35	26	44	0.75	1.14
0.003	1.54	37	32	68	0.88	2.31
0.007	1.12	33	20	106	0.62	2.8
0.02	1.33	24	12	63	0.52	1.9
0.03	1.23	34	18	85	0.52	2.4
0.04	1.21	28	18	103	0.63	3.0
0.05	1.59	31	35	256	1.1	7.7

As can be seen from table I, column 4 and 5, there is not yet a clear difference in the development of the cultures as the chlorophyll content and cell amount per cm<sup>3</sup> nutrient solution do not widely differ.

It may be concluded that after four days no influence of the different quantities of Mg added to the nutrient solution can be stated.

However, after six days the differences are evident. The growth of the cultures with a small quantity of magnesium is less than the growth of the cultures with more magnesium. (Table I, column 4 and 5).

When the experiments with the same cultures are continued it is seen that, in spite of the growth, the photosynthesis, calculated per chlorophyll-unit or per cell-volume becomes lower. There is an indication, that the less magnesium in the nutrient solution, the more rapid is the decrease of photosynthesis, but in this regard the cultures of different series behaved differently and did not give uniform results.

The quantity of chlorophyll decreases after some time. The photosynthesis, however, also decreases independently from the chlorophyll content.

It may happen that the photosynthesis has reached the compensation point (assimilation = respiration), before much chlorophyll has disappeared.

In certain cases, however, the chlorophyll decomposition proceeds more

TABLE II.

$\text{cm}^3$ of Mg standard sol. added to the nutrient sol.	Number of days after inoculation	photosynthesis chlorophyll	photosynthesis $\text{mm}^3$ cells	chlorophyll $\text{cm}^3$ nutrient sol.	$\text{mm}^3$ cells $\text{cm}^3$ nutrient sol.
0.01	7	2.63	114	66	1.5
	9	2.06	76	240	7
	14	1.51	55	547	15
	38	0.50	8	281	17.4
0.03	6	2.46	90	35	1
	9	2.21	64	375	13
	14	1.47	58	547	14
	38	0.27	4.2	383	25

quickly than the decrease of the photosynthesis and then the values of the  $\frac{\text{photosynthesis}}{\text{chlorophyll}}$  quotient become higher again, however, without reaching the value of the first days of the growth.

The quotient  $\frac{\text{photosynthesis}}{\text{cell volume}}$  is always decreasing. That the death of a great number of the cells was not the cause of this phenomenon appeared from several examinations of 50 and more days old cultures. No more than 4 % of the cells could be coloured with an eosin-solution.

As no regular relation could be demonstrated between photosynthesis and chlorophyll content, it seems probable that the controlling factor of the photosynthesis of an "aging" culture of *Chlorella*, is in the BLACKMAN reaction.

The dark-process, that in the opinion of WARBURG, WILLSTÄTTER a.o. could not be anything but a decomposition of a peroxide was also studied by me, using the method of WARBURG and YABUSOE, by the development of oxygen in the dark after the addition of  $\text{H}_2\text{O}_2$  to a *Chlorella* suspension.

It appeared (table III) that two quantities of cells from different cultures

TABLE III.

BLACKMAN reaction and peroxide decomposition of two cultures, 20 days after inoculation with the same chlorophyll content.		
Mg content . . . . .	0.02	0.06
BLACKMAN reaction . . . . .	0.7	1.6
Peroxide decomposition . . . . .	5.5	1.2

of the same series and age and of the same chlorophyll content did not agree in their rate of photosynthesis and peroxide decomposition.

The culture with less magnesium showed a lower photosynthesis but a greater ability of  $H_2O_2$  decomposition than the other one.

EMERSON and GREEN (2) stated that the BLACKMAN reaction could be decreased without decreasing the rate of peroxide decomposition, and that there existed no significant similarity between the temperature curves of the BLACKMAN reaction and the peroxide decomposition.

I can add to their results, that the rate of the BLACKMAN reaction and the rate of peroxide decomposition are influenced in entirely different ways in cultures with different nutrient solutions, in which the photosynthesis has been decreased by age.

It must be emphasized, that the quotient  $\frac{\text{photosynthesis}}{\text{chlorophyll}}$  shows often differences in the cultures from the same nutrient solution but which do not belong to the same series.

Small fluctuations in the temperature of the incubating room may be an influencing factor in this case.

The quotient  $\frac{\text{photosynthesis}}{\text{mm}^3 \text{ cells}}$  is subject to still greater fluctuations. Here the addition of glucose to the nutrient solution is one of the most important factors.

#### LITERATURE.

1. EMERSON, R. and GREEN. Nature of Blackman reaction in Photosynthesis. *Plant Physiology*, **12**, 537 (1937).
2. FLEISCHER, W. E. The relation between chlorophyll content and rate of photosynthesis. *Journ. Gen. Physiol.*, **18**, 573 (1935).
3. ORNSTEIN, L. S. Quantitative methods of Spectrophotometry. *Atti del 10 Congresso Internazionale di Elettro-radio-biologia*, **1**, 607 (1934).

*Botanical Laboratory, State University, Utrecht.  
12th October, 1937.*

**Geology.** — *The age of the Elsloo Beds.* By WILHELMINA A. E. VAN DE GEYN. (Communicated by Prof. L. G. M. BAAS BECKING).

(Communicated at the meeting of October 30, 1937.)

In the Scharberg at Elsloo on the steep banks of the river Meuse, various Tertiary beds crop out from under a diluvial covering about 10 m thick.

Between some glauconiferous sandy beds is a conglomerate which contains many phosphatic nodules and fossils — chiefly sharks' teeth and

internal moulds of Mollusca. This section attracted the attention of geologists long ago, because it was thought that here the Upper Oligocene, as yet unknown in the Netherlands, might be found.

This suggestion was put forward by VON KOENEN (1863); according to this author the fossils *in situ* occurring in the conglomeratic layer were of Upper Oligocene age; and he considered that the bed containing them and also the overlying glauconiferous sand belonged to a special horizon of the Upper Oligocene.

This idea was accepted later on by various other authors: ERENS, BRUYERET, KLEYN, MOLENGRAAFF, VAN WATERSCHOOT VAN DER GRACHT, VAN BAREN, JONGMANS, VAN RUMMELEN. Only a few Belgian geologists disputed this conclusion, partly on account of comparisons made with the geology of the Belgian Kempen (HALET 1920), and partly as a result of an examination of the fossils collected therefrom (LERICHE 1920).

LERICHE examined the Selachianfauna and determined a few derived Oligocene species as well as a number of Neogene forms which, according to him, occurred *in situ*. Therefore he concluded (like HALET) that the transgression-conglomerate and the overlying glauconiferous sandy layers were of a Middle Miocene age.

During the excavation of the Juliana-canal in 1932, by happy chance a cutting had to be made in the Scharberg at Elsloo, for here, under some diluvial gravel beds, various Tertiary strata were brought to light. The following is a summary of the succession (BECKERS 1933):

number of bed	petrographic description	thickness in m.
1	Loess	1
2	Alternating sand and gravel layers	4
3	Gravel, containing erratic sandstone and quartz-blocks	9
4	Glauconite sand	0.10
5	Fine-granular gravel layer with a few hollow sharks' teeth	0.08
6	Green glauconiferous sands, with iron-bands	0.40 — 1.25
7	Conglomerate layer, rich in fossils	0.05
8	Yellow-brownish glauconiferous sand	2.50
9	Blue-gray sandy clay	

In bed 7 a great number of phosphatic nodules were found: flints, quartz and iron concretions, together with a number of sharks' teeth and internal moulds of Mollusca.

BECKERS, who has collected the material carefully, found in  $\frac{1}{3} \text{ m}^3$  327 sharks' teeth and 355 moulds.

After the material had been roughly sorted, it was presented to the Natural History Museum of Maastricht.

The Keeper of the Museum, Rector Jos. CREMERS sent this collection on to the National Museum of Geology and Mineralogy at Leyden to be examined further.

A cursory examination of this collection shewed that the fossils had been badly preserved, especially the internal moulds of Mollusca which are often much distorted. The best preserved and most easily recognisable specimens are the Selachian teeth, great numbers of which occur in the conglomerate. In examining these teeth (a comprehensive description of these will be published shortly in a treatise entitled: „Das Tertiär der Niederlande, mit besonderer Berücksichtigung der Selachierfauna“ Leidsche Geologische Mededeelingen, Leiden). I noticed that all were similarly preserved; they are waterworn, broken and rolled, giving the impression of being derived.

In this large collection of teeth I have found none that did not bear traces of transportation, so that I consider LERICHE's (1920) suggestion that some of them were *in situ*, improbable.

After the determination of the teeth it appeared that this Selachian fauna corresponded to those from the Viennese Basin, Swiss Molasse, Rhone Basin, etc. all from Middle Miocene deposits.

Some of the most characteristic species are:

*Notidanus gigas* SISM., *Odontaspis (Synodontaspis) crassidens* (AG.), *Isurus hastalis* (AG.), *Lamna hasloensis*, nov. sp., *Carcharodon megalodon* (CHARLESWORTH), *Hemipristis serra* AG., *Aëtobatis arcuatus* AG., *Rhinoptera studeri* (AG.).

Without a doubt the material shews the whole to have been of Middle Miocene origin. At that time there existed an open connection between the Mediterranean and the North Sea, via the Pas-de-Calais; this sea flowed in a wide curve over North Belgium and the South of the Netherlands. The tropical climate which characterised this marine transgression, — and not those before and after — is emphasized in the derived Elsloo fauna by the occurrence of *Aëtobatis arcuatus* AG. and *Hemipristis serra* AG.

The preservation of the fossils shews that the fauna is not *in situ*, but has been washed out of Middle Miocene beds by a younger transgression and redeposited in lagoons.

The great percentage of sharks' teeth found in the fauna is due to the resistant nature of the enamel-covering of the teeth; other fossils have not been able to withstand the action of water and they have for the most part been either crushed or have entirely disappeared.

By which of the younger tertiary transgressions has this Elsloo conglomerate been formed?

The Upper Miocene transgression, which immediately followed on that of the Middle Miocene, probably did not extend so far South; the Southern border runs by Belfeld, Kessel and Liesel.

However, evidence of the subsequent Lower Pliocene transgression has been found in this region; a glauconiferous sandy bed of this age has been discovered, among other places, in a boring near Sittard.

The hollow sharks' teeth in the second conglomeratic layer (no. 5) which was formed by the still later Middle Pliocene transgression — the

last one which has stretched so far South — appear to be of Lower Pliocene age, they have been washed out of underlying Lower Pliocene beds.

*The Elsloo conglomerate (no. 7) and the overlying thin glauconiferous sandy bed (no. 6) accordingly are of Lower Pliocene age.*

The underlying glauconiferous sand (no. 8) is probably of Middle Miocene age. Here is the possibility however, that during the Pliocene transgression even Upper Oligocene deposits have been subject to erosion, but so no direct palaeontological evidence have yet been found to support this suggestion.

It is, however, curious that in this region no marine Middle Pliocene deposits have been discovered; in my opinion the white sandy beds, which in South Limbourg alternate with browncoal-layers, belong to the Middle Miocene dune-deposits. BREDDIN (1932) has already shown that these sands are of marine origin.

JURASKY could determine, on palaebotanical and climatic evidence, that the browncoal-layers in the neighbouring German region have been deposited under tropical conditions and because the Lower Miocene and Upper Oligocene were characterised by a more subtropical climate, there is all the more reason to consider these alternating marine sands to be of Middle Miocene age.

In any case the derived Elsloo fauna shews that locally, or in the immediate neighbourhood, marine Middle Miocene deposits must have existed.

#### LITERATURE LIST.

- H. J. BECKERS. Verslag omrent het onderzoek in het Julianakanaal. Natuurhist. Maandblad, 22, afl. 4 en 6 (1933).
- H. BREDDIN. Die Feuersteinsgerölle im niederrheinischen Tertiär, ein Beweis für die paratische Natur der Braunkohlenflöze. Centralbl. für Min. Geol. u. Pal. Abt. B (1932).
- F. HALET. La géologie tertiaire de la Campine anversoise et limbourgoise. Bull. Soc. Belge Géol. t. 30 (1920).
- M. LERICHE. L'âge du gravier fossifère d'Elsloo, d'après sa faune ichtyologique. Bull. Soc. Belge Géol. t. 30 (1920).
- A. VON KOENEN. Comparaison des couches de l'Oligocène supérieure et du Miocène de l'Allemagne septentrionale. Ann. Soc. géol. Belg. t. XII (Mém.) (1884).

**Crystallography.** — *Driehoekige suikerkristallen.* Door J. SCHMUTZER.  
(Aangeboden door Prof. L. RUTTEN).

(Communicated at the meeting of October 30, 1937.)

Bij kookproeven, in den loop van het jaar 1935 op het suikerproefstation te Pasoeroean genomen, vormden zich uit de ingedikte suikeroplossing ongewone, driehoekige kristallen (fig. 1), welke bij eene andere ligging op het objectglas de gedaante van een cirkelsegment benaderden (fig. 2).

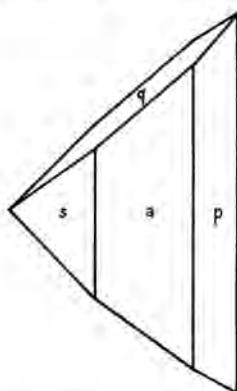


Fig. 1. Kristal liggende op  $a$  ( $\bar{1}00$ ).

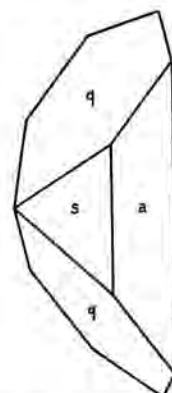


Fig. 2. Kristal liggende op  $p$  ( $1\bar{1}0$ ).

De oplossing, waaruit die kristallen zich hadden afgescheiden, had eene bepaalde voorgeschiedenis, waaromtrent de Directeur van het Proefstation, Dr. P. HONIG, mij in een brief het volgende mededeelde.

Ten behoeve van filtratieproeven had men eene suikeroplossing van ca. 65 % vele weken achtereen elken dag opnieuw met bepaalde soorten ontkleuringskool of hyfocel (gezuiverde infusoriënaarde) vermengd, ze daarna tot 70° C. verwarmd en dan weer afgefiltreerd. Om bederf der suikeroplossing te voorkomen, werd er verder van tijd tot tijd wat thymol toegevoegd. Na afloop der filtratieproeven werd deze oplossing voor kookproeven gebezigt. Daartoe werd ze bij 60 cm. vacuum tot beginnende oververzadiging ingedikt, waarna ter inleiding van de kristallisatie enkele milligrammen zeer fijn verdeelde poedersuiker werden bijgemengd. Reeds spoedig bleek, dat het kristallisatieproces een abnormale vertraging vertoonde. Terwijl bij overeenkomstige kookproeven als regel  $\frac{3}{4}$ —1 uur na het intrekken van poedersuiker het kristalgehalte der oplossing reeds tot  $\pm 55 \%$  was opgelopen en zich een dikke kristalbrei begon te vormen, waren daarmede ditmaal vele uren gemoeid; de sterke oververzadiging gaf daarbij tot voortdurende vorming van nieuw gréin aanleiding. De kristallen namen verder den merkwaardigen driehoeksform aan, waarvan hierboven sprake was.

Analyse van de suikeroplossing leidde niet tot eenig inzicht in den aard van de veranderingen, die daarin door de lange voorbehandeling blijkbaar waren opgetreden. Dat deze veranderingen intusschen een zeer bijzonder karakter droegen en zeer intens moeten zijn geweest, blijkt hieruit, dat bij toevoeging van slechts 20 % van deze oplossing aan eene normale saccharose-oplossing, zich ook uit deze laatste driehoekige kristallen gingen afscheiden. Door contraproeven kon worden vastgesteld, dat toevoeging van thymol, ijzer- en koperzouten resp. enkele procenten invert aan normale saccharose-oplossing, geen merkbaren invloed op den normalen kristalvorm uitoefent; Dr. HONIG meent dan ook te moeten aannemen, dat de telkens weer herhaalde koolbehandeling, verwarming en filtratie de eigenschappen van de suikeroplossing ingrijpend hebben gewijzigd. Daarnaast hebben zich misschien, ondanks de toevoeging van thymol, incidenteel bacteriën ontwikkeld, waarvan de afscheidingsproducten — al dan niet reageerend op het metaal of de verf van de vaten, waarin de oplossing werd behandeld en bewaard — van invloed kunnen zijn geweest.

De kristallen hebben de gedaante van vrijwel rechthoekige en gelijkbeenige driehoekjes, waarvan de hypothenus a gemiddeld  $2\frac{1}{2}$ —3 mm. lang is, terwijl de dikte ongeveer 1 mm. bedraagt. De hypothenus valt samen met de ribbe tusschen twee smalle, langgerekte, gladde en goed spiegelende vlakken, waarvan de standhoek overeenkomt met dien tusschen de vlakken van het 3de sfenoïd  $p(110)$  bij de normale saccharosekristallen. Daarnaast vindt men bij alle kristallen het 1ste pinakoid  $a(100)$  en niet zelden ook, in hetzelfde zoneverband, een tot dusver niet vermeld linker 3de sfenoïd  $s(2\bar{1}0)$ <sup>1)</sup>. In tegenstelling met de vlakken  $p$  zijn  $a$  en  $s$  steeds veel minder volmaakt begrensd; in nog hooger mate geldt dit voor  $q(0\bar{1}1)$ , waarvan de oppervlakte steeds met onregelmatige kristalkorreltjes dicht is bezet, zoodat van spiegeling geen sprake is. De meting van de standhoeken tusschen  $q$  en de aanliggende vlakken kon dan ook alleen geschieden met behulp van de Fedorowtafel, welke voor dit doel van eene bijzondere centreerinrichting werd voorzien. Desniettemin leverden de metingen bevredigende resultaten op, die eene ondubbelzinnige bepaling van de vlakken mogelijk maakten.

De volgende hoeken werden gemeten — cf. fig. 3, waarin de vlakken aan de achterzijde van het kristal met een accent werden aangegeven:  $p:p'=79^\circ$ ;  $p:q=113^\circ$ ;  $p':q=128^\circ$ ;  $p:a=50^\circ 30'$ ;  $a:s=32^\circ$ .

<sup>1)</sup> L. WULFF, Zeitschr. d. Ver. f. die Rübenzuckerindustrie, 925 (1887), bericht, dat aan kristallen, die men in eene alkoholische suikeroplossing liet groeien, een zeer smal vlakje tot ontwikkeling kwam, dat de ribbe tusschen (100) en (110) afstompte en door hem met  $2p$  werd aangegeven. Omtrent de indices van dit vlakje wordt niets naders vermeld; volgens de tekening zou het om een vlak (520) gaan.

G. VAVRINECZ, Zeitschr. f. Krist. 64, 543 (1926) vermeldt onder de zeldzaam voorkomende kristalvlakken aan saccharose een rechter sfenoïd  $d(2\bar{1}0)$  evenzoo enkele andere sfenoïden van de 3de soort met minder eenvoudige indices, eveneens aan de rechter pool.

$s : q = 60^\circ$ ;  $a : q = 78^\circ$ . Al kunnen de metingen geen aanspraak maken op groote nauwkeurigheid doordat reflexbepalingen waren uitgesloten, toch komen de waarden voor de assenverhoudingen en den hoek  $\beta$ , welke daaruit kunnen worden afgeleid, zeer goed overeen met de cijfers, die in de literatuur voor normale saccharose worden opgegeven.

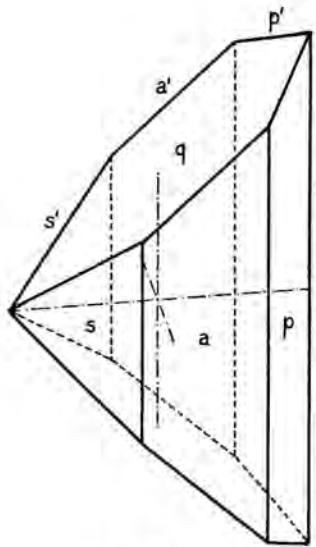


Fig. 3.

De vlakken  $q$  vertonen meermalen, evenwijdig aan de ribben  $q : s$  en  $q : p$ , een streeping, welke ontstaat doordat bij den groei van het kristal het materiaal zich afzet in dunne kristalplaatjes, evenwijdig aan de sfenoïdvlakken  $s$  en  $p$ ; deze plaatjes zijn, waar zij niet samenhangen, door uiterst nauwe, met moederloog gevulde planparallele tusschenruimten gescheiden. Deze lamellaire groei vertoont het pinakoïd  $a$  niet, zoodat de kern van het kristal steeds een meer homogenen indruk maakt. Eene streeping als hier beschreven vermeldt ook WULFF in het reeds geciteerd artikel; bij de door hem onderzochte kristallen, die in de verticale zone, behalve door  $a$ , door de sfenoïden (110) en ( $\bar{1}\bar{1}0$ ) waren begrensd, vond hij de streeping evenwijdig aan de traces van deze sfenoïden ontwikkeld.

De brekingsindices wijken niet van die van saccharose af. Bij onderzoek in convergent Na-licht werd een duidelijk assenbeeld verkregen, waarbij geheel in overeenstemming met de verhoudingen, die de gewone saccharokristallen kenmerken, het assenvlak  $\perp$  de  $b$ -as staat, terwijl er één optische as ongeveer  $\perp$  op  $a(100)$  uitreedt.

#### Zusammenfassung.

Es werden dreieckige Zuckerkristalle beschrieben, die sich nach Angabe des Direktors der Versuchsanstalt für die Zuckerindustrie in Pasuruan (Java) aus einer Lösung abgeschieden haben, welche während vieler Wochen zwecks Filtrationsversuchen täglich mit Entfärbungskohle resp. Hyflozel versetzt, bis  $70^\circ\text{C}$ . erwärmt und dann abfiltriert wurde. Die Form der Kristalle ist annähernd die gleichschenkeliger Rechtecke, wobei die Hypotenuse von der Kante zwischen den Flächen des rechten 3ten Sphenoid  $p$  (110) gebildet, die beiden andern Schenkel von den Flächen des linken 1en Sphenoid  $q$  ( $\bar{0}\bar{1}1$ ) eingefasst werden. Ausser dem Pinakoid  $a$  (100) ist meistens dat linke 3te Sphenoid  $s$  ( $2\bar{1}0$ ) entwickelt. An vielen Kristallen findet sich ein lamellarer Aufbau parallel den Flächen  $s$  und  $p$ . Die optischen Verhältnisse sind denen der normalen Rohrzuckerkristalle gleich.

**Physiology.** — *The oxygen dissociation curve of the cow's blood during pregnancy and the dissociation curve of the blood of the new born animal in the course of the first time after birth.* By J. ROOS and C. ROMIJN. (Laboratory for Veterinary Physiology of the State University, Utrecht.) (Communicated by Prof. H. J. JORDAN.)

(Communicated at the meeting of October 30, 1937.)

In this paper the work will be reported which was undertaken to examine the following two points in the cow.

- I. The maternal oxygen dissociation curve during pregnancy and its variations during the period of gestation in one and the same animal.
- II. The dissociation curve of the blood of the new born animal and its history during the first time after birth.

The course of the oxygen dissociation curve during the period of gestation has never been studied in one and the same animal, either in man or in any animal. BARCROFT (1934) determined the curve in a number of goats, each of which was pregnant during a stated time, so that one curve was made for each animal. He thus obtained a series of dissociation curves, which ranged all over the period of pregnancy. In man the dissociation curve of the maternal blood, the foetus being at full term, was determined experimentally by EASTMAN, GEILING and DE LAWDER (1933) and by LEIBSON, LIKHNITZKY and SAX (1936).

The second point was not less interesting, since it is to be expected that the respiratory properties of the blood and its oxygen dissociation curve will be involved in the great number of transformations by which the young animal is enabled to survive the enormous transition from intra-uterine to extra-uterine existence. This point had not been a subject of examination either.

Moreover, it had been shown in a previous research, which will still be published, that in the cow the foetal curve is distinguished from that of the mother and from the dissociation curve of the normal non-pregnant adult animal both by position and shape.

**I. The maternal oxygen dissociation curve during the period of pregnancy.**

The material was obtained from 10 healthy young and adult Friesian cows, at different moments of gestation. The time of pregnancy varied from 4 to 9 months, to be exact: from 17 to 40 weeks, the period of gestation lasting 9 months (39—40 weeks) in this animal. By far the

greater part of the curves could be constructed for more than one animal, as shown in the following table:

Number of curves	Duration of pregnancy in months.
4	4
3	5½
2	6
1	7
3	8
4	9

In 3 animals the history of the dissociation curve was followed during a large part of gestation. This experiment was specially useful since a deviation from the area taken up by the curves of the normal non-pregnant animals will not easily be discerned, because of the circumstance, established in an earlier examination, that the limits of the latter are rather wide.

The blood for analysis was drawn from the jugular vein with a wide canula, no anaesthetic being used. A rubber tube with a bore of about 2 mm, connected with it, conducted the blood into a wide glass tube, which contained a 5% solution of ammonium oxalate with 2½% sodium fluoride. The solution had  $\frac{1}{50}$  of the volume of the blood which was thoroughly mixed with it.

The samples of blood used for the determination of points of the dissociation curves were placed in the BARCROFT saturator with about 290 cc volume; in all determinations it contained a nitrogen-oxygen mixture with a varying oxygen pressure and CO<sub>2</sub> under a partial pressure of about 40 mm Hg. After equilibration had been established at 38° C, the blood-gas examination was carried out in BARCROFT's differential manometer, the gas mixture being analysed in HALDANE's 10 cc gas analysis apparatus.

#### *Results.*

The dissociation curves of the pregnant animals were for the greater part found within the limits of the field established for the non-pregnant cow. The points of low oxygen pressure only had a position outside this area during the last 2 months of gestation. In this respect our results differ notably from those obtained by BARCROFT (1934) in the goat and by LEIBSON, LIKHNITZKY and SAX (1936) in man. During the latter half of the period of pregnancy in the goat BARCROFT found the maternal curve displaced towards the right of the area of the non-pregnant animals. A corresponding result has been described by the Russian authors for man;

here the displacement was stated at the moment of parturition only and it was found to be slight.

A complete set of the curves obtained from animals at various moments of pregnancy is given in the Figs. 1—7. At the same time the figures show

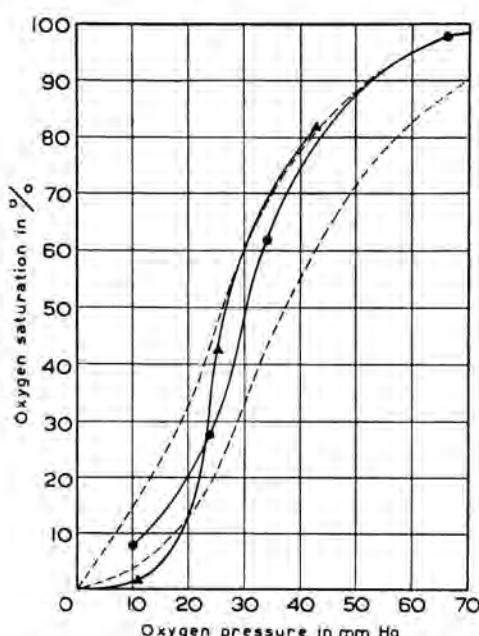


Fig. 1. Cow 1; pregnant 17 weeks (●) and 35 weeks (▲). The dotted lines limit the area within which the curves of the normal non-pregnant cow are found.  $\text{CO}_2$  pressure 41 mm Hg, temperature 38° C.

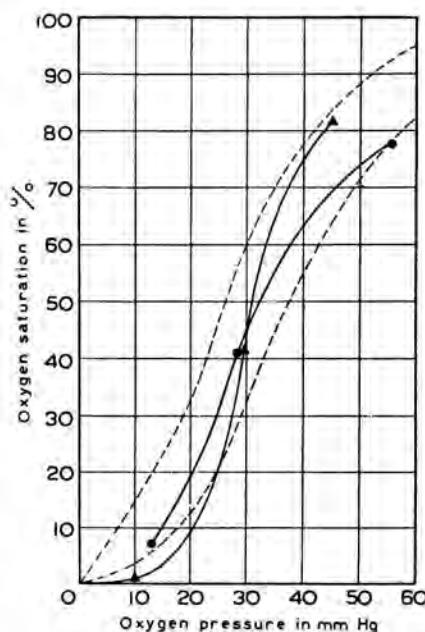


Fig. 2. Cow 2; pregnant 17 weeks (●) and 34 weeks (▲). The rest as in Fig. 1.

a field between broken lines; these are the limits of the dissociation curves which we have found for normal non-pregnant oxen.

The curves of the pregnant animals are proved to fall almost entirely within the limits of the curves which we fixed for the normal non-pregnant animals. By studying the course of the curves in one and the same ox, a definite change can be observed, however, during the last months of gestation. In all three animals the inflection of the curve becomes greater and its steepness increases (Figs. 1, 2, 4, 5 and 6). As axis of rotation may be regarded a point lying at about 25 mm pressure. In consequence of this rotation a higher partial oxygen pressure is exerted by the percentages below and a decreased pressure by the percentages above this point. Its effect supports foetal respiration in so far that, when oxygen pressure is low, oxygen is given off by the maternal blood more readily than before.

The remarkable change of the dissociation curve during the 8th and 9th month can not be attributed to a change of hydrogen-ion concentration.

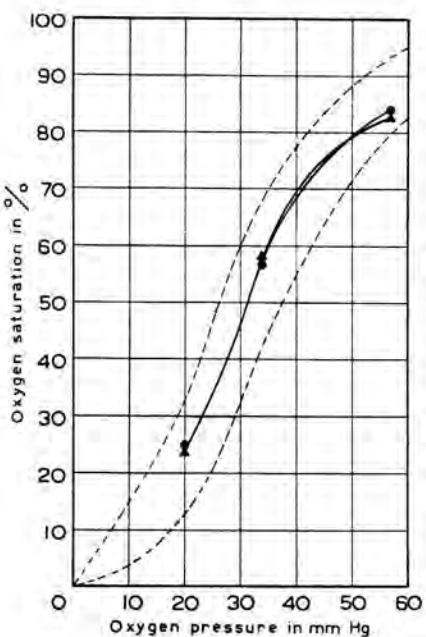


Fig. 3. Cow 3 and cow 4; pregnant 24 weeks. The rest as in Fig. 1.

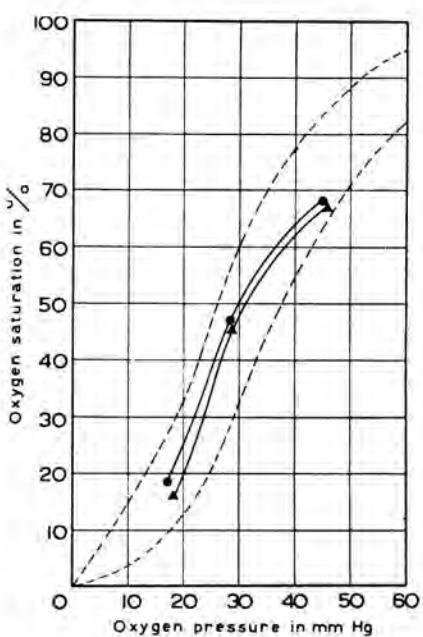


Fig. 4. Cow 1. (▲) and cow 2 (●), pregnant 27 weeks and 26 weeks respectively. The rest as in Fig. 1.

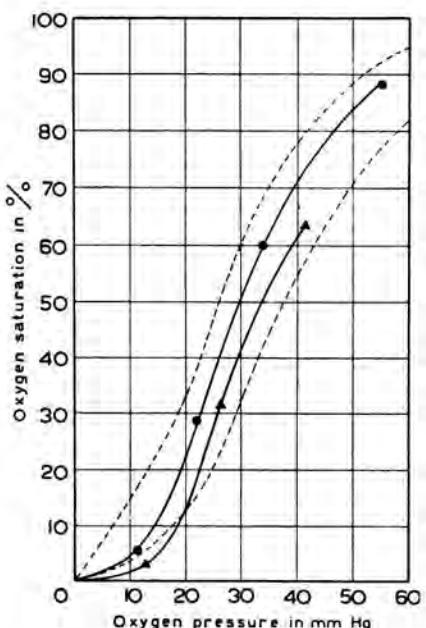


Fig. 5. Cow 5; pregnant 7 months (●) and 8 months (▲). The rest as in Fig. 1.

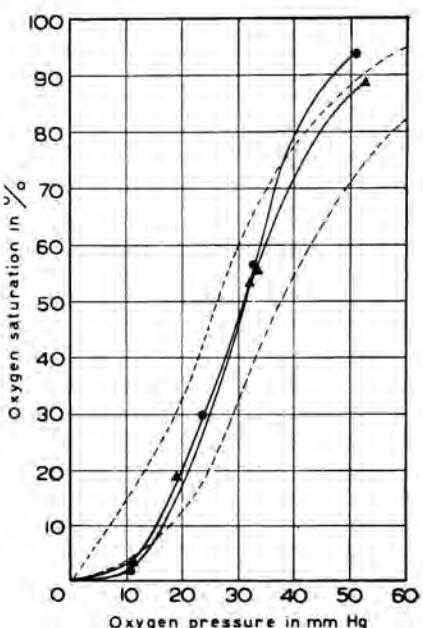


Fig. 6. Cow 5; pregnant 9 months (▲) and immediately after parturition (●). The rest as in Fig. 1.

The shape and the position of the curves in question are governed by other conditions: the most plausible inference is a change of the properties

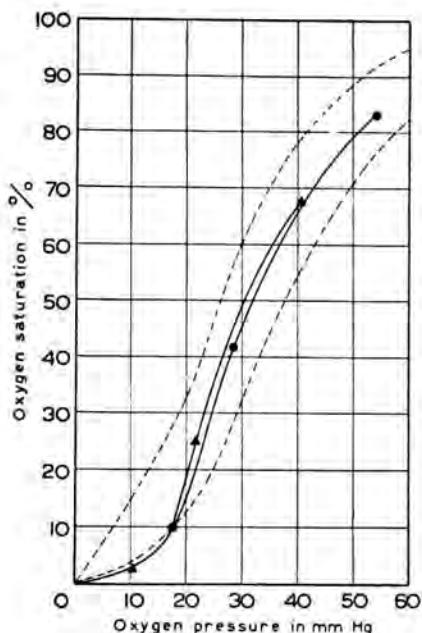


Fig. 7. Cow 6; 5½ hours before (▲) and 12 hours after parturition (●).  
The rest as in Fig. 1.

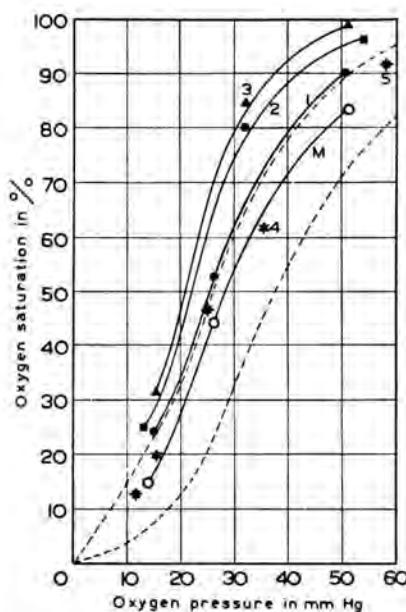


Fig. 8. Oxygen dissociation curves of a calf, normally born at full term, and of its mother.

(M) Maternal curve 5 minutes post partum.

(1) The new born, 5 minutes after delivery.

(2) The calf 2 days old.

(3) " " 4 " "

(4) " " 8 " "

(5) " " 14 " "

$\text{CO}_2$  pressure  $41\frac{1}{2}$ - $43\frac{1}{2}$  mm Hg, temp.  
 $38^\circ \text{C}$ .

of the maternal haemoglobin during this time, although the effect of salts cannot be excluded; neither is it possible to estimate the importance of the influence exerted by the latter.

## II. *The foetal oxygen dissociation curve and its changes during the first time after birth.*

By a previous research it had been shown that in the cow the foetal dissociation curve is found to the left of that of the mother and, since the maternal curve has been proved to lie almost completely within the normal area throughout gestation, the question was put how the foetal curve moves

towards the field, within which it is found in the adult animal. Does the condition of increased oxygen avidity of the foetal blood persist for some time after birth or is it replaced by another immediately after or even shortly before delivery?

BARCROFT (1934) determined the dissociation curve of 2 young goats, old 20 hours and 1 day respectively. The curves were found to the left of the area fixed for the normal goat. The maternal curve for the mother in question was not determined. In the new born child, EASTMAN, GEILING and DE LAWDER (1933) found that the dissociation curve lay within the limits of the norm. According to the data given by LEIBSON, LIKHNITZKY and SAX (1936), it was found to the left of the maternal curve.

#### *Results.*

In 9 new born calves the curves were determined immediately after parturition. In all cases the position was found to the left of the maternal curve but considerably nearer to it than it had been found in the foetuses. To give an example: According to the foetal oxygen dissociation curve, a saturation of 50 % was reached by a pressure of about 12 mm; in the calf a pressure of 25 mm corresponded with that saturation percentage. Thus the foetal curve seems to be moving to the right during the last part of intra-uterine life.

The course of the curve after birth was followed in 6 animals. Five of the six animals experimented on, males and females, exhibited a dissociation curve with a history as given by Fig. 8. All five agree completely.

The history of the curve after birth is striking. Immediately after birth the curve has its position not far from the maternal curve, as was already described above, so that it suggests to be on its way back from the left. During the 4 days which follow, however, this movement is not continued; a return in the opposite direction is stated and the curve again takes a more foetal position. From that moment onwards it goes to the right, so that on the 8th day after birth the maternal position is reached and this position is maintained.

It is interesting that the oxygen affinity of the blood increases for about 4 days after birth (from 4th to 8th day). In order to be informed concerning the mechanism involved, the reserve alkali of the blood and its variations were measured in a number of animals. It was conceivable that a rise of this reserve, i.e. a rise of pH might be the cause of increase of the oxygen-binding power.

One of the results is reproduced in Fig. 9. It is representative of all other cases, in which the curve of  $\text{CO}_2$  affinity was studied for some days after birth together with the oxygen dissociation curve.

Fig. 9 shows that for 3 days after birth the power to take up  $\text{CO}_2$ , at a  $\text{CO}_2$  pressure of 45 mm, increases considerably. The volume taken up

rises from 27 to 38 vol. %, viz. 40 %. In agreement with this the oxygen affinity is found to increase, but during the first 2 days only. The amount

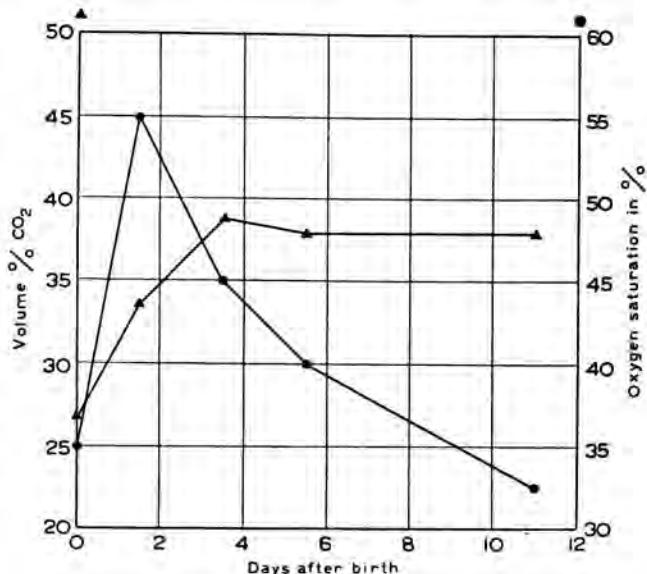


Fig. 9. CO<sub>2</sub>- and O<sub>2</sub> affinity of the blood of the new born during the first 12 days; (●) oxygen curve, (▲) CO<sub>2</sub> curve. — Abscissa: age in days. — Ordinate left hand: volume % of CO<sub>2</sub>, taken up at a CO<sub>2</sub> pressure of 45 mm Hg, the haemoglobin being saturated with oxygen for 100 %. — Ordinate right hand: percentage oxyhaemoglobin formed at 25 mm oxygen pressure.

of oxyhaemoglobin formed at a constant oxygen pressure of 25 mm Hg rises from 25 % to 45 %. But after the second day the curve falls in spite of the fact that the CO<sub>2</sub> curve continues to rise; and it falls further, whereas the CO<sub>2</sub> curve indicates a constant reserve alkali after the 3rd day. Consequently there must be another process that plays a part here; and in a direction opposite to the influence exerted by the CO<sub>2</sub> curve. This process tends to move the foetal oxygen dissociation curve to the right. The question, whether this process is absent during the first 2 days after birth or not sufficiently developed for resisting the effect of the increased alkalinity, will be discussed hereafter. At any rate this process is still proceeding after the change of the pH has already come to an end.

Further information could be obtained in two ways. By using the line charts given by PETERS and VAN SLIJK (1932), it might be inferred from the CO<sub>2</sub> curve given in Fig. 9 that the increase of the reserve alkali observed during the first 1½ day corresponds with a rise of pH of 0.09. This rise is able to produce an increase of the oxygen-binding capacity amounting to 24.54 vol. % O<sub>2</sub> if no other changes interfere. The rise of the oxygen curve really found is less, however, viz. 20 vol. %, so that an

interfering factor must be assumed, since the difference falls far beyond the limits of the experimental error.

A second way to solve the question was offered by calf N° 6, which will be discussed now. Curves for the O<sub>2</sub>- and the CO<sub>2</sub> affinity during the first days after birth under constant conditions of pressure were determined for this animal too. Here (Fig. 10) we had the good fortune to find a constant reserve alkali during the first day; for the rest the curve pretty well agrees with the CO<sub>2</sub> curve given in Fig. 9. In full agreement with the assumption given above, the O<sub>2</sub> curve does not rise but falls from the very first moment. Its fall is arrested temporarily during the 2nd and the 3rd day in consequence of a rise of the reserve alkali during that time, and the O<sub>2</sub> fall is continued as soon as this inhibiting factor has disappeared.

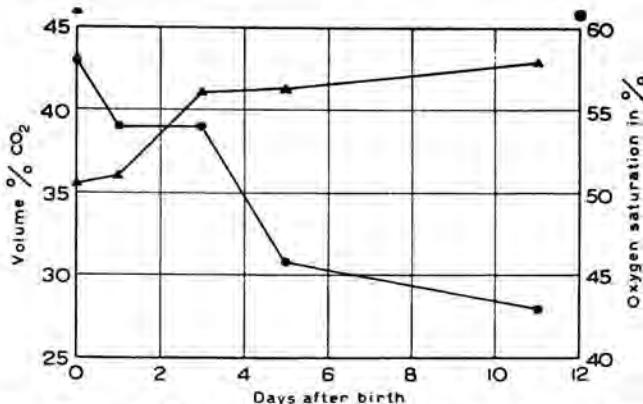


Fig. 10. CO<sub>2</sub>- and O<sub>2</sub> affinity of calf N° 6 during the first days: (●) oxygen curve, (▲) CO<sub>2</sub> curve. Rest as in Fig. 9.

It may therefore be concluded that in the new born animal changes of haemoglobin are already proceeding when the animal is born. By these changes a haemoglobin is formed with a lower oxygen-binding capacity than was shown by the foetal haemoglobin. At the end of the 11th day this change has not yet fully come to an end, although the quantity of foetal haemoglobin still available has become small. In agreement with this the oxygen dissociation curve of the calf is found near the maternal curve as early as the 8th day.

The observation made in calf N° 7, an animal born about a month before term, deserves attention. The movement of the dissociation curve after birth agreed in so far with the description given, that a gradual displacement towards the maternal curve was observed here too. However, the return was unstable. The curve begins by moving to the right during the first 4 days; then in the course of 4 other days it returns to the left, thus carrying out the movement which, in the normal calf, formed the beginning of displacement of the dissociation curve in the extra-

uterine state. After the 8th day the curve goes to the right with strong retardation, so that the curve has scarcely reached within the limits of the normal area when the animal is 29 days old. The curves are reproduced in Fig. 11.

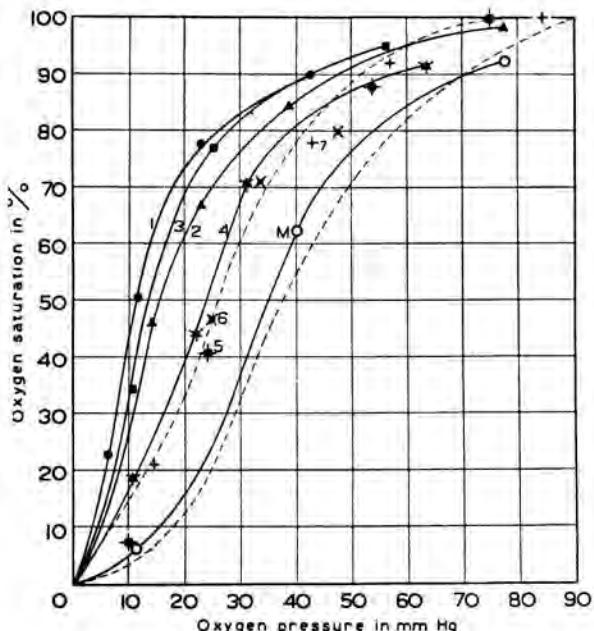


Fig. 11. Oxygen dissociation curves of a calf, born 1 month before term, and of its mother.

(M) Maternal curve at the moment of parturition.

(1) The new born, 5 minutes after delivery.

(2) The calf 4 days old.

(3) " " 8 " "

(4) " " 14 " "

(5) " " 20 " "

(6) " " 23 " "

(7) " " 29 " "

CO<sub>2</sub> pressure 43–44 mm Hg, temp. 38.5° C.

#### *Discussion.*

If now we come to the question as to what changes are observed in the blood of the young animal during the first weeks after birth and which mechanisms play a part, the following answer is given by the results described. Immediately after birth a change of the properties of haemoglobin is already established by which blood would obtain a lower oxygen affinity. As a rule, however, this process is counterbalanced and even surpassed by the increasing alkalinity of the blood, so that these two phenomena together effect an increase of the oxygen-binding power during some 4 days. During this time the oxygen dissociation curve moves to the

left and returns. After the 4th day the reserve alkali of the blood does not undergo notable alterations and the decrease of oxygen affinity in consequence of the proceeding change of haemoglobin continues gradually for 8 days with the result, that the dissociation curve persists in its movement towards the maternal curve. After this time foetal haemoglobin seems to have been replaced for far the greater part by a haemoglobin with the maternal properties.

So the observation which we made before, that in the cow the foetal haemoglobin has properties which differ from the maternal haemoglobin, as BARCROFT found it in the goat, is corroborated by this work. At the same time the determination of the dissociation curves during the first time after birth has given information concerning the process of transition from the foetal haemoglobin to the normal and the conditions under which this process is carried out. It must be repeated that it is not possible to say, in how far the electrolytes of the blood play a part in these conditions and in the oxygen binding power of the blood.

#### *Summary.*

1. A complete series of oxygen dissociation curves are given for the blood of the maternal cow comprising the period of pregnancy from the 4th month till parturition.
2. Until the 8th month of pregnancy the curves are lying within the limits determined for the normal non-pregnant animal.
3. By following the curves during the period of gestation in one and the same animal a change of shape and position of the curves could be established, particularly in the 8th and the 9th month.
4. The increase of the inflection of the curves cannot be the result of change of the hydrogen-ionconcentration. It must be attributed either to changed properties of the maternal haemoglobin or to the effect of salts.
5. Oxygen dissociation curves are given for the new born animal during the first weeks after birth.
6. The curve of the new born animal is found to the left of that of the mother. Its displacement towards the maternal area was discussed in detail. It was proved that foetal haemoglobin differs from that of the mother and that changes of the properties of the foetal haemoglobin are already proceeding immediately after birth and continue for about 8 days, if the animal was born mature.

#### LITERATURE.

- BARCROFT, J., R. H. E. ELLIOT, L. B. FLEXNER, F. G. HALL, W. HERKEL, E. F. McCARTHY, T. MCCLURKIN and M. TALAAT, *J. Physiol.* **83**, 192 (1934).  
 EASTMAN, N. J., E. M. K. GEILING and A. M. DE LAWDER, *Johns Hopk. Hosp. Bull.* **53**, 246 (1933).  
 LEIBSON, R. G., I. I. LIKHNITZKY and M. G. SAX, *J. Physiol.* **87**, 97 (1936).

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN  
TE AMSTERDAM

---

PROCEEDINGS  
VOLUME XL

No. 10

Acting-President: H. R. KRUYT

Secretary: M. W. WOERDEMAN

---

CONTENTS

- KRAMERS, H. A.: "The use of charge-conjugated wave-functions in the hole-theory of the electron", p. 814.
- CLAY, J.: "Ionization and conductivity in gases at high pressures", p. 824.
- CORPUT, J. G. VAN DER: "Sur la méthode de WEYL dans la théorie des nombres". (Troisième communication), p. 836.
- CORPUT, J. G. VAN DER: "Sur deux, trois ou quatre nombres premiers". (Première communication), p. 846.
- WEITZENBÖCK, R.: "Ueber Trivektoren. III", p. 851.
- VERKADE, P. E., und J. VAN DER LEE: "Synthesen von Glycero-phosphatidsäuren und Glycero-phosphatiden", p. 858.
- DUBOIS, EUG.: "The osteone arrangement of the thigh-bone compacta of Man identical with that, first found, of Pithecanthropus", p. 864. (With two plates).
- MEIJER, C. S.: "Noch einige Integraldarstellungen für Produkte von WHITTAKERSchen Funktionen". (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT), p. 871.
- FLORSCHÜTZ, F., and I. M. VAN DER VLERK: „Fossiele cellenstructuur in jong-Pleistoceene Oost-Nederlandsche afzettingen". (Preliminary communication). (Communicated by Prof. L. RUTTEN), p. 880. (With one plate).
- KOENIGSWALD, G. H. R. VON: "Ein Unterkieferfragment des Pithecanthropus aus den Trinilschichten Mitteljavas". (Communicated by Prof. L. RUTTEN). (With one plate), p. 883.
- WESTON, JEAN K.: "Notes on the telencephalon of Mormyrus and Gnathonemus". (Communicated by Prof. C. U. ARIËNS KAPPERS), p. 894.
- ERDÖS, P.: "On additive properties of squares of primes". I. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT), p. 905.
- Errata, p. 905.
-

**Physics. — The use of charge-conjugated wave-functions in the hole-theory of the electron.** By H. A. KRAMERS.

(Communicated at the meeting of November 27, 1937.)

From the 4-component DIRAC wave-function  $\psi_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) satisfying

$$\{(\vec{a}, \vec{p} - e\vec{\mathcal{A}}) + e\Phi + \beta m\} \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}, \dots \quad (1)$$

another 4-component wave-function  $\psi^L$  can be derived, which satisfies the same equation, but with the sign of  $e$  reversed:

$$\{(\vec{a}, \vec{p} + e\vec{\mathcal{A}}) - e\Phi + \beta m\} \psi^L = i\hbar \frac{\partial \psi^L}{\partial t}. \dots \quad (2)$$

We call  $\psi^L$  the *charge-conjugated* function of  $\psi$ . The relation between  $\psi$  and  $\psi^L$  is a very simple one, when we choose for the matrices  $\vec{a}, \vec{\beta}$  that particular representation, which causes the two components  $\psi_1, \psi_2$  to transform like a relativistic spinor  $u, v$ , and  $\psi_3, \psi_4$  like a spin-conjugated spinor  $U^\dagger (= -V^*)$ ,  $V^\dagger (= U^*)$ , when a LORENTZ-transformation is applied<sup>1)</sup>. In fact, writing

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ -V^* \\ U^* \end{pmatrix} \dots \quad (3)$$

and defining the charge-conjugated wave-function by

$$\psi^L = \begin{pmatrix} \psi_1^L \\ \psi_2^L \\ \psi_3^L \\ \psi_4^L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ V \\ -v^* \\ u^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_4^* \\ -\psi_3^* \\ -\psi_2^* \\ \psi_1^* \end{pmatrix} \dots \quad (4)$$

it is easily verified that  $\psi^L$  satisfies (2) when  $\psi$  satisfies (1).

In order to prove this, consider for a moment  $\psi_k$  as a function of two variables  $s, r$  which each take only the values  $+1/2$  and  $-1/2$ :

$$\psi = \psi_{s,r}, \quad \psi_1 = \psi_{+1/2,+1/2}, \quad \psi_2 = \psi_{-1/2,+1/2}, \quad \psi_3 = \psi_{+1/2,-1/2}, \quad \psi_4 = \psi_{-1/2,-1/2},$$

<sup>1)</sup> Compare for instance H. A. KRAMERS, Hand u. Jahrb. d. Chem. Physik, I, § 63, 64.

If  $\vec{\sigma}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  and  $\varrho_x, \varrho_y, \varrho_z$  are the PAULI matrices operating on  $s$  and  $r$ , the representation of  $\vec{a}, \beta$  under consideration takes the form:

$$\vec{a} = \varrho_z \vec{\sigma}, \quad \beta = \varrho_x. \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (5)$$

Now the following formulae are easily seen to hold for each of the three  $\sigma$ - and three  $\varrho$ -operators:

$$(\sigma \psi)^L = -\sigma \psi^L \quad (\varrho \psi)^L = -\varrho \psi^L.$$

From this follows:

$$(\vec{a} \psi)^L = \vec{a} \psi^L \quad (\beta \psi)^L = -\beta \psi^L.$$

Since we have furthermore:

$$\begin{aligned} (\vec{p} \psi)^L &= \hbar (-i \nabla \psi)^L = \hbar i \nabla \psi^L = -\vec{p} \psi^L, & \left( i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^L &= -i \hbar \frac{\partial \psi^L}{\partial t} \\ (\vec{\mathcal{A}} \psi)^L &= \vec{\mathcal{A}} \psi^L & (\Phi \psi)^L &= \Phi \psi^L \end{aligned}$$

we see that the charge-conjugated of the left and right side of (1) are equal to the left and right side of (2), both multiplied by  $-1$ .

Any other representation of the  $\vec{a}, \beta$  matrices corresponds to a transformation of the wave-function

$$\psi' = S \psi, \quad \psi'^L = S \psi^L, \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (6)$$

where  $S$  is an arbitrary non-singular matrix and we have

$$\vec{a}' = S \vec{a} S^{-1}, \quad \beta' = S \beta S^{-1}.$$

In the particular case

$$S = \frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{2}} (1 + i \varrho_y \sigma_y), \quad S^{-1} = \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{2}} (1 - i \varrho_y \sigma_y). \quad \dots \quad \dots \quad (7)$$

we find

$$a'_x = a_x = \varrho_z \sigma_x, \quad a'_z = a_z = \varrho_z \sigma_z, \quad a'_y = -\beta = -\varrho_x, \quad \beta' = a_y = \varrho_z \sigma_y.$$

The matrices  $a'$  are now purely real whereas  $\beta'$  is purely imaginary. From (6) we find:

$$\begin{pmatrix} \psi'_1 \\ \psi'_2 \\ \psi'_3 \\ \psi'_4 \end{pmatrix} = \frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi_1 - i \psi_4 \\ \psi_2 + i \psi_3 \\ \psi_3 + i \psi_2 \\ \psi_4 - i \psi_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \psi'_1^L \\ \psi'_2^L \\ \psi'_3^L \\ \psi'_4^L \end{pmatrix} = \frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi_4^* - i \psi_1^* \\ -\psi_3^* - i \psi_2^* \\ -\psi_2^* - i \psi_3^* \\ \psi_1^* - i \psi_4^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi'_1^* \\ \psi'_2^* \\ \psi'_3^* \\ \psi'_4^* \end{pmatrix}.$$

Thus, for this particular representation, charge-conjugation and complex-conjugation are identical:

$$\psi'^L = \psi^* \dots \dots \dots \dots \quad (8)$$

It is immediately seen that equation (2) in this case is the conjugate complex of eq. (1).

The property (8) must be invariant with respect to LORENTZ-transformations; this is directly verified, since — with the representation under consideration — the coefficients of the LORENTZ-transformation of  $\psi'_1, \psi'_2, \psi'_3, \psi'_4$  are real. In fact, an infinitesimal LORENTZ-transformation corresponds to the operator

$$I_{op.} = \frac{1}{2} S(i d_x \sigma_x + i d_y \sigma_y + i d_z \sigma_z + l_x \varrho_x \sigma_x + l_y \varrho_y \sigma_y + l_z \varrho_z \sigma_z) S^{-1},$$

where  $d_x, d_y, d_z$  (infinitesimal rotation) and  $l_x, l_y, l_z$  (infinitesimal pure LORENTZ-transformation) are all real. Inserting the value (7) for  $S$ , we find for  $I_{op.}$  a purely real matrix.

A representation where  $a, i\beta$  are real has been used by MAJORANA<sup>1)</sup> in his recent work on the quantum theory of the negaton and the positon. The concept of charge conjugation is, however, independent of the particular choice of the representation. By its means we will in this article represent some results of the MAJORANA-calculus (and, thereby, also of the DIRAC-HEISENBERG formulation of the hole theory, with which it is practically equivalent) in a general form, which on account of its simplicity might be of some interest.

The PAULI-principle is introduced in the usual way by promoting the wave-function  $\psi$  to a "matrix-operator"  $\Psi$  satisfying

$$\Psi^*(q) \Psi(q') + \Psi(q) \Psi^*(q) = \delta(q, q') \dots \dots \quad (9)$$

where  $q$  stands for the complete set of positional and spin-coordinates. The same relation will hold for the charge-conjugated function:

$$\Psi^{L*}(q) \Psi^L(q') + \Psi^L(q) \Psi^{L*}(q) = \delta(q, q') \dots \dots \quad (10)$$

In these expressions, the asteric means hermitic conjugation.

In ordinary, non-relativistic, quantummechanics an operator  $F^{total}$ , which is symmetrical with respect to the electrons and which consists simply of a sum of identical hermitic operators  $F(i)$

$$F^{total} = \sum_i F(i)$$

( $F(i)$  operates on the coordinates of the  $i^{th}$  electron), is promoted to a matrix operator  $F$  by the well known formula:

$$F = \int \Psi^* F \Psi,$$

where  $\int$  means integration over the three space coordinates and summa-

---

<sup>1)</sup> Nuovo Cimento, April, p. 171 (1937).

tion over the spin coordinates. With DIRAC's equation (1) and its charge-conjugated equation (2), we would have the choice between the two completely analogous hermitic expressions

$$\int \psi^* F \psi \text{ and } \int \psi^{L*} F^L \psi^L, \dots \dots \quad (11)$$

where  $F$  is obtained from  $F$  by changing the quantity  $e$  representing the electric charge (and which in general may occur in  $F$ ) into  $-e$ :

$$F^L(e) = F(-e) \dots \dots \quad (12)$$

MAJORANA's calculus can now be simply expressed by stating that the arithmetic mean of the two expressions (11) has to be taken:

$$F = \frac{1}{2} \int (\psi^* F \psi + \psi^{L*} F^L \psi^L) \dots \dots \quad (13)$$

A particular representation of  $\psi$  is obtained by developing  $\psi$  in terms of the eigenfunctions of the free electron. Those corresponding to "positive" energies will be denoted by  $\varphi_\lambda$ ; those corresponding to "negative" energies by  $\varphi_\lambda^L$ . For the latter we may indeed take the charge-conjugated of the former. The  $\varphi_\lambda$  may be taken to correspond to definite values of the impuls-vector  $\vec{p}$ ; for each  $\vec{p}$  there will still be two  $\varphi_\lambda$ 's, which may be taken to correspond to spin parallel ( $\varphi_\lambda^p$ ) and antiparallel ( $\varphi_\lambda^a$ ) to  $\vec{p}$ . Taking for simplicity the eigenfunctions to be normalized eigenfunctions in a big cubical space (volume  $\Omega$ ) with periodic boundary conditions, and using the representation (5), we may write for every possible impuls-vector  $\vec{p}_\lambda$  with components  $\hbar \Omega^{-1/3} k_x, \hbar \Omega^{-1/3} k_y, \hbar \Omega^{-1/3} k_z$  ( $k_x, k_y, k_z$  integers)<sup>1)</sup>

$$\left. \begin{aligned} \varphi_\lambda^p &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \begin{pmatrix} C \alpha \\ C \beta \\ S \alpha \\ S \beta \end{pmatrix} e^{\frac{i(\vec{p} \cdot \vec{r})}{\hbar}}, & \varphi_\lambda^a &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \begin{pmatrix} -S \beta^* \\ S \alpha^* \\ -C \beta^* \\ C \alpha^* \end{pmatrix} e^{\frac{i(\vec{p} \cdot \vec{r})}{\hbar}} \\ \varphi_\lambda^{pL} &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \begin{pmatrix} S \beta^* \\ -S \alpha^* \\ -C \beta^* \\ C \alpha^* \end{pmatrix} e^{-\frac{i(\vec{p} \cdot \vec{r})}{\hbar}}, & \varphi_\lambda^{aL} &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \begin{pmatrix} C \alpha \\ C \beta \\ -S \alpha \\ -S \beta \end{pmatrix} e^{-\frac{i(\vec{p} \cdot \vec{r})}{\hbar}} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

where  $C, S, \alpha, \beta$  are defined by

$$\left. \begin{aligned} C &= \cos \frac{1}{2} \chi, & S &= \sin \frac{1}{2} \chi, & \operatorname{ctg} \chi &= \frac{p}{m}, \\ p_z &= p \cos \vartheta, & p_x + i p_y &= p \sin \vartheta e^{i\psi}, \\ \alpha &= \cos \frac{\vartheta}{2} e^{-i\psi/2}, & \beta &= \sin \frac{\vartheta}{2} e^{i\psi/2} \end{aligned} \right\} \quad . . . \quad (15)$$

1) Compare H. A. KRAMERS, loc. cit. p. 292.

The representation in question can now be defined as

$$\psi = \sum_{\lambda} a_{\lambda} \varphi_{\lambda} + \sum_{\lambda} b_{\lambda}^* \varphi_{\lambda}^L . . . . . \quad (16)$$

To it corresponds the following representation for  $\psi^L$

$$\psi^L = \sum_{\lambda} b_{\lambda} \varphi_{\lambda} + \sum_{\lambda} a_{\lambda}^* \varphi_{\lambda}^L . . . . . \quad (17)$$

In these formulae the summation over  $\lambda$  includes summation over the two opposite spin-directions. The  $a_{\lambda}$ ,  $b_{\lambda}$  and their hermitic conjugates  $a_{\lambda}^*$ ,  $b_{\lambda}^*$  are WIGNER-JORDAN matrices satisfying

$$a_{\lambda}^* a_{\lambda} + a_{\lambda} a_{\lambda}^* = 1, \quad b_{\lambda}^* b_{\lambda} + b_{\lambda} b_{\lambda}^* = 1, \\ (\text{all other pairs anticommute}).$$

In a continuous description (16) and (17) have to be replaced by integrals. Such a description is particularly appropriate to the discussion of the LORENTZ-invariance of the calculus, but we will not enter upon it here.

We will now discuss some particular examples of the application of (13). Consider first the case of free electrons, i. e. electrons in the absence of external fields and without interaction. We compute the energy operator  $H^0$

$$H^0 = \frac{1}{2} / (\psi^* H^0 \psi + \psi^L H^0 \psi^L)$$

where

$$H^0 = H^{0L} = (\vec{a} \vec{p}) + \beta m.$$

Now, since

$$H^0 \varphi_{\lambda} = E_{\lambda} \varphi_{\lambda}, \quad E_{\lambda} = + \sqrt{p_{\lambda}^2 + m^2}, \\ H^0 \varphi_{\lambda}^L = - E_{\lambda} \varphi_{\lambda}^L,$$

we find

$$\left. \begin{aligned} H^0 &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda} E_{\lambda} (a_{\lambda}^* a_{\lambda} - b_{\lambda} b_{\lambda}^*) + \frac{1}{2} \sum_{\lambda} E_{\lambda} (b_{\lambda}^* b_{\lambda} - a_{\lambda} a_{\lambda}^*) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda} E_{\lambda} \{ (a_{\lambda}^* a_{\lambda} - a_{\lambda} a_{\lambda}^*) + (b_{\lambda}^* b_{\lambda} - b_{\lambda} b_{\lambda}^*) \} \\ &= \sum_{\lambda} E_{\lambda} \{ a_{\lambda}^* a_{\lambda} + b_{\lambda}^* b_{\lambda} - 1 \}, \end{aligned} \right\} . . . . . \quad (18)$$

where the  $-1$  corresponds to the well known infinite negative zero point energy of the hole-theory. Generalising the  $a$  and  $b$  to time-dependent matrices  $a(t)$ ,  $b(t)$ , which for  $t=0$  become equal to  $a$  and  $b$ , we find immediately from

$$\dot{a}_{\lambda} = \frac{i}{\hbar} (H^0 a_{\lambda} - a_{\lambda} H^0), \quad \dot{b}_{\lambda} = \frac{i}{\hbar} (H^0 b_{\lambda} - b_{\lambda} H^0),$$

the well known time-dependence

$$\mathbf{a}_\lambda(t) = \mathbf{a}_\lambda e^{-\frac{iE_\lambda t}{\hbar}}, \quad \mathbf{b}_\lambda(t) = \mathbf{b}_\lambda e^{-\frac{iE_\lambda t}{\hbar}}.$$

Promoting also  $\psi$  to a time-dependent operator  $\psi(t)$ , the formula (16) takes the form:

$$\psi_k(x, y, z, t) = \sum_\lambda \mathbf{a}_\lambda \varphi_\lambda^0 e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_\lambda \cdot \vec{r} - E_\lambda t)} + \sum_\lambda \mathbf{b}_\lambda^* \varphi_\lambda^{0L} e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_\lambda \cdot \vec{r} - E_\lambda t)},$$

where  $\varphi_\lambda^0$  and  $\varphi_\lambda^{0L}$  are the values of  $\varphi_\lambda$  and  $\varphi_\lambda^L$  at the origin. It is of interest to compare this formula with the analogous formula for the quantized radiation field of vacuum-electrodynamics<sup>1</sup>), where a similar formalism imposes itself automatically and ensures positive energy-values for the light-quanta.

The operator  $e$  of the total charge of the electrons will be given by choosing in (13):

$$F = -F^L = e,$$

and we find:

$$\begin{aligned} e &= \frac{e}{2} \int (\psi^* \psi - \psi^{L*} \psi^L) = \frac{e}{2} \sum_\lambda (\mathbf{a}_\lambda^* \mathbf{a}_\lambda + \mathbf{b}_\lambda \mathbf{b}_\lambda^*) - \frac{e}{2} \sum_\lambda (\mathbf{b}_\lambda^* \mathbf{b}_\lambda + \mathbf{a}_\lambda \mathbf{a}_\lambda^*) \\ &= e \sum_\lambda (\mathbf{a}_\lambda^* \mathbf{a}_\lambda - \mathbf{b}_\lambda^* \mathbf{b}_\lambda) = -e \sum_\lambda (\mathbf{b}_\lambda^* \mathbf{b}_\lambda - \mathbf{a}_\lambda^* \mathbf{a}_\lambda) \end{aligned} \quad (19)$$

This leads us to consider  $\mathbf{a}_\lambda^* \mathbf{a}_\lambda$  as the operator of the number of electrons with charge  $e$  in the state  $\lambda$  (we will call them *negatons*) and  $\mathbf{b}_\lambda^* \mathbf{b}_\lambda$  as that of the electrons with charge  $-e$  in this state (*positons*). This interpretation is in accordance with the usual interpretation of the formulae to which one is led when external fields are taken into consideration and when the non relativistic limiting case is discussed. It must, however, be remarked that the total number of electrons

$$N = \sum_\lambda (\mathbf{a}_\lambda^* \mathbf{a}_\lambda + \mathbf{b}_\lambda^* \mathbf{b}_\lambda) \dots \dots \dots \quad (20)$$

is not given by (13) when we put  $F = F^L = 1$ ; we find indeed for  $F = 1$  formally a constant:

$$\mathbf{1} = \sum_\lambda \mathbf{1}.$$

On the other hand, the simple but non-analytical operator

$$F = F^L = \frac{H^0}{|H_0|}$$

<sup>1</sup>) H. A. KRAMERS, loc. cit. p. 434. Eq. (103).

would give

$$\left( \frac{\mathbf{H}^0}{|\mathbf{H}^0|} \right) = \sum_{\lambda} (\mathbf{a}_{\lambda}^* \mathbf{a}_{\lambda} + \mathbf{b}_{\lambda}^* \mathbf{b}_{\lambda} - 1) = N_{\lambda} - \sum_{\lambda} 1.$$

The last sum might be called the negative zero-point number of electrons; it corresponds to the negative zero-point energy in (18).

The operator of the charge-density in space is given by

$$Q(x, y, z) = \sum_k \frac{e}{2} (\psi_k^* \psi_k - \psi_k^{*L} \psi_k^L). \quad . . . \quad (21)$$

If necessary it can be expressed explicitly in terms of the  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a}^*$ ,  $\mathbf{b}^*$ . It is a particular case of the more general operator:

$$P(q', t'; q, t) = \frac{e}{2} (\psi^*(q, t) \psi(q', t') - \psi^{*L}(q, t) \psi^L(q', t')) \quad . \quad (22)$$

where  $q$  and  $q'$  stand for two arbitrary, different choices of the space coordinates  $x$ ,  $y$ ,  $z$  and the spin coordinate  $k$ . The meaning of  $P$  is of course only well defined when the HAMILTONIAN  $H$  of the system is known, which governs the time dependence of all operators. In the particular case where the electrons are free, we have  $H = H^0$ . The corresponding  $P$ -operator will be denoted by  $P^0$ . It is closely related to

$$R^0(q', t'; q, t) = e \sum_{\lambda} \left( \varphi_{\lambda}^* \varphi_{\lambda} e^{\frac{i E_{\lambda}(t-t')}{\hbar}} - \varphi_{\lambda}^{*L} \varphi_{\lambda}^L e^{-\frac{i E_{\lambda}(t-t')}{\hbar}} \right). \quad . . . \quad (23)$$

This function is identical with the density matrix, which has been computed in DIRAC's paper on the hole-theory of 1934<sup>1)</sup>.  $P$  in (22) may be called the general operator of the matrix density of the electric charge.

If the electrons are subject to an external field with potentials  $\vec{A}$ ,  $\vec{\Phi}$ , we introduce in (13) for  $F$ ,  $F^L$  the operators:

$$H = H^0 + e(\vec{\Phi} - (\vec{a} \vec{A}))$$

$$H^L = H^0 - e(\vec{\Phi} - (\vec{a} \vec{A}))$$

and we find for the energy-operator of the system:

$$H = H^0 + H^1$$

$$H^1 = \frac{e}{2} \int \{ \psi^* (\vec{\Phi} - (\vec{a} \vec{A})) \psi - \psi^{*L} (\vec{\Phi} - (\vec{a} \vec{A})) \psi^L \}. \quad . . . \quad (24)$$

<sup>1)</sup> Proc. Cambr. Philos. Soc., 30, 150 (1934).

If the action of the operator  $\Phi - (\vec{a} \vec{\mathfrak{A}})$  is described by means of the two-point operator-function  $\Omega(q, q')$ :

$$(\Phi - (\vec{a} \vec{\mathfrak{A}})) f(q) = \int_{q'} \Omega(q, q') f(q'),$$

(24) can also be written in the form

$$\mathbf{H}^1 = \int_{q' q} \mathbf{P}(q', q) \Omega(q, q') \dots \dots \dots \quad (25)$$

where  $\mathbf{P}(q', q)$  is obtained from (22) by putting  $t$  and  $t'$  equal to zero. The  $\mathbf{H}^1$  in (24) or (25) corresponds to the prescription of the DIRAC-HEISENBERG hole-theory; expressed in the  $a_\lambda$  and  $b_\lambda$  it contains on one hand the terms

$$\left. \begin{aligned} & \frac{e}{2} \sum_{\lambda \lambda'} (\Omega_{\lambda \lambda'} + \Omega_{\lambda \bar{\lambda}'}) (a_\lambda^* a_{\lambda'} - b_\lambda^* b_{\lambda'}) \\ & \Omega_{\lambda \lambda'} = \int \varphi_\lambda^* (\Phi - (\vec{a} \vec{\mathfrak{A}})) \varphi_{\lambda'} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \quad (26)$$

which commute with  $\mathbf{N}$ , and on the other hand the terms

$$\left. \begin{aligned} & \frac{e}{2} \sum_{\lambda \bar{\lambda}'} (\Omega_{\lambda \bar{\lambda}'} + \Omega_{\bar{\lambda} \bar{\lambda}'}) (a_\lambda^* b_{\lambda'}^* + b_{\lambda'} a_\lambda) \\ & \Omega_{\lambda \bar{\lambda}'} = \int \varphi_\lambda^* (\Phi - (\vec{a} \vec{\mathfrak{A}})) \varphi_{\lambda'}^L \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \quad (27)$$

The terms (27) do not commute with  $\mathbf{N}$ ; they correspond to pair-formation ( $a^* b^*$ ) and to pair-annihilation ( $b a$ ).

If the potentials of the external field are time-independent, the operator  $H = H^0 + e(\Phi - (\vec{a} \vec{\mathfrak{A}}))$  will have eigenfunctions  $\chi_e$  and corresponding eigenvalues  $E_e$ . The question arises if, and in what way, they correspond to stationary states of the one-electron problem in the field in question. It seems very difficult to give any definite answer at all to this question if no specification of the  $\vec{\mathfrak{A}}, \Phi$  field is given. This difficulty is related to the unsatisfactory and preliminary character of the hole-theory in its present condition.

In the particular case, where the external field is due to a positive electric charge, smaller than  $137|e|$ , fixed at some point in space (hydrogen-like atom), the  $\chi_e$  and  $E_e$  can be naturally divided into two groups. The first of these corresponds to positive values of  $E_e$ , which we will denote by  $E_n$  (eigenfunctions  $\chi_n$ ). For the second group the  $E_e$ 's are negative; we denote them by  $-\bar{E}_n$  (eigenfunctions  $\bar{\chi}_n^L$ ). From comparison with the non-relativistic treatment, we expect that if  $e$  is taken to be negative, the first group corresponds to one negative electron

in the field of the nucleus (ordinary hydrogen atom), whereas the second group corresponds to one positive electron in this field. When the nuclear charge continuously decreases to zero, the set of  $\chi_m$ -functions merges continuously into the set of  $\varphi_\lambda$ -functions defined by (14), whereas the set of  $\bar{\chi}_m^L$ -functions merges into the  $\varphi_\lambda^L$ -functions. In this case we are therefore led to introduce the following representation of  $\psi$  and  $\psi^L$ :

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \sum_m c_m \chi_m + \sum_n d_n^* \bar{\chi}_n^L \\ \psi^L &= \sum_n d_n \bar{\chi}_n + \sum_m c_m^* \chi_m^L \\ c_m^* c_m + c_m c_m^* &= 1, \quad d_n^* d_n + d_n d_n^* = 1 \end{aligned} \right\}, \quad \dots \quad (28)$$

(all other pairs anticommute).

Comparing (28) with (16), we see that the  $c_m$  and  $d_n^*$  can be expressed in terms of the  $a_\lambda$  and  $b_\lambda^*$ , and reversely.

The energy operator will now be given by

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{1}{2} (\psi^* H \psi + \psi^{L*} H^L \psi^L) \\ &= \sum_m E_m c_m^* c_m + \sum_n \bar{E}_n d_n^* d_n - \frac{1}{2} (\sum_m E_m + \sum_n \bar{E}_n) \end{aligned} \right\}. \quad (29)$$

The total charge is given by

$$e = e (\sum_m c_m^* c_m - \sum_n d_n^* d_n).$$

Looking apart from the zero-point energy in (29), all stationary states have positive energy. Their SCHRÖDINGER-functions, in the  $m, n$  representation, are given by functions

$$A(\dots N_m \dots; \dots \bar{N}_n \dots). \quad (N_m, \bar{N}_n = 1 \text{ or } 0) \quad \dots \quad (30)$$

which are zero for all  $N_m, \bar{N}_n$  combinations with the exception of one particular combination  $N_m^0, \bar{N}_n^0$ , for which  $A$  equals 1. Every one of these states can also be interpreted in terms of "free electrons", but it appears not to be quite easy to determine how the  $A(\dots N_m \dots; \dots \bar{N}_n \dots)$ -description is transformed into the  $A(\dots N_\lambda \dots; \dots \bar{N}_\lambda \dots)$ -description, which would refer to free electrons.

One of the ordinary discrete states, say state  $m_0$ , of the hydrogen-like atom with one electron would correspond to  $A(\dots N_m \dots; \dots \bar{N}_n \dots)$  being different from zero only for that particular  $N_m^0, \bar{N}_n^0$  combination for which all the  $\bar{N}_n^0$  are zero, and for which also all  $N_m^0$  are zero with the exception of  $N_{m_0}^0$ . In the description in terms of free electrons, the

number of electrons in this state is of course not well-defined, there being a probability of finding only one (negative) electron, a probability of finding three electrons (two negative, one positive), and so on.

Now, the electrons have up to this point been considered as independent, whereas in reality they act on each other through the medium of the electromagnetic field. It is of course possible to describe this interaction in a formal way, by introducing a quantized  $E, H$ -field by the methods of quantum-electrodynamics. In view of the unsatisfactory nature of these methods we might, as an approximation, try to introduce directly the COULOMB interaction between the electrons, in order to improve our scheme of calculating stationary states.

Now, in non-relativistic quantum mechanics, this COULOMB interaction would be represented by a matrix-operator:

$$H_2 = \frac{e^2}{2} \int \int_{q q'} \psi^*(q) \psi^*(q') \frac{1}{r} \psi(q') \psi(q) \quad r = |\vec{r}(q) - \vec{r}(q')| . \quad (31)$$

The simplest but perhaps not correct way of generalizing this formalism in the hole theory would be:

$$H_2 = \frac{e^2}{4} \int \int \left\{ \psi^*(q) \psi^*(q') \frac{1}{r} \psi(q') \psi(q) + \psi^{L*}(q) \psi^{L*}(q') \frac{1}{r} \psi^L(q') \psi^L(q) \right\} \quad (32)$$

For large atomic number this energy might be considered as a perturbation. Its influence on the energy of the stationary states would be given by its expectancy value; this value does not vanish automatically in the case of the hydrogen-like atom (with one electron), in contrast to the result of applying (31) to such a state in non-relativistic quantum-mechanics. One might say this is due to the fact that, in the hole theory, it can no longer be said that precisely one electron is present in the stationary states in question. As a result we expect that a correction must be applied to the energy values of the stationary states of the hydrogen atom, as given by the DIRAC theory of 1928.

In a later paper we will discuss more closely the possibility of actually computing this correction.

**Physics. — Ionization and conductivity in gases at high pressures.** By  
J. CLAY.

(Communicated at the meeting of November 27, 1937.)

For the determination of the intensity of electromagnetic radiation of a small wavelength (roentgen and gamma radiation) and of corpuscular radiation with great energy (beta radiation, cosmic radiation) in most cases the ionization in gases is employed.

Recently ionization chambers filled with gas under a high pressure have been used for the measuring of very small intensities. However, some phenomena were observed which gave rise to differences of opinion. The increase of ionization with the pressure, which at low pressures is proportional to them, soon at increasing pressure appears to be smaller than the proportional value and repeatedly the further course of the pressure curve turned out to be different with different investigators. Here two factors play a part.

In the first place, at a high pressure it is not possible to catch all the ions formed by the rays in the gas. At a high pressure, namely, such a considerable recombination of the ions takes place as to make it impossible to expel all ions from the gas even by means of high electric fields, and yet this number has to be known in order to enable us to determine the required intensity of radiation.

There are two ways in which the ions might be recombined. On the whole it may be said that practically in all cases the ions are formed along the paths of the charged corpuscles moving through the gas. They will escape recombination in the column more easily according as the field is higher and the pressure lower, so dependent on  $\left(\frac{X}{p}\right)$ . However, whether the number of paths is larger or smaller, i.e. whether the intensity of radiation is more or less considerable, this will neither diminish nor increase the chance of escape from the column. It will be clear that the higher is the pressure, the stronger must be the field in order to liberate an equal number of ions from the column.

Once having escaped from the column, the ions still have a chance of recombination on their way to the electrodes, the so-called volume-recombination. This chance is proportional to the square of the number of ions present per unit of volume (if the positive and the negative number are the same). Consequently in this case the chance of recombination will very rapidly increase with the intensity of the radiation.

The column ionization theory of JAFFÉ (1) now enables us to calculate from the current  $i$ , occurring in a certain field  $X$ , the saturation current which might be found if the field was infinitely large and all formed ions were collected.

The form given to this formula by ZANSTRA (2) is more useful, if we introduce the time  $t$ , which is required to collect a certain ionization charge, and the time  $T$  which would be required for the saturation current, so if the field is infinitely large. Consequently we have

$$t = T + qTf(x) \quad \text{in which } q = \frac{\alpha N_0}{8\pi D}$$

$\alpha$  is the recombination coefficient

$N_0$  is the specific ionization

$D$  is the diffusion coefficient

$f(x)$  is the cylinder function  $f(x) = e^x \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(ix)$

$$x = \left( \frac{bu \sin \varphi X}{2D} \right)^2.$$

In most cases this can be simplified to

$$x = c \left( \frac{X}{p} \right)^2.$$

$X$  is the force of the field in Volts per cm

$p$  is the pressure in atmospheres

$b$  is a column parameter

$u$  is the mobility of the ions

$\varphi$  is the angle between the path and the direction of the field.

The value of  $c$  is determinated from our experiments.

For  $X = \infty$  is  $f(x) = 0$  and consequently the linear relation between the measured time  $t$  and the value of  $f(x)$ , calculated from the force of the field and the constant  $c$ , immediately yields the value of  $T$  by extrapolation to  $f(x) = 0$  and from this we can find the saturation current and the number of pairs of ions formed per second and per unit of volume.

That there is indeed a linear relation between  $t$  and  $f(x)$  has been proved in a number of cases in the Amsterdam Laboratory, by ionization in air, nitrogen, argon, carbon dioxide, xenon, krypton, neon, helium, with roentgen and gamma rays (3), and further also for cosmic rays in air, argon and carbon dioxide (4) (figs. 1, 2, 3).

To facilitate the use of the formula ZANSTRA has made a graph (4a, 4b) of the HANKEL cylinderfunction, so that we find directly  $f(x)$  for each value of  $x$  from  $X$ ,  $p$  and the constant  $c$ .

The form found just now shows two things. Expressing the time for the

transition of a certain charge in the time which would be required if the field were infinitely large, we find (5)

$$\vartheta = \frac{t}{T} = 1 + \frac{aN_0}{8\pi d} f(x).$$

That means that in two cases with rays of different intensity, as long as

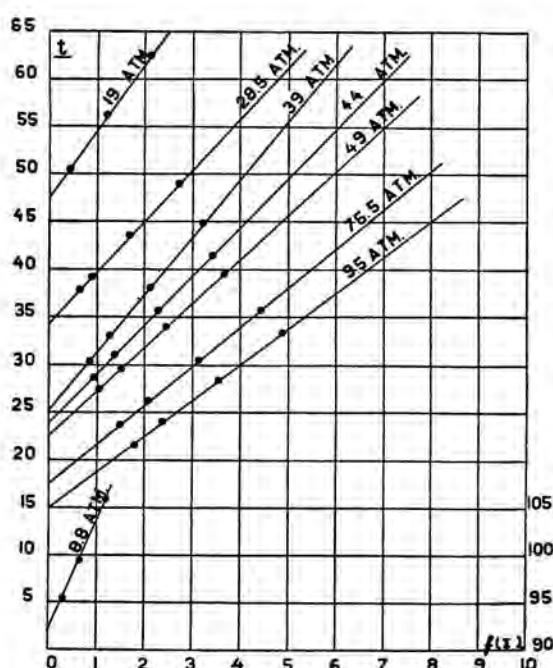


Fig. 1. CLAY and V. TIJN.

Measurements of ionization by gamma rays in air between two flat plates at 0.6 cm distance at different pressures and different fields. According to formula we may expect that the relation between  $I$  and  $f(x)$  is linear for every pressure.

there is no volume ionization,  $\vartheta$  will always be the same, owing to the fact that  $t$  and  $T$  change in the same proportion. If, therefore, with two different degrees of ionization we find the same linear relation between  $\vartheta$  and  $f(x)$ , we may conclude that no volume recombination has taken place. In two cases this test was made by VAN KLEEF and myself (6), one in air and one in argon (figs. 5 and 6). For small intensities of the radiation we see that the volume-recombination occurs only for weak fields.

At the same time we see that, in case of rays of a different kind and with a different specific ionization, the gradients of the lines observed for  $\vartheta$  in  $f(x)$  in the same gas at the same pressure and the same field are a direct measure for the proportion of the specific ionization of these radiations. In fig. 6 we find the proportion of the specific ionization in argon: 1st by

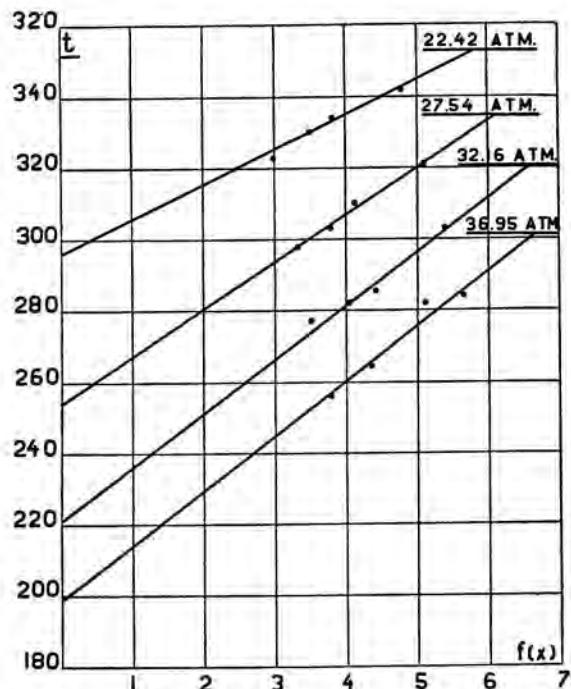


Fig. 2. CLAY and JONGEN.

Measurements of ionization in air by cosmic rays between two coaxial cylinders at 3 cm distance at different pressures at different fields.

roentgen rays of a wavelength between 0.3 and 0.4 Å, 2nd by gamma rays of Ra and 3rd by cosmic rays.

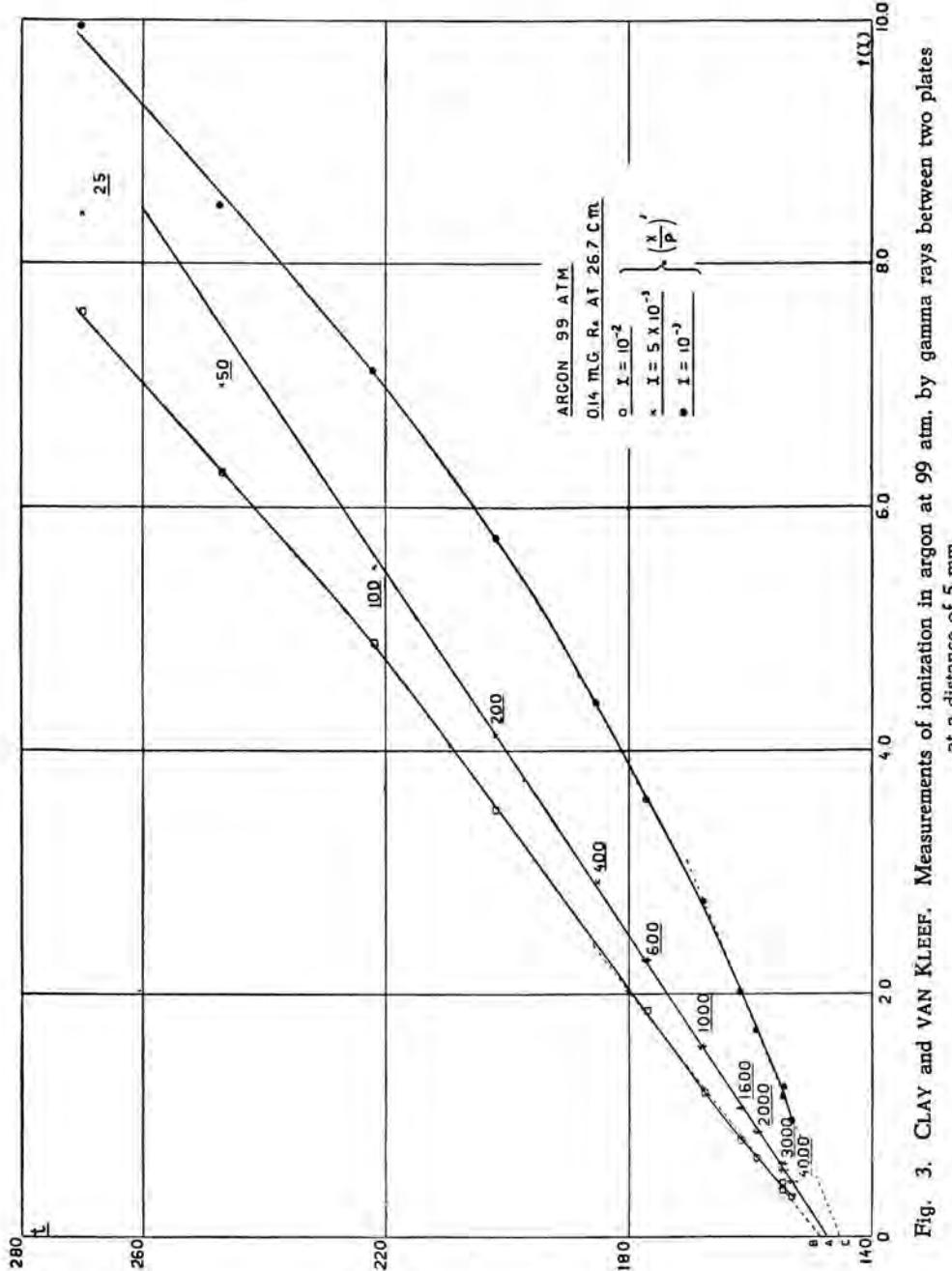


Fig. 3. CLAY and VAN KLEEF. Measurements of ionization in argon at 99 atm. by gamma rays between two plates at a distance of 5 mm.

When by the above-mentioned method the total number of produced electrons in the vessel has been determined, yet another difficulty has to be overcome in order to find out how many would have been formed *in the*

gas alone, since the number of ions that is found is the sum of what really was formed by electrons in the gas and the number produced by electrons from the wall. The latter number may be eliminated in two ways.

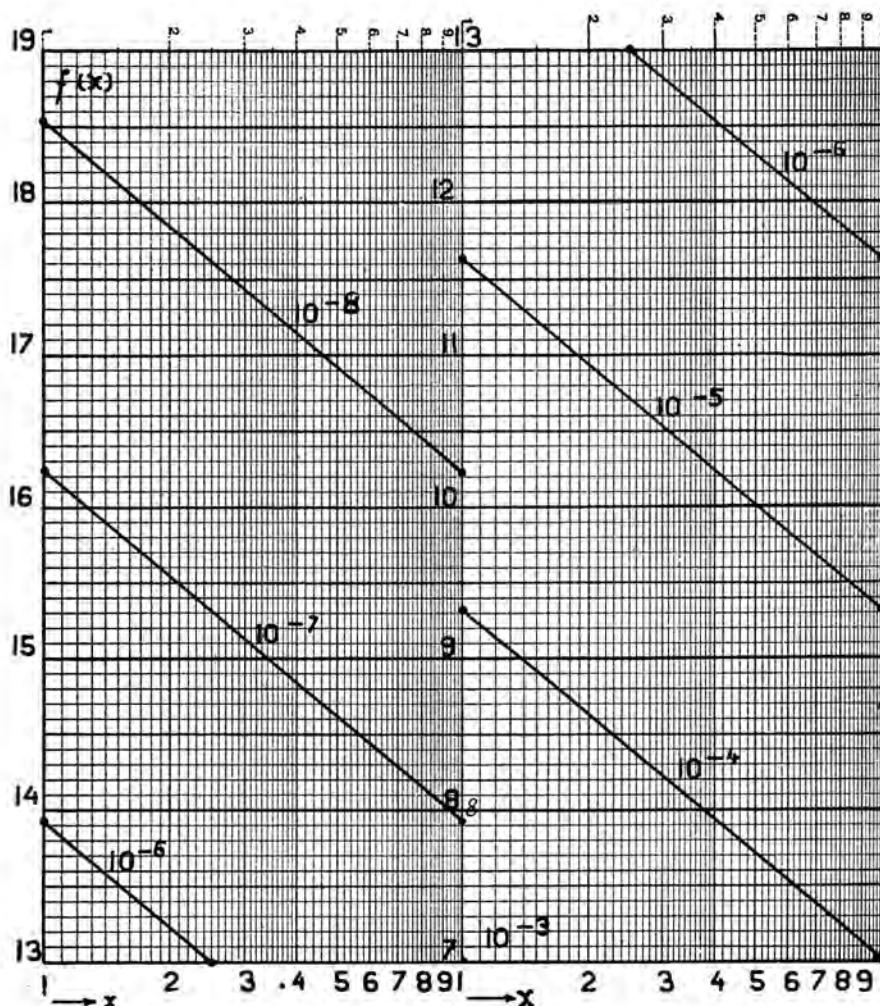


Fig. 4a. ZANSTRA. Values of  $f(x) = e^x \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(ix)$  for  $x$  between  $10^{-8}$  till  $10^{-1}$ . Example:  
for  $x = 3.82 \cdot 10^{-5}$  is  $f(x) = 10.28$ .

We suppose that the number of electrons produced by radiation in the gas is proportional to the density of the gas. Each electron on its way liberates the whole of its energy, if the gas is sufficiently dense, so that the path is confined to the space where the measurements are made. The number of pairs of ions is then also proportional to the density of the gas.

What part now does the wall play here? From the wall a number of electrons is liberated which is proportional to the size of the surface of the wall and each electron will produce a number of ions in accordance with

its energy. If the pressure is so high that the whole path of the electrons lies in the vessel, a rising pressure will not produce an increase of the number of ions, but on lowering of the pressure only a number proportional

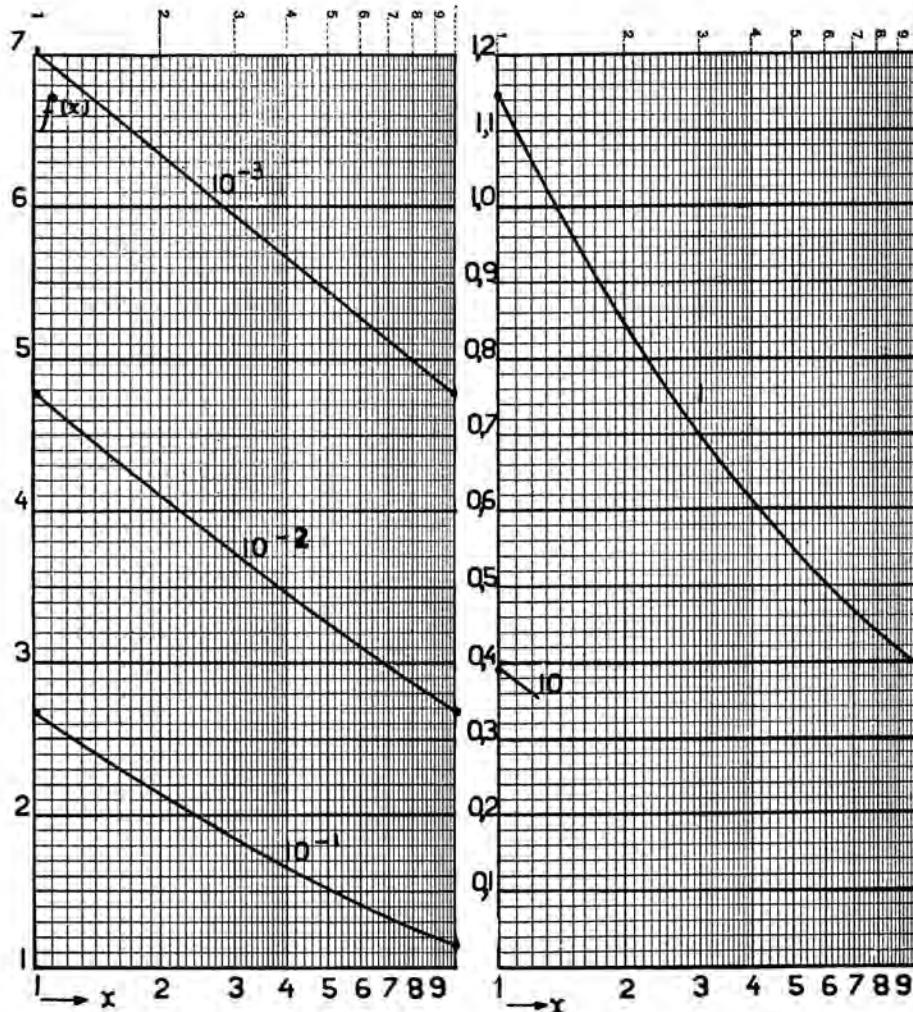


Fig. 4b. ZANSTRA. Values of  $f(x) = e^x \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(ix)$  for  $x$  between  $10^{-3}$  and 12. Example: for  $x = 2.40$  is  $f(x) = 0.774$ .

to the pressure will remain in the vessel and then the ionization by the electrons of the wall will likewise be proportional to the pressure. Consequently we find for high pressures

$$I = Ap + B \quad p > p_0$$

and for lower pressures

$$I = (A + B)p \quad p < p_0$$

If there are corpuscular rays, passing through the vessel, as is the case with cosmic rays, another factor has to be taken into account, likewise proportional to  $p$ .

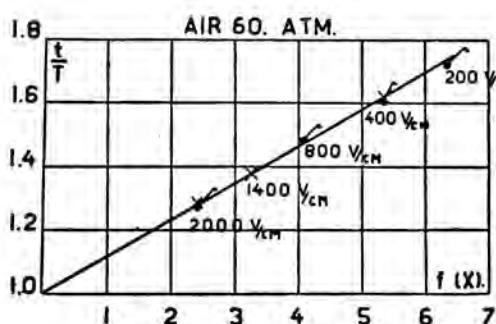


Fig. 5. CLAY and VAN KLEEF.  
Measurements in air at 60 atm. by two different  
gamma radiations at different fields.  
( $I_1 = 7.9 \cdot 10^4 \text{ E.S.U.}$      $I_2 = 5.7 \cdot 10^5 \text{ E.S.U.}$ )

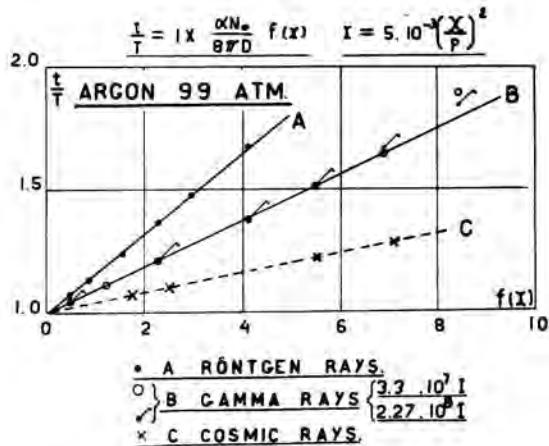


Fig. 6. CLAY and VAN KLEEF.  
Ionization in argon by different radiations.

On measuring the ionization between two parallel walls, from the course of the line indicating the saturation current with the pressure the part of the ionization formed in the gas may be separated from the part originating from the wall. This may be seen in the figures 9, 11 and 12.

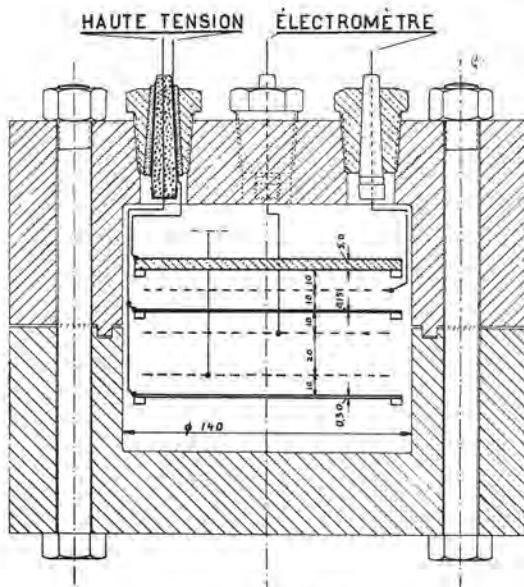


Fig. 7. CLAY.  
Ionization chamber for high pressures with  
different grids.

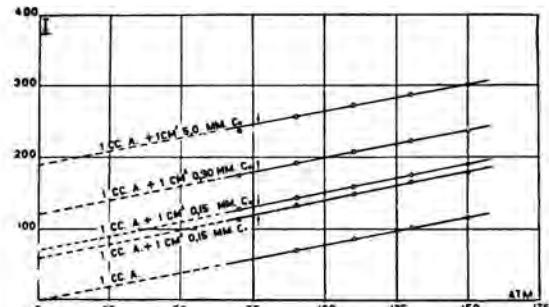


Fig. 8. CLAY and DE BOCK.  
Ionization in argon at high pressures by cosmic  
rays between grids and between copper plates of  
different thickness.

It is also possible to take walls of gauze, so that the wall has only a small share in the process. Then a pure volume ionization is left. This case is realized in the experiment with a steel vessel filled with argon under a high pressure, up to 150 atm. (fig. 7). The ionization, e.g. by cosmic rays and by gamma rays, may be measured between two grids and, if the pressure is sufficiently high, so that the electrons which by the radiation are ejected from the wall have paths not reaching to the network, the ionization between the grids will be purely proportional to the pressure. The experiment carried out first by myself and afterwards together with DE BOCK proves that the obtained current indeed fulfils this supposition (fig. 8). However, between the solid wall and the network the ionization is larger, viz. so much as corresponds to the ionization by the electrons from the wall. It becomes even apparent that for very thin walls this value is proportional to the thickness of the wall, and that the number of electrons in the direction of radiation and opposite to this direction will not be exactly the same. At the same time we see that this number of electrons from the wall and the ionization caused by them, as might be expected, is absolutely independent of the pressure of the gas, as long as the latter is sufficiently high (fig. 9). If it is no longer sufficiently high, the ionization by the

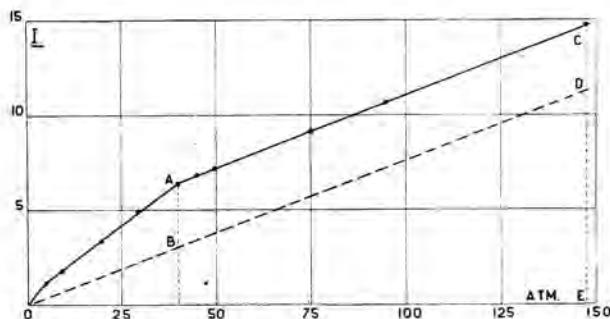


Fig. 9. CLAY, STAMMER and v. TIJN.  
Ionization in air till 150 atm. by gamma rays.

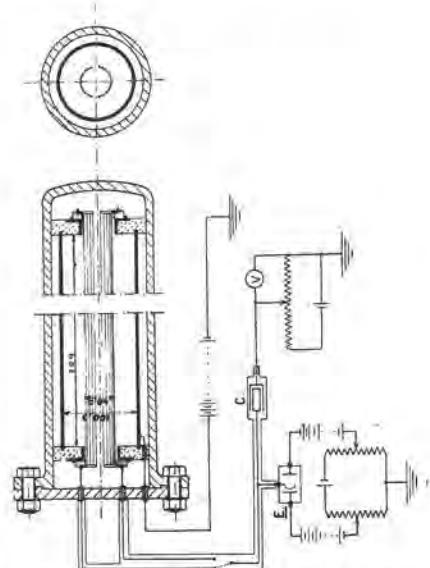


Fig. 10. Ionization chamber for absolute measurements of cosmic rays in different gases at different pressures.

electrons from the wall decreases with the decreasing pressure, as we could demonstrate in the case of the experiment with air in a vessel with two cylindrical walls 3 cm apart (fig. 10) and also for argon (figs. 11 and 12).

Thus the formulas for  $I$  are experimentally verified. Consequently it is always possible to eliminate the effect of the walls either by measuring at

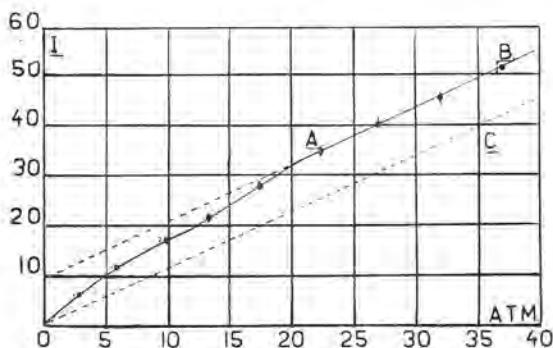


Fig. 11. CLAY and JONGEN.  
Ionization in air of different pressures by cosmic  
rays under 12 cm Fe.

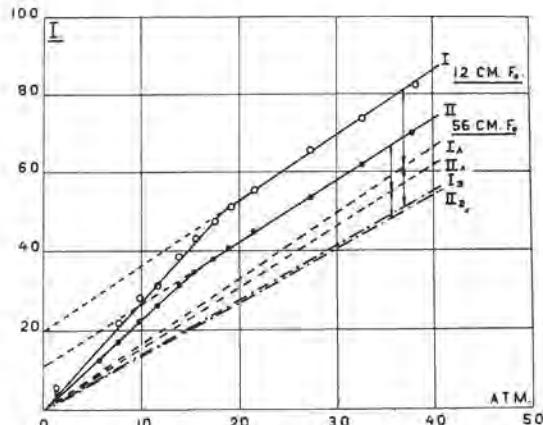


Fig. 12. CLAY and OOSTHUIZEN.  
Ionization in argon of different pressures by cosmic  
gamma rays between two grids (v. fig. 13).

two or more sufficiently high pressure or by making an ionization chamber with electrodes of as little material as possible (figs. 13 and 14) (6).

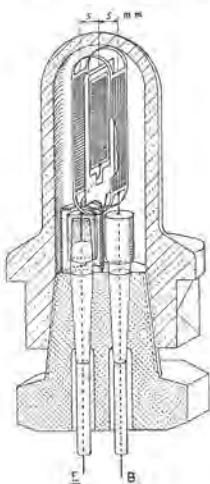


Fig. 13.  
Ionization chamber for  
high pressures and  
high homogeneous  
fields.

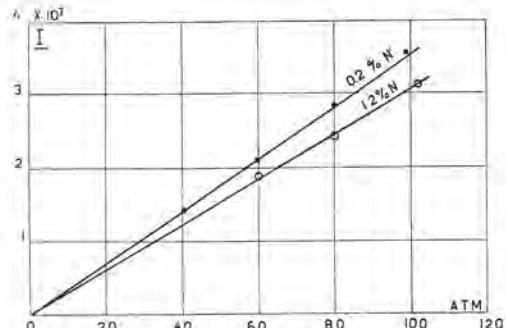


Fig. 14. CLAY and VAN KLEEF.  
Ionization in argon at different pressures by  
gamma rays between two grids (vide fig. 13).

In either case the result is that the total ionization in the gas only is purely proportional to the pressure, also at high pressure, provided the measurements are taken with the saturation current. For this purpose it is

necessary in most cases to measure with two or more different electric fields.

We have now composed a program for the examination of the ionization in gases for gamma rays and cosmic rays in connection with density and atomic number, for we know already that the increase of ionization with these quantities is different for the two kinds of rays.

Owing to the assistance of the Managing Board of the Philips Works, for which we are very thankfull, we could include the noble gases in this program. Now the following phenomenon was observed. During an investigation of neon in a suitable vessel, carried out by VAN KLEEF and myself, it was found that at a tension exceeding 1800 Volts in neon there was an increase in the strength of current which could not be explained. Cf. p. 664 (fig. 2) and fig. 15.

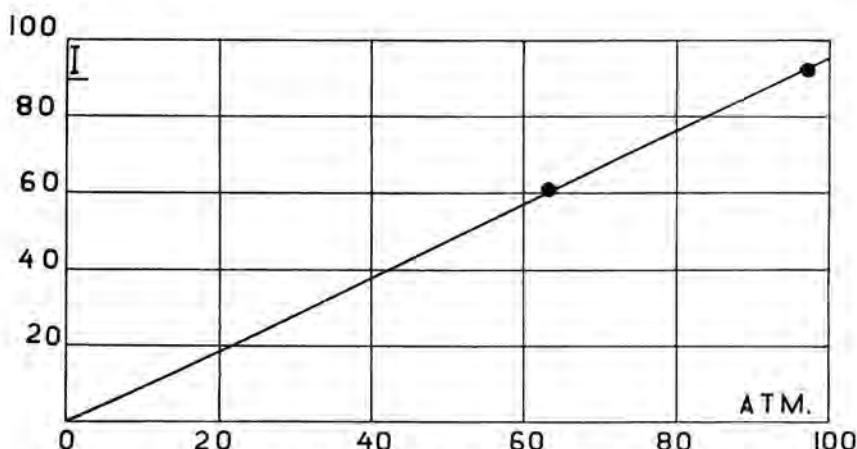


Fig. 15. CLAY and VAN KLEEF.  
Ionization in neon by gamma rays between two grids.

This phenomenon was observed to a much larger extent in xenon (fig. 4) p. 665. It may be seen how in xenon at high voltages the current increases rapidly and the linear relation of  $t$  with  $f(x)$  is broken.

After the external source of ionization had been removed, it appeared that there was still a conductive current and the figure 5, p. 666, shows how strong this is. New measurements are given in fig. 16. We have considered possible causes which probably might give rise to ionization. We think here of other parts between the high tension electrode and the wall, where a stronger field might be formed.

If, however, discharge through the gas might occur there, the ions would come to be situated between the plates, owing to diffusion. In case of discharges at the same field but at a higher pressure, the diffusion of the ions would be much less considerable, so that at a higher pressure the phenomenon would decrease. Beginning at a low pressure, exactly the opposite will be found. At one atmosphere no transfer is observed at all.

Moreover, in the same vessel in which with argon and air not the slightest trace of conduction was observed, conduction by neon and xenon was found, no alterations whatsoever being made to the vessel. Likewise conduction was found in helium (figs. 17 and 18), although previously air

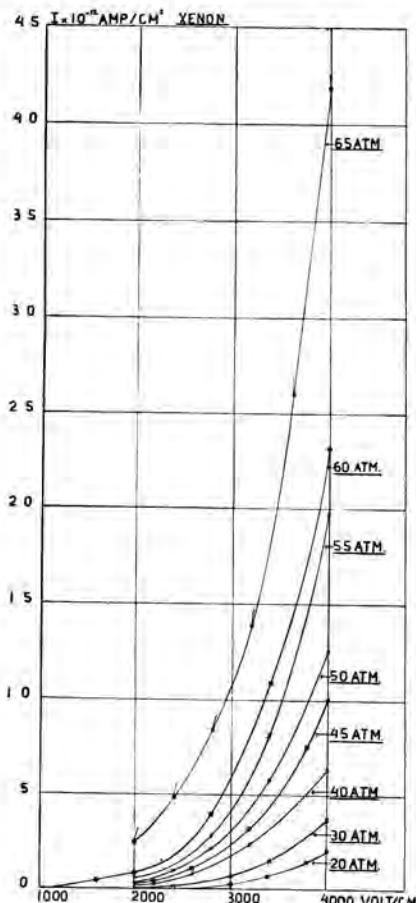


Fig. 16. CLAY and KWIESER.  
Conductivity of xenon at different pressures in different electric fields.

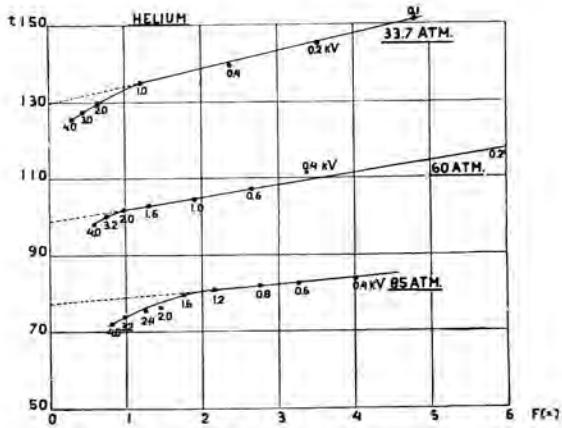


Fig. 17. CLAY and KWIESER.  
Ionization and conductivity of Helium by gamma rays.

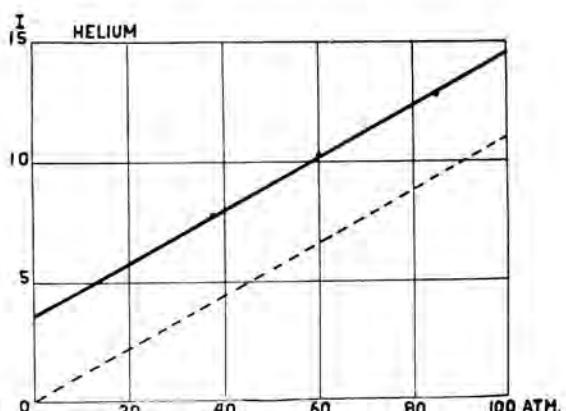


Fig. 18. CLAY and KWIESER.  
Ionization of helium by gamma rays between two plate electrodes.

in the same vessel did not show conduction. The same holds for another vessel filled with krypton. If it was a conduction keeping along the surface of the insulator, it might be expected also at a high pressure that the phenomenon would grow less strong, while it would remain inexplicable why it does not occur at all in argon, whereas it is found in neon and xenon.

The phenomenon was observed by VAN TIJN in nitrogen (fig. 19), viz. with two different constructions, different filling and different external ionization and with a corresponding value. Consequently even if a field would be formed between the high tension electrode and the vessel, TOWNSEND's ionization by collision is out of the question, since the force of the field per mm pressure in the gas then has to be more than 1000 times larger than at the values at which we observed conduction.

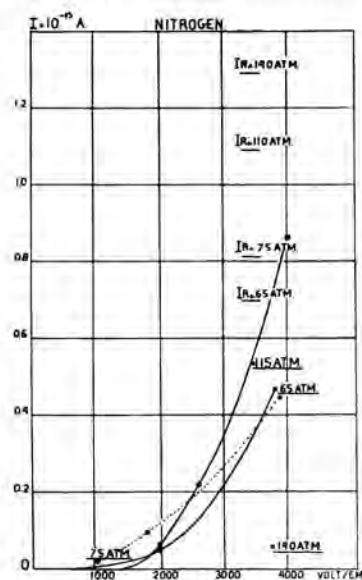


Fig. 19. CLAY and VAN TIJN.  
Ionization of Nitrogen at different  
pressures by gamma rays.

may say that the process of ionization with the pressure for gamma rays is totally different from that for cosmic rays. For gamma rays the ionization increases almost in proportion to the square of the atomic number, whereas for cosmic rays the ionization simply increases in proportion to the density

Gas	Z	A	d/d <sub>Ne</sub>	Z <sup>2</sup> /Z <sup>2</sup> <sub>Ne</sub>	Ioni. / $\gamma$	Ioni. / Cosm. R.
Helium . . .	2	4	0.2	0.04	(0.13)	
Air . . . .	7.5	15	1.5	0.56	0.68	1.50
Neon . . . .	10	20	1.0	1.0	1.0	
Argon . . . .	18	40	2.0	3.2	2.5	2.03
Krypton . . . .	36	83	4.2	12.2	(14)	
Xenon. . . .	54	130	6.5	29	2	

of the gas. The latter proportion was also found by JUILFS and MASUCH (8). For gamma rays JUILFS found a considerably smaller increase than we observed. It is very likely that the wall of JUILFS' vessel played an important part, since he worked at atmospheric pressure.

## REFERENCES.

1. G. JAFFÉ, Ann. der Physik, **42**, 303 (1913).
  2. H. ZANSTRA, Physica, **2**, 817 (1935).
  3. J. CLAY, Physica, **2**, 111 (1935).  
J. CLAY and V. TIJN, Physica, **2**, 825 (1935).  
J. CLAY, STAMMER and V. TIJN, Physica, **4**, 216 (1937).
  4. J. CLAY and H. F. JONGEN, Physica, **4**, 245 (1937).  
J. CLAY and K. OOSTHUIZEN, Physica, **4**, 527 (1937).
  5. J. CLAY, Physica, **4**, 645 (1937).
  6. J. CLAY and G. v. KLEEF, Physica, **4**, 651 (1937).
  7. J. CLAY and G. v. KLEEF, Proc. Royal Acad. Amsterdam, **40**, 663 (1937).
  8. J. JUILFS und V. MASUCH, Z. f. Physik, **140**, 458 (1936).
- 

**Mathematics. — Sur la méthode de WEYL dans la théorie des nombres.**

Par J. G. VAN DER CORPUT. (Troisième communication).

(Communicated at the meeting of November 27, 1937.)

**§ 4. Sommes de WEYL généralisées. de premier degré.**

J'entends par sommes de WEYL généralisées des sommes de la forme

$$S = \sum_{x=P+1}^{P+X} e^{2\pi i f(x)}; S' = \sum_{x=P+1}^{P+X} \cos 2\pi f(x); S'' = \sum_{x=P+1}^{P+X} \sin 2\pi f(x),$$

où  $P$  est un nombre entier,  $X$  un nombre naturel,  $f(x)$  une fonction réelle telle qu'il existe un nombre entier non négatif  $k \leq X-2$ , pour lequel

$$\begin{aligned} \Delta^{k+1} f(x) &= f(x+k+1) - \binom{k+1}{1} f(x+k) + \\ &\quad + \binom{k+1}{2} f(x+k-1) - \dots \pm f(x) \end{aligned}$$

a une valeur proche de zéro lorsque  $x$  prend les valeurs  $P+1, P+2, \dots, P+X-k-1$ ; j'appelle le nombre  $k$  le degré de la somme de WEYL généralisée considérée. La notion „proche de zéro” est vague, ce qui rend vague aussi la notion de somme de WEYL généralisée. Une somme de la forme  $S$ , ou  $S'$ , ou  $S''$ , pourra être appelée somme de WEYL généralisée, ou non, selon que l'on sera plus ou moins strict en ce qui concerne le sens attaché à la notion „proche de zéro”. Le degré d'une somme généralisée n'est pas, non plus, défini avec beaucoup de précision. La question qui se pose est, ici encore, de chercher une borne supérieure pour la valeur absolue des sommes de WEYL généralisées. Si l'on divise l'intervalle  $(P+1, P+X)$  en intervalles partiels assez petits, alors, dans chacun de ceux-ci,  $\Delta^{k+1} f(x)$  est proche de zéro, ce qui revient à dire que la fonction  $f(x)$  est par approximation égale à un polynôme du  $k^e$  degré en  $x$ . Une somme de WEYL généralisée peut donc, si  $k \geq 1$ ,

être décomposée en un certain nombre de sommes partielles, toutes égales par approximation à des sommes de WEYL non généralisées, du même degré. Il est donc possible de tirer de la théorie des sommes de WEYL, des résultats concernant les sommes de WEYL généralisées. C'est ce qui fut fait dans la méthode de PILTZ, qui traite les sommes de WEYL généralisées, du premier degré, par approximation au moyen de sommes de WEYL du même degré, non généralisées. Il y a pourtant avantage, le plus souvent, à traiter les sommes de WEYL généralisées d'une manière directe. C'est ce que je ferai dans ce paragraphe, pour les sommes de WEYL généralisées du premier degré. Les théorèmes de ce paragraphe sont dûs à différents mathématiciens, LANDAU<sup>1)</sup>, VINOGRADOW, VAN DER CORPUT. La démonstration géométrique, très simple, du premier théorème est de KUSMIN<sup>2)</sup>.

*Si n nombres réels  $a_1, \dots, a_n$  et un nombre positif  $\theta \leq \frac{1}{2}$  sont tels que  $n \geq 1$  et que la différence  $a_{v+1} - a_v$  est monotone-croissante et toujours  $\leq \theta$  et  $\leq 1 - \theta$  pour  $v = 1, 2, \dots, n-1$ , alors*

$$\left| \sum_{v=1}^n e^{2\pi i a_v} \right| \leq \cotg \frac{\pi \theta}{2},$$

POPKEN<sup>3)</sup> a encore amélioré ce résultat, dans le cas où existent certaines conditions supplémentaires.

Le théorème est évident quand  $n=1$ , le membre de gauche étant alors  $= 1$ , celui de droite  $\leq \cotg \frac{\pi}{4} = 1$ .

Pour  $n=2$  le membre de gauche est égale à

$$\begin{aligned} |e^{\pi i(a_2-a_1)} + e^{-\pi i(a_2-a_1)}| &= 2 |\cos \pi(a_2-a_1)| \\ &\leq \cos \pi \theta + \cos \pi \theta \leq \cotg \pi \theta + \cosec \pi \theta \\ &= \cotg \frac{\pi \theta}{2}. \end{aligned}$$

Pour la démonstration on peut donc admettre  $n \geq 3$ . Je marque dans le plan complexe les points  $s_0 = 0$  et

$$s_h = \sum_{v=1}^h e^{2\pi i a_v} \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

La distance entre  $s_{h-1}$  et  $s_h$  est égale à 1. Soit  $m_h$  le milieu du segment rectiligne ayant pour extrémités les points  $s_{h-1}$  et  $s_h$ ; soit  $c_h$  le centre de la circonférence passant par les points  $s_{h-1}$ ,  $s_h$  et  $s_{h+1}$ . Si je pose  $\eta_h = 2\pi(a_{h+1} - a_h)$ , la distance de  $m_{h+1}$  à  $c_h$  est  $|\frac{1}{2} \cotg \frac{1}{2} \eta_h|$ , celle de  $m_{h+1}$  à  $c_{h+1}$  est  $|\frac{1}{2} \cotg \frac{1}{2} \eta_{h+1}|$ , et ceci de telle façon que la distance

<sup>1)</sup> E. LANDAU, Ueber einige trigonometrische Summen, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 21—24 (1928).

<sup>2)</sup> R. O. KUSMIN, Ueber einige trigonometrische Ungleichungen, J. Soc. Math. Phys., Leningrad, 1, 233—239 (1927).

<sup>3)</sup> J. POPKEN, Ueber eine trigonometrische Summe, Proc. Royal Acad. Amsterdam, 35, 668—680 (1932).

entre  $c_h$  et  $c_{h+1}$  est égale à  $\frac{1}{2} \cotg \frac{1}{2} \eta_h - \frac{1}{2} \cotg \frac{1}{2} \eta_{h+1}$ . La distance entre  $c_1$  et  $c_{n-1}$  est donc inférieure ou égale à  $\frac{1}{2} (\cotg \frac{1}{2} \eta_1 - \cotg \frac{1}{2} \eta_{n-1})$ . Quant à la distance de  $c_h$  à  $s_{h-1}$  (et donc aussi à  $s_h$ ), elle est égale à  $\frac{1}{2} \cosec \frac{1}{2} \eta_h$ . Celle de  $c_1$  à  $s_0$  est égale à  $\frac{1}{2} \cosec \frac{1}{2} \eta_1$  et celle entre  $c_{n-1}$  et  $s_n$  à  $\frac{1}{2} \cosec \frac{1}{2} \eta_{n-1}$ . De ceci suit que la distance séparant  $s_0$  et  $s_n$  est tout au plus égale à

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\cotg \frac{1}{2} \eta_1 - \cotg \frac{1}{2} \eta_{n-1}) + \frac{1}{2} \cosec \frac{1}{2} \eta_1 + \frac{1}{2} \cosec \frac{1}{2} \eta_{n-1} \\ & = \frac{1}{2} \cotg \frac{1}{2} \eta_1 + \frac{1}{2} \tg \frac{1}{2} \eta_{n-1} \leq \cotg \frac{\pi \theta}{2}. \end{aligned}$$

puisqu'en effet

$$\frac{\pi \theta}{2} \leq \frac{1}{4} \eta_1 \leq \frac{1}{4} \eta_{n-1} \leq \frac{\pi}{2} (1 - \theta).$$

Le théorème est donc démontré.

Nous allons l'employer pour démontrer le théorème suivant, qui est d'importance pour la théorie des sommes de WEYL généralisées.

*Si  $P$  est entier,  $X \geq 3$ ,  $r > 0$  et*

$$\Delta^2 f(x) \leq r \quad (x = P+1, P+2, \dots, P+X-2),$$

*alors*

$$\left| \sum_{x=P+1}^{P+X} e^{2\pi i f(x)} \right| < 3r^{-\frac{1}{2}} (2 + \Delta f(P+X-1) - \Delta f(P+1)).$$

Ce théorème donne une borne supérieure non triviale pour les sommes de WEYL généralisées du premier degré; le membre de droite divisé par  $X$  peut en effet prendre des valeurs très petites. Comme M. H. WESTPHAL m'a communiqué par lettre, l'inégalité reste encore valable, si l'on remplace le coefficient 3 par 2,637.

La démonstration du théorème est très simple. Je pose

$$S = \sum_{x=P+1}^{P+X} e^{2\pi i f(x)} \quad \text{et} \quad \Delta f(X+P-1) - \Delta f(P+1) = \Delta,$$

donc  $\Delta \leq (X-2)r \leq r$ .

Si  $r > \frac{1}{9}$ , j'emploie les inégalités

$$\frac{|S|}{2+\Delta} \leq \frac{X}{2+\Delta} \leq \frac{2+\frac{\Delta}{r}}{2+\Delta},$$

la dernière fraction désignant une fonction monotone de  $\Delta$ , qui prend pour  $\Delta=r$  et pour  $\Delta=\infty$  les valeurs respectives

$$\frac{3}{2+r} < \frac{6}{1+r} \leq \frac{3}{\sqrt{r}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{r} < \frac{3}{\sqrt{r}},$$

de sorte que

$$|S| < \frac{3}{\sqrt{r}} (2 + \Delta).$$

Si  $r \leq \frac{1}{2}$ , je décompose la somme  $S$  en moins de  $2 + \Delta$  sommes partielles

$$\sum_{x=Q+1}^{Q+Y} e^{2\pi i f(x)},$$

un nombre entier  $g$  pouvant être associé à chacune de ces sommes tel que l'inégalité

$$g \leq \Delta f(x) \leq g + 1$$

est valable pour  $x = Q + 1, Q + 2, \dots, Q + Y - 1$ ; la dernière somme partielle contient le dernier terme  $e^{2\pi i f(p+x)}$ . Je considère d'abord les valeurs entières de  $x$  telles que

$$Q + 1 \leq x \leq Q + Y - 1 \quad \text{et} \quad \Delta f(x) \leq g + \sqrt{\frac{r}{\pi}}.$$

Il est certain, à cause des inégalités

$$\Delta f(Q + 1) \leq g \quad \text{et} \quad \Delta^2 f(x) \leq r,$$

que le nombre de ces valeurs de  $x$  est tout au plus  $1 + \frac{1}{\sqrt{\pi r}}$  et que la contribution qu'elles apportent à la somme partielle considérée est donc aussi tout au plus  $1 + \frac{1}{\sqrt{\pi r}}$ . On trouve, de la même manière, le résultat

analogue pour les valeurs entières de  $x$  telles que  $\Delta f(x) \geq g + 1 - \sqrt{\frac{r}{\pi}}$ .

Les valeurs de  $x$  non encore considérées sont telles que

$$g + \sqrt{\frac{r}{\pi}} \leq \Delta f(x) \leq g + 1 - \sqrt{\frac{r}{\pi}},$$

donc que

$$\sqrt{\frac{r}{\pi}} \leq \Delta \psi(x) \leq 1 - \sqrt{\frac{r}{\pi}}, \quad \text{où} \quad \psi(x) = f(x) - g x.$$

La contribution de ces  $x$  à la somme partielle est, en vertu du théorème précédent, en valeur absolue,  $\leq \cotg \frac{1}{2} \sqrt{\pi r} < \frac{2}{\sqrt{\pi r}}$ . Par conséquent la somme partielle est en valeur absolue inférieure à

$$2 + \frac{4}{\sqrt{\pi r}} < \frac{2}{3\sqrt{r}} + \frac{7}{3\sqrt{r}} = \frac{3}{\sqrt{r}}.$$

Le théorème est donc démontré.

§ 5. Sommes de WEYL généralisées, de degré  $\geq 1$ .

Je ferai d'abord deux remarques.

1. Si  $M, N, Z, \alpha$  et  $\beta$  sont positifs, il existe un nombre positif  $U \leq Z$  tel que

$$\text{Max}(U^{-\alpha}, MU^{-\beta}, NU^{\beta}) \leq \text{Max}\left(Z^{-\alpha}, MZ^{-\beta}, M^{\frac{1}{2}}N^{\frac{1}{2}}, N^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right).$$

Si la plus petite valeur du membre de gauche dans l'intervalle  $0 < U \leq Z$  est atteinte au point  $U = Z$ , alors cette valeur minimum est égale à  $U^{-\alpha}$  ou  $MU^{-\beta}$ , car sinon elle pourrait être rendue plus petite encore en diminuant  $U$ ; dans ce cas, le membre de gauche de l'inégalité à démontrer est égal à  $\text{Max}(Z^{-\alpha}, MZ^{-\beta})$ . Si la plus petite valeur du membre de gauche dans l'intervalle  $0 < U \leq Z$  est atteinte en un point  $U < Z$ , alors cette valeur minimum est égale à  $U^{-\alpha} = NU^{\beta}$  ou à  $MU^{-\beta} = NU^{\beta}$ , car sinon, elle pourrait être rendue plus petite encore, en modifiant un peu la valeur de  $U$ . Si le membre de gauche est égal à  $U^{-\alpha} = NU^{\beta}$ , il est égal à  $N^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$ ; sinon, il vaut  $MU^{-\beta} = NU^{\beta} = M^{\frac{1}{2}}N^{\frac{1}{2}}$ . La remarque est donc démontrée.

2. Si  $l$  est un nombre naturel, si  $U$  et  $Y$  sont positifs et tels que  $1 \leq U \leq Y^l$ , alors il est possible de trouver  $l$  nombres positifs  $u_1, u_2, \dots, u_l$ , tels que le produit de ces nombres soit égal à  $U$  et que

$$\text{Min}\left(U^{\frac{2^\lambda}{2^{l+1}-2}}, Y^{\frac{1}{2^{l-\lambda}}}\right) \leq u_\lambda \leq Y \quad (\lambda = 1, 2, \dots, l).$$

Deux cas sont à considérer:

a. Soit

$$U^{2^l} \leq Y^{2^{l+1}-2}.$$

Je pose

$$u_\lambda = U^{\frac{2^\lambda}{2^{l+1}-2}}, \text{ donc } \leq U^{\frac{2^\lambda}{2^{l+1}-2}} \leq Y \quad (\lambda = 1, 2, \dots, l).$$

Le produit  $u_1 u_2 \dots u_l$  est égal à  $U$  en vertu de ce que

$$\sum_{\lambda=1}^l 2^\lambda = 2^{l+1} - 2.$$

b. Soit

$$U^{2^l} > Y^{2^{l+1}-2}.$$

J'appelle  $A$  le plus petit nombre entier  $\geq 0$  tel que

$$U^{2^{A+1}} > Y^{(l-A+1)2^{A+1}-2} \dots \dots \dots \quad (8)$$

Cette inégalité est vérifiée si l'on remplace  $A$  par  $l-1$ , mais pas si l'on remplace  $A$  par zéro, car  $U^2 \leq Y^{2l}$ . Donc  $1 \leq A \leq l-1$  et

$$U^{2A} \leq Y^{(l-A+2)2^A-2}, \dots, \dots, \dots, \dots. \quad (9)$$

Si je pose

$$u_\lambda = (UY^{A-\lambda})^{\frac{2^\lambda}{2^{A+1}-2}} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, A); \quad u_\lambda = Y (\lambda = A+1, \dots, l),$$

j'obtiens

$$u_1 u_2 \dots u_l = (u_1 \dots u_A) (u_{A+1} \dots u_l) = U Y^{A-l}, \quad Y^{l-A} = U.$$

En vertu de (8),

$$UY^{A-l} \leq Y^{l-2^{-A}} \leq 1,$$

de telle sorte que pour  $\lambda = 1, 2, \dots, A$ , d'une part, en vertu de (9)

$$u_\lambda \leq (UY^{A-\lambda})^{\frac{2^\lambda}{2^{A+1}-2}} \leq Y,$$

d'autre part

$$u_\lambda \geq Y^{\frac{2^\lambda}{2^{A+1}}} \geq Y^{\frac{1}{2^{l-\lambda}}}.$$

Enfin, pour  $\lambda = A+1, \dots, l$ ,

$$u_\lambda = Y \geq Y^{\frac{1}{2^{l-\lambda}}}.$$

La seconde remarque est donc démontrée.

Après ces remarques préliminaires, énonçons le théorème suivant:

*Si  $P$  est entier,  $k$  entier  $\geq 2$ ,  $X$  entier  $> k$ ,  $\alpha = 2^k$ ,  $r > 0$  et*

$$\Delta^k f(x) \leq r \quad (x = P+1, P+2, \dots, P+X-k),$$

*alors, si*

$$\varrho = \frac{\Delta^{k-1} f(P+X-k+1) - \Delta^{k-1} f(P+1)}{X-k},$$

*on a*

$$\left| \sum_{x=P+1}^{P+X} e^{2\pi i f(x)} \right| < 25 X \operatorname{Max} \left\{ (\varrho^{-2} r)^{-\frac{1}{k-2}}, (r X^k)^{-\frac{2}{k}}, (\varrho^{-1} r X)^{-\frac{2}{k}} \right\}.$$

Ce théorème a été publié en 1929, mais la démonstration donnée ici est beaucoup plus simple que la première<sup>1)</sup>. En 1931, M. TITCHMARSH<sup>2)</sup> a démontré, d'une manière simple, un théorème analogue, donnant, dans certains cas la même approximation, dans d'autres une moins bonne. Je reviendrai sur ce résultat de M. TITCHMARSH à la fin de ce paragraphe. La signification du théorème a été sensiblement diminuée par les recherches de M. VINOGRADOW<sup>3)</sup>, qui a trouvé pour de grandes valeurs de  $k$  un résultat beaucoup plus serré, mais le théorème est encore important dans plusieurs domaines de la théorie analytique des nombres.

Il est vrai que la démonstration de 1929 fournit le théorème avec un autre coefficient au lieu de 25, mais comme on l'aura déjà remarqué, je n'attache pas beaucoup importance à ce que les facteurs constants entrant dans nos théorèmes puissent être rendus plus petits.

Pour démontrer le théorème, nous remarquons d'abord que pour  $k=2$ , il suit immédiatement du paragraphe précédent, qui nous apprend que le membre de gauche est inférieur à

$$9 \operatorname{Max}\left(r^{-\frac{1}{2}}, X \varrho r^{-\frac{1}{2}}\right) = 9 X \operatorname{Max}\left((r X^2)^{-\frac{2}{3}}, (\varrho^{-2} r)^{-\frac{1}{4-2}}\right).$$

Je peux donc supposer  $k \geq 3$ . En vertu de l'inégalité fondamentale généralisée à une fonction d'une seule variable, appliquée avec  $l=k-2$ , pour tout système de nombres naturels  $A_1, \dots, A_l$  tels que  $A_1 + \dots + A_l \leq X$ ,

$$X^{-1} \left| \sum_{x=p+1}^{p+X} e^{2\pi i f(x)} \right| < 5 \operatorname{Max}\left\{ A_1^{-\frac{1}{2}}, \dots, A_l^{-\frac{1}{2^l}}, T^{\frac{1}{2^l}} \right\},$$

où

$$T = X^{-1} A_1^{-1} \dots A_l^{-1} \sum_{a_1=1}^{A_1-1} \dots \sum_{a_l=1}^{A_l-1} \left| \sum_{x=p+1}^{p+X-a_1-\dots-a_l} e^{2\pi i f_{(a)}(x)} \right|,$$

Dans cette formule on a

$$\Delta^2 f_{(a)}(x) = \sum_{\alpha_1=0}^{a_1-1} \dots \sum_{\alpha_l=0}^{a_l-1} \Delta^k f(x + a_1 + \dots + a_l) \equiv a_1 a_2 \dots a_l r$$

<sup>1)</sup> J. G. VAN DER CORPUT, Neue zahlentheoretische Abschätzungen II, Mathematische Zeitschrift, 29, 397–426 (1929).

<sup>2)</sup> E. C. TITCHMARSH, On VAN DER CORPUT's method and the zeta-function of RIEMANN, Quart. J. Math. Oxford Ser., 2, 161–173; 313–320 (1931); 3, 133–141 (1932); 5, 98–105 (1934); 6, 106–112 (1935).

<sup>3)</sup> Voir les articles de M. VINOGRADOW depuis juillet 1935.

et

$$\begin{aligned} & \Delta f_{(a)}(P+X-a_1-\dots-a_l-1) - \Delta f_{(a)}(P+1) \\ &= \sum_{a_1=0}^{a_1-1} \dots \sum_{a_l=0}^{a_l-1} \{ \Delta^{k-1} f(P+X-a_1-\dots-a_l-1+a_1+\dots+a_l) - \\ &\quad - \Delta^{k-1} f(P+1+a_1+\dots+a_l) \} \\ &\leq \sum_{a_1=0}^{a_1-1} \dots \sum_{a_l=0}^{a_l-1} \{ \Delta^{k-1} f(P+X-k+1) - \Delta^{k-1} f(P+1) \} \end{aligned}$$

(en vertu de ce que  $\Delta^k f(x) > 0$ )

$$< a_1 a_2 \dots a_l \varrho X.$$

Le paragraphe précédent nous apprend donc que

$$\left| \sum_{x=P+1}^{P+X-a_1-\dots-a_l} e^{2\pi i f_{(a)}(x)} \right| < \frac{3}{\sqrt{\tau}} \left( \sqrt{\frac{2}{a_1 a_2 \dots a_l}} + \varrho X \sqrt{a_1 a_2 \dots a_l} \right),$$

de telle sorte que de

$$\sum_{a=1}^{A-1} \frac{1}{\sqrt{a}} \leq \int_0^{A-1} \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{A-1} < \frac{2A}{\sqrt{A+1}}$$

et de

$$\sum_{a=1}^{A-1} \sqrt{a} < A^{\frac{3}{2}}$$

suit

$$\begin{aligned} T &< \frac{3}{\sqrt{\tau}} \left( \sqrt{\frac{2^{l+1} X^{-1}}{(A_1+1) \dots (A_l+1)}} + \varrho \sqrt{A_1 \dots A_l} \right) \\ &< \frac{6}{\sqrt{\tau}} \operatorname{Max} \left( \sqrt{\frac{2^{l+1} X^{-1}}{(A_1+1) \dots (A_l+1)}}, \varrho \sqrt{A_1 \dots A_l} \right). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} X^{-1} \left| \sum_{x=P+1}^{P+X} e^{2\pi i f(x)} \right| &< \\ 5\sqrt{2} \operatorname{Max} \left\{ (A_1+1)^{-\frac{1}{2}}, \dots, (A_l+1)^{-\frac{1}{2}}, M((A_1+1) \dots (A_l+1))^{-\frac{2}{x}}, N(A_1 \dots A_l)^{\frac{2}{x}} \right\}, \end{aligned}$$

où

$$M\sqrt{2} = (6^2 2^{2l+2} X^{-2} \tau^{-1})^{\frac{2}{x}} \text{ et } N\sqrt{2} = (6^2 \varrho^2 \tau^{-1})^{\frac{2}{x}};$$

l'inégalité vaut pour tout système de nombres naturels  $A_1, \dots, A_l$  tels que  $A_1 + \dots + A_l \leq X$ .

Je dis que pour tout système de nombres positifs  $u_1, \dots, u_l$  tels que  $u_1 + \dots + u_l \leq X$ ,

$$X^{-1} \left| \sum_{x=p+1}^{p+X} e^{2\pi i f(x)} \right| < 5\sqrt{2} \operatorname{Max} \left( u_1^{-\frac{1}{2}}, \dots, u_l^{-\frac{1}{2}}, M(u_1 \dots u_l)^{-\frac{2}{x}}, N(u_1 \dots u_l)^{\frac{2}{x}} \right).$$

Si un au moins des nombres  $u_1, \dots, u_l$  est  $\geq 1$ , alors, le membre de droite est  $\geq 5\sqrt{2}$  et l'inégalité est évidente; si tous les nombres  $u_1, \dots, u_l$  sont supérieurs à 1, alors l'inégalité considérée suit immédiatement de la précédente en choisissant pour valeur de  $A_\lambda$  le plus grand nombre entier  $\leq u_\lambda$  ( $\lambda = 1, 2, \dots, l$ ).

Posons  $u_1 u_2 \dots u_l = U$  et choisissons  $U$  tel que  $1 \leq U \leq \left(\frac{X}{l}\right)^l$ . En vertu de la seconde remarque, nous pouvons choisir, si  $U$  est donné, les nombres  $u_1, \dots, u_l$ , de telle façon que pour  $\lambda = 1, 2, \dots, l$

$$\operatorname{Min} \left( U^{\frac{2^\lambda}{2^l+1-2}}, \left(\frac{X}{l}\right)^{\frac{1}{2^l-\lambda}} \right) \leq u_\lambda \leq \frac{X}{l},$$

d'où il suit aussi que  $u_1 + u_2 + \dots + u_l \leq X$ . Nous obtenons ainsi l'inégalité

$$u_\lambda^{-\frac{1}{2^\lambda}} \leq \operatorname{Max} \left( U^{-\frac{2}{x-4}}, \left(\frac{X}{l}\right)^{-\frac{4}{x}} \right).$$

Donc

$$X^{-1} \left| \sum_{x=p+1}^{p+X} e^{2\pi i f(x)} \right| < 5\sqrt{2} \operatorname{Max} \left( \left(\frac{X}{l}\right)^{-\frac{4}{x}}, U^{-\frac{2}{x-4}}, MU^{-\frac{2}{x}}, NU^{\frac{2}{x}} \right),$$

cette inégalité valant pour tout nombre  $U$  tel que  $1 \leq U \leq \left(\frac{X}{l}\right)^l$ . Mais cette inégalité est évidente si  $0 < U < 1$ ; elle est donc valable, quelque soit le nombre positif  $U \leq \left(\frac{X}{l}\right)^l$ .

La première remarque de ce paragraphe nous apprend alors que nous pouvons choisir le nombre positif  $U \leq \left(\frac{X}{l}\right)^l$  de telle façon que

$$X^{-1} \left| \sum_{x=p+1}^{p+X} e^{2\pi i f(x)} \right| < 5\sqrt{2} \operatorname{Max} \left\{ \left(\frac{X}{l}\right)^{-\frac{4}{x}}, \left(\frac{X}{l}\right)^{-\frac{2l}{x-4}}, M \left(\frac{X}{l}\right)^{-\frac{2l}{x}}, M^{\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{2}}, N^{\frac{x}{2x-4}} \right\}.$$

De la définition des nombres  $r$  et  $\varrho$  il suit que  $\varrho$  est  $\equiv r$ . On a

$$5\sqrt{2}\left(\frac{X}{l}\right)^{-\frac{2l}{z-4}} \leq 5\sqrt{2}\left(\frac{X}{l}\right)^{-\frac{4}{z}} \leq 5\sqrt{2}\left(\frac{X}{l}\right)^{-\frac{2}{z}} < 25X^{-\frac{2}{z}} \leq 25(\varrho^{-1}rX)^{-\frac{2}{z}},$$

$$5\sqrt{2}M\left(\frac{X}{l}\right)^{-\frac{2l}{z}} = 5(6^2 2^{2l+2} l!)^{\frac{2}{z}} (X^{-k} r^{-1})^{\frac{2}{z}} < 25(X^k r^k)^{-\frac{2}{z}},$$

$$5\sqrt{2}M^{\frac{1}{2}}N^{\frac{1}{2}} = 5(6^4 2^{2l+2})^{\frac{1}{z}} (X^{-2} r^{-2} \varrho^2)^{\frac{1}{z}} < 25(\varrho^{-2} r X)^{-\frac{2}{z}}$$

et finalement

$$5\sqrt{2}N^{\frac{1}{z-4}} < 5\sqrt{2} \cdot 6^{2z-4} (\varrho^2 r^{-1})^{\frac{2}{z-4}} < 25(\varrho^{-2} r)^{-\frac{1}{z-2}},$$

ce qui achève de démontrer l'inégalité annoncée.

Je reviens maintenant au théorème de TITCHMARSH, dont j'ai déjà parlé plus haut. M. TITCHMARSH démontre, sous les conditions déjà citées (le fait qu'il travaille avec les dérivées plutôt qu'avec les fonctions-differences n'a pas grande importance), qu'il existe deux nombres  $c_{14}$  et  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ), dépendant uniquement de  $k$ , tels que

$$\left| \sum_{x=p+1}^{p+X} e^{2\pi i f(x)} \right| < c_{14} X \operatorname{Max} \left\{ (\varrho^{-2} r)^{-\frac{1}{z-2}}, X^{-\frac{4}{z}} \varrho^\alpha r^{-\alpha - \frac{1}{z-2}} \right\}.$$

Il ajoute: "We do not give the actuel value of  $\alpha$  because it cannot be expressed in a very simple form, and because, in the applications,  $\varrho = O(r)$  and the terms involving  $a$  cancel". Il veut dire par là que si  $\varrho \equiv p r$ , il suit de l'inégalité écrite plus haut, que

$$\left| \sum_{x=p+1}^{p+X} e^{2\pi i f(x)} \right| < c_{15} X \operatorname{Max} \left( r^{\frac{1}{z-2}}, X^{-\frac{4}{z}} r^{-\frac{1}{z-2}} \right), \quad . . . \quad (10)$$

où  $c_{15}$  désigne un nombre dépendant uniquement de  $k$  et de  $p$ .

Le théorème démontré dans ce paragraphe donne, sous la condition supplémentaire  $\varrho \equiv p r$

$$\left| \sum_{x=p+1}^{p+X} e^{2\pi i f(x)} \right| < c_{16} X \operatorname{Max} \left( r^{\frac{1}{z-2}}, (r X^k)^{-\frac{2}{z}}, X^{-\frac{2}{z}} \right), \quad . . . \quad (11)$$

où  $c_{16}$  dépend seulement de  $p$ .

Je vais démontrer maintenant que cette dernière inégalité contient le résultat donné par M. TITCHMARSH.

De

$$\left\{ r^{\frac{1}{z-2}}, X^{-\frac{4}{z}} r^{-\frac{1}{z-2}} \right\}^{\frac{1}{2}} = X^{-\frac{2}{z}},$$

suit que

$$\operatorname{Max} \left\{ r^{\frac{1}{z-2}}, X^{-\frac{4}{z}} r^{-\frac{1}{z-2}} \right\} \geq X^{-\frac{2}{z}} \quad . . . \quad (12)$$

De plus

$$\left\{ r^{\frac{kx-4z+8}{x-2}} \left( X^{-\frac{4}{x}} r^{-\frac{1}{x-2}} \right)^{kz} \right\}_{(kx-4z+8)+kz} = (rX^k)^{-\frac{4}{2kx-4z+8}} . \quad (13)$$

Si l'inégalité (10) trouvée par M. TITCHMARSH n'est pas triviale,  $r^{\frac{1}{x-2}}$  et  $X^{-\frac{4}{x}} r^{-\frac{1}{x-2}}$  ont des valeurs  $< 1$ , de telle sorte que de (13) suit qui  $rX^k > 1$ , et que le membre de droite de (13) est certainement supérieur à  $(rX^k)^{-\frac{2}{x}}$ . La formule (13) donne donc

$$\begin{aligned} \text{Max} \left\{ \frac{1}{r^{x-2}}, X^{-\frac{4}{x}} r^{-\frac{1}{x-2}} \right\} &\equiv (rX^k)^{-\frac{4}{2kx-4z+8}} \\ &> (rX^k)^{-\frac{2}{x}} . \end{aligned} \quad (14)$$

Les formules (12) et (14) nous apprennent que l'inégalité (11), démontrée dans ce paragraphe, contient la formule (10) de M. TITCHMARSH. La formule de TITCHMARSH ne peut donc jamais donner de résultats meilleurs que ceux que nous avons trouvés. Les deux formules considérées donnent la même approximation dans les problèmes où le terme  $r^{\frac{1}{x-2}}$  l'emporte, mais il y a des problèmes où notre formule donne un résultat meilleur que celui donné par M. TITCHMARSH. Aussi n'est-il pas possible alors de déduire directement la formule (11) de la formule (10).

**Mathematics.** — *Sur deux, trois ou quatre nombres premiers.* Par J. G. VAN DER CORPUT. (Première communication.)

(Communicated at the meeting of November 27, 1937.)

Considérons les huit expressions

$$\begin{aligned} f_1 &= p_1 + p_2; \quad f_2 = p_1 + p_2^2 + p_3^2; \quad f_3 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2; \quad f_4 = p_1 - p_2; \\ f_5 &= p_1 - p_2^2 - p_3^2; \quad f_6 = p_1 + p_2^2 - p_3^2; \quad f_7 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - p_4^2; \quad f_8 = p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 - p_4^2, \end{aligned}$$

où  $p_1, p_2, p_3$  et  $p_4$  désignent des nombres premiers  $> 3$ . À chacune de ces expressions correspond une congruence, que j'appellerai la congruence correspondante, notamment

$t \equiv 0 \pmod{2}$	pour $f_1$ et $f_4$ :
$\equiv 1$ ou $3 \pmod{6}$	pour $f_2$ :
$\equiv 4 \pmod{24}$	pour $f_3$ :
$\equiv 3$ ou $5 \pmod{6}$	pour $f_5$ :
$\equiv 1$ ou $5 \pmod{6}$	pour $f_6$ :
$\equiv 2 \pmod{24}$	pour $f_7$ :
$\equiv 0 \pmod{24}$	pour $f_8$ .

En effet, tout nombre  $t$  qui peut être mis sous la forme  $f_i$ , satisfait à la congruence correspondante.

Chacune des expressions  $f_1, f_2$  et  $f_3$  possède, comme je démontrerai, la propriété suivante: presque tout nombre naturel qui satisfait à la congruence correspondante, peut être mis sous la forme  $f_i$ , c'est-à-dire:  $\varepsilon$  désignant un nombre positif quelconque et  $Z$  un nombre suffisamment grand, le nombre des exceptions  $\leq Z$  est inférieur à  $\varepsilon Z$ .

Chacune des cinq expressions  $f_4, \dots, f_8$  possède la propriété suivante: presque tout nombre qui satisfait à la congruence correspondante, peut être mis sous la forme  $f_i$ , c'est-à-dire:  $\varepsilon$  étant positif et  $Z$  suffisamment grand, le nombre des exceptions qui sont en valeur absolue  $\leq Z$ , est inférieur à  $\varepsilon Z$ .

Je démontrerai même qu'à tout nombre naturel  $m$  correspond une constante  $c_1$ , dépendant uniquement de  $m$ , telle que chacune des expressions  $f_1, f_2$  et  $f_3$  possède la propriété suivante: pour tout nombre  $Z > 3$  le nombre des nombres naturels  $\leq Z$  qui satisfont à la congruence correspondante et qui ne peuvent pas être mis sous la forme  $f_i$ , est inférieur à  $c_1 Z z^{-m}$ ; partout dans cet article  $z = \log Z$ . A tout nombre naturel  $m$  correspond une constante  $c_2$ , dépendant uniquement de  $m$ , telle que chacune des expressions  $f_4, f_5, f_6, f_7$  et  $f_8$  possède la propriété suivante: pour tout nombre  $Z > 3$  le nombre des nombres entiers qui sont en valeur absolue  $\leq Z$ , qui remplissent la congruence correspondante et qui ne peuvent pas être mis sous la forme  $f_i$ , est inférieur à  $c_2 Z z^{-m}$ .

Le but principal de cet article est de démontrer le théorème qui suit:

**Proposition 1:** Soit  $\gamma > 0$ ;  $m$  entier  $> 0$ ; soit  $\psi(x)$  un polynôme du degré précis  $g \geq 1$ , qui prend des valeurs entières pour toute valeur entière de  $x$ ; soit  $Z > 3$  et  $s$  entier, tels que  $|s| \leq \gamma Z^g z^\gamma$ .

Sous ces conditions il existe une constante  $c_3$ , dépendant uniquement de  $\gamma, m$  et du choix du polynôme  $\psi(x)$ , telle que les expressions  $f_1, f_2$  et  $f_3$  jouissent de la propriété suivante: Si  $\psi(x) + s$  est positif pour tout nombre naturel  $x \leq Z$ , et si  $\psi(x) + s$  remplit la congruence correspondante pour toute valeur entière de  $x$ , alors le nombre des nombres naturels  $z \leq Z$  pour lesquels  $\psi(x) + s$  ne peut pas être mis sous la forme  $f_i$ , est inférieur à  $c_3 Z z^{-m}$ .

En outre sous les conditions de la proposition il existe une constante  $c_4$ , dépendant uniquement de  $\gamma, m$  et du choix du polynôme  $\psi(x)$ , telle que les expressions  $f_4, f_5, f_6, f_7$  et  $f_8$  jouissent de la propriété suivante: Si  $\psi(x) + s$  remplit la congruence correspondante pour toute valeur entière de  $x$ , alors le nombre des nombres entiers qui sont en valeur absolue  $\leq Z$  et pour lesquels  $\psi(x) + s$  ne peut pas être mis sous la forme  $f_i$ , est inférieur à  $c_4 Z z^{-m}$ .

Cette proposition contient la suivante, dans laquelle  $\Psi(x)$  désigne un polynôme non-constant du degré  $g$  à coefficients rationnels, et  $u$  un nombre entier qui est premier avec  $g!$  et avec  $24U$ , où  $U$  est un nombre naturel donné.

Chacune des expressions  $f_4, \dots, f_8$  et en outre, si le terme du degré le plus élevé dans  $\Psi(x)$  a un coefficient négatif, chacune des expressions  $f_1, f_2$  et  $f_3$ , possède la propriété suivante: tout nombre  $s$ , tel que  $s - \Psi(u)$  satisfait à la congruence correspondante, peut être mis, même d'une infinité de manières différentes, sous la forme  $f_i + \Psi(p_5)$ , où  $p_5$  désigne un nombre premier  $> 3$ , qui est congru à  $u$  pour le module  $U$ .

Si le terme du degré le plus élevé dans  $\Psi(x)$  a un coefficient positif, chacune des expressions  $f_1, f_2$  et  $f_3$  possède la propriété suivante: tout nombre naturel  $s$ , suffisamment grand, tel que  $s - \Psi(u)$  satisfait à la congruence correspondante, peut être mis sous la forme  $f_i + \Psi(p_5)$ , où le nombre premier  $p_5 > 3$  est congru à  $u$  pour le module  $U$ .

En effet, soit  $V$  le plus petit commun multiple de  $U$  et  $g! 24$ . Le nombre  $u$  étant premier avec  $24U$  et  $g!$ , est premier avec  $V$ . Puisque  $V$  est divisible par  $g! 24$ , le nombre

$$s - \Psi(u + xV) \equiv s - \Psi(u) \quad (\text{mod. } 24)$$

remplit pour tout nombre entier  $x$  la congruence correspondante.

Considérons d'abord les expressions  $f_4, \dots, f_8$  et posons

$$\psi(x) = \Psi(u + xV).$$

Le nombre des nombres naturels  $x \leq Z$  tels que  $u + xV$  est un nombre premier  $p_5 > 3$ , a l'ordre de grandeur  $\frac{Z}{z}$ . La première proposition nous apprend donc, que le nombre des nombres naturels  $x \leq Z$  tels que  $u + xV$  est un nombre premier  $p_5 > 3$  et que  $s + \psi(x)$  peut être mis sous la forme  $f_i$ , croît indéfiniment avec  $Z$ , et chacun de ces  $x$  nous fournit une représentation  $s = f_i + \Psi(p_5)$ , où  $p_5 - u$  est divisible par  $V$ , donc par  $U$ .

Traitons ensuite les expressions  $f_1, f_2$  et  $f_3$ , en supposant d'abord que le terme du degré le plus élevé dans  $\Psi(x)$  ait un coefficient négatif. Nous pouvons trouver un nombre entier  $x_0$  tel que  $s - \Psi(u + x_0V + xV)$  soit positif pour tout nombre naturel  $x$ . En posant  $\psi(x) = -\Psi(u + x_0V + xV)$ , nous trouvons de la même manière que le nombre des nombres naturels  $x \leq Z$  tels que  $u + x_0V + xV$  soit un nombre premiers  $p_5 > 3$  et que  $s + \psi(x)$  peut être mis sous la forme  $f_i$ , croît avec  $Z$  au delà de toute limite.

Traitons finalement les expressions  $f_1, f_2$  et  $f_3$  en supposant que le terme du degré le plus élevé dans  $\Psi(x)$  soit positif. Posons  $\psi(x)$  égal à  $-\Psi(u + xV)$ , et  $Z$  égal au plus petit nombre entier  $\geq 0$ , tel que  $s + \psi(x)$  soit positif pour tout nombre naturel  $x \leq Z$ ; par conséquent  $Z$  dépend de  $s$  et croît indéfiniment avec  $s$ . Le nombre des nombres naturels  $x \leq Z$  tels que  $u + xV$  soit un nombre premier  $p_5 > 3$ , a l'ordre de grandeur  $\frac{Z}{z}$ . Par conséquent, lorsque  $s$  est suffisamment grand, parmi ces nombres  $x$  figure

au moins un pour lequel  $s + \psi(x)$  peut être mis sous la forme  $f_\lambda$ , de telle sorte que  $s = f_\lambda + \Psi(p_5)$ .

Il est superflu de faire remarquer que la dernière proposition contient comme cas spéciaux les résultats dûs à M. I. M. VINOGRADOFF<sup>1)</sup>, que tout nombre impair suffisamment grand, est la somme de trois nombres premiers, et que tout nombre suffisamment grand, qui est congru à 5 pour le module 24, est la somme des carrés de cinq nombres premiers.

Dans la dernière de ces communications je déduirai une formule approximative, valable pour presque tout entier  $t$ , indiquant de combien de manières différentes  $t$  peut être mis sous chacune des formes  $f_\lambda$ , les nombres premiers  $p_1, p_2, \dots$  étant situés dans des intervalles donnés.

Je ferai usage de deux propositions auxiliaires, dont les démonstrations paraîtront bientôt, respectivement dans les Acta Arithmetica<sup>2)</sup> (Sur le théorème de GOLDBACH pour presque tous les nombres pairs) et les Mathematische Annalen (Ueber Summen von Primzahlen).

**Lemme 1:** Je considère une suite de nombres positifs

$$(\gamma) \dots, \gamma_1, \gamma_2, \dots$$

et une suite de nombres naturels

$$(\eta) \dots, \eta_1, \eta_2, \dots$$

Soient  $V, V'$  et  $X$  trois intervalles, dont chacun contient au moins un nombre entier. Les sommes  $\sum_v, \sum_{v'}, \sum_x$  sont étendues à tous les nombres entiers situés respectivement dans  $V, V'$  et  $X$ ; la somme  $\sum_{v+v'+t}$  est étendue à toutes les paires de nombres entiers  $v$  et  $v'$ , telles que  $v$  appartienne à  $V$ , que  $v'$  appartienne à  $V'$  et que la somme  $v + v'$  soit égale au nombre donné  $t$ .

Soient  $r(v), \varrho(v), r'(v'), \varrho'(v')$ ,  $f(x)$  définis pour tout nombre entier  $v$  de  $V$ , pour tout nombre entier  $v'$  de  $V'$  et pour tout nombre  $x$  de  $X$ ; je suppose que  $f(x)$  soit toujours égal à un nombre entier.

Je me pose le problème de trouver pour la somme

$$L(f(x)) = \sum_{v+v'=f(x)} r(v) r'(v') \dots \dots \dots \quad (1)$$

une valeur approximative, valable pour beaucoup de nombres entiers  $x$  de  $X$ . A un facteur près, cette valeur approximative sera égale à

$$A(f(x)) = \sum_{v+v'=f(x)} \varrho(v) \varrho'(v') \dots \dots \dots \quad (2)$$

J'impose trois conditions:

1. Soit  $N \geq 3$ ;  $n = \log N$ ; chacun des intervalles  $V$  et  $V'$  ait une

<sup>1)</sup> Representation of an odd number as a sum of three primes, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS, 15, N°. 6—7, 169—172 (1937).

Some theorems concerning the theory of primes. Recueil mathématique 2 (42), N°. 2, 179—195 (1937).

<sup>2)</sup> Dans le théorème qui paraîtra bientôt dans les Acta Arithmetica, je pose  $w(t)$  égal au nombre des nombres entiers  $x$  situés dans  $X$  et tels que  $f(x) = t$ .

longueur  $\leq N$ . Dans l'intervalle  $V$  la fonction  $\varrho(v)$  soit monotone et en valeur absolue  $\leq \Gamma$ , où  $\Gamma$  est indépendant de  $v$ . Dans l'intervalle  $V'$  la fonction  $\varrho'(v')$  soit monotone et en valeur absolue  $\leq \Gamma'$ , où  $\Gamma'$  est indépendant de  $v'$ . Supposons en outre

$$\sum_v |\tau(v)|^2 \leq \Gamma^2 N; \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

$$\sum_{v'} |\tau'(v')|^2 \leq \Gamma'^2 N \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

2. A tout nombre naturel  $q$  et à tout nombre naturel  $k \leq q$  correspondent deux nombres  $\chi(q, k)$  et  $\chi'(q, k)$  tels qu'on ait

$$|\chi(q, k)| \leq \gamma_1 q^l; \quad |\chi'(q, k)| \leq \gamma_1 q^l. \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (5)$$

$$\left| \sum_{\substack{v \leq u \\ v \equiv k \pmod{q}}} \tau(v) - \chi(q, k) \sum_{v \leq u} \varrho(v) \right| \leq \gamma_m \Gamma N q^l n^{-m}. \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (6)$$

et

$$\left| \sum_{\substack{v' \leq u' \\ v' \equiv k \pmod{q}}} \tau'(v') - \chi'(q, k) \sum_{v' \leq u'} \varrho'(v') \right| \leq \gamma_m \Gamma' N q^l n^{-m}. \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (7)$$

valables pour tout nombre naturel  $m$ , pour tout nombre  $u$  de  $V$  et pour tout nombre  $u'$  de  $V'$ ; dans ces inégalités  $l$  désigne un nombre  $\geq 0$ , indépendant de  $m, q, k, u$  et  $u'$ .

3. Pour tout nombre naturel  $m$  et pour tout nombre réel  $a$ , tels que l'intervalle fermé  $(a - N^{-1} n^m, a + N^{-1} n^m)$  ne contienne aucune fraction à dénominateur positif  $\leq n^m$ , on ait

$$\left| \sum_x e^{2\pi i \alpha f(x)} \right| \leq \gamma_m n^{-m} \sum_x 1 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (8)$$

et

$$\left| \sum_v \tau(v) e^{2\pi i \alpha v} \right| \leq \gamma_m \Gamma N n^{-m} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (9)$$

Sous ces conditions à tout nombre naturel  $m$  correspondent un nombre naturel  $q \geq m$ , dépendant uniquement de  $m$  et de la suite  $(\eta)$ , et un nombre positif  $c_5$ , ne dépendant que de  $m, l$  et des suites  $(\gamma)$  et  $(\eta)$ , tels que

$$\sum_x \left| L(f(x)) - A(f(x)) \sum_q E\left(\frac{a}{q}\right) E'\left(\frac{a}{q}\right) e^{-\frac{2\pi i \alpha f(x)}{q}} \right|^2 \leq c_5 \Gamma^2 \Gamma'^2 N^2 n^{-m} \sum_x 1. \quad (10)$$

où

$$E\left(\frac{a}{q}\right) = \sum_{k=1}^q e^{-\frac{2\pi i a k}{q}} \chi(q, k) \quad \text{et} \quad E'\left(\frac{a}{q}\right) = \sum_{k=1}^q e^{-\frac{2\pi i a k}{q}} \chi'(q, k); \quad \dots \quad \dots \quad (11)$$

$\Sigma$  est étendu à toutes les fractions irréductibles  $\frac{a}{q}$  telles que  $0 \leq a < q \leq n^r$ .

**Lemme 2:** Si  $\psi(x)$  est un polynôme du degré précis  $g$  qui prend des

valeurs entières pour toute valeur entière de  $x$ , alors à tout nombre naturel  $m$  correspondent un nombre naturel  $\eta$  et un nombre positif  $c_6$  qui ne dépendent que de  $m$  et du choix du polynôme  $\psi(x)$  et qui possèdent la propriété suivante: pour tout nombre  $Z > 3$  et pour tout nombre réel  $a$ , tels que l'intervalle fermé  $(a - Z^{-\eta} z^\eta, a + Z^{-\eta} z^\eta)$  ne contienne aucune fraction à dénominateur positif  $\leq z^\eta$ , on a

$$\sum_{x \leq Z} e^{2\pi i \alpha \psi(x)} < c_6 Z z^{-m};$$

$\Sigma$  est étendu à tous les nombres entiers  $x$  qui sont en valeurs absolues  $\leq Z$ .

### Mathematics. — Ueber Trivektoren. III. Von R. WEITZENBÖCK.

(Communicated at the meeting of November 27, 1937.)

#### § 6. Die Typen B bei $n = 6$ .

Bei  $n = 6$  haben wir zunächst nach Gleichung (27) die 36 Syzygien erster Art

$$A_i'' = A'' A_i = \frac{1}{6} (a^3 b^2)'' b_i = (a' b)^2 a'' b_i = 0. \quad \dots \quad (55)$$

die durch eine Gleichung

$$A_i^k = \sum_{i=1}^6 A_i^i = \frac{1}{6} (a^3 b^3) \equiv 0 \quad \{ a_{ijk} \}, \quad \dots \quad (56)$$

verbunden sind, sodass sich nur  $36 - 1 = 35$  irreduzible Syzygien ergeben.

Die Reduktionsformel (5a), die  $(a' b)$  auf  $(a' b)^2$  umformt, lautet hier wie folgt:

$$4(a' b)(a' x)(a' y)(b u')(b v') = \\ = (a' b)^2 (a' y)(b v') (u' x) + (a' b)^2 (a' x)(b u') (v' y) - \\ - (a' b)^2 (a' x)(b v') (u' y) - (a' b)^2 (a' y)(b u') (v' x) \quad \} \quad (57a)$$

oder, wenn wir rechts nach (55) die Größen  $A_i''$  einführen:

$$4(a' b)(a' x)(a' y)(b u')(b v') = A_i'' y_\mu v^i (u' x) + A_i'' x_\mu u^i (v' y) - \\ - A_i'' x_\mu v^i (u' y) - A_i'' y_\mu u^i (v' x). \quad \} \quad (57b)$$

In Tensorschreibweise wird dies, wenn  $x, y, u$  und  $v$  jetzt Indizes bezeichnen:

$$4 a^{ixy} b_{iuv} = A_v^y \delta_u^x + A_u^x \delta_v^y - A_v^x \delta_u^y - A_u^y \delta_v^x \quad \dots \quad (57c)$$

Bei den Syzygien zweiter Art haben wir nach den letzten zwei Paragraphen vorerst mit den Typen  $B$  und  $C$  zu tun. Beim Typus  $B$  ist nach (34) gesetzt

$$B_{u,vw} = 2P_{u,vw} + P_{v,uw} + P_{w,uv}, \quad \dots \quad (58)$$

wobei nach (31) die Ausdrücke  $P$  gegeben sind durch

$$P_{u,vw} = A_u^\mu c_{\mu v w} = \frac{1}{6} (a^3 b^2 c) (bu') (cv') (cw'). \quad \dots \quad (59)$$

Setzen wir die Ausdrücke (59) in (58) ein, so entsteht

$$\left. \begin{aligned} B_{u,vw} &= 2A_u^\mu c_{\mu v w} + A_v^\mu c_{\mu u w} + A_w^\mu c_{\mu v u} \\ B_{u,vw} &= A_\lambda^\mu (2\delta_u^\lambda c_{\mu v w} + \delta_v^\lambda c_{\mu u w} + \delta_w^\lambda c_{\mu v u}). \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (60)$$

Um alle linearen Abhängigkeiten zwischen den  $B_{u,vw}$  zu ermitteln, multiplizieren wir (60) mit unbestimmten, konstanten Koeffizienten  $M^{u,vw}$ , die so wie die  $B$  bezüglich  $v$  und  $w$  alternierend sind und addieren über  $u$ ,  $v$  und  $w$ . Es entsteht

$$B_{u,vw} M^{u,vw} = A_\lambda^\mu (2c_{\mu v w} M^{\lambda,vw} + c_{\mu u w} M^{u,\lambda w} + c_{\mu v u} M^{u,v\lambda}) \quad \dots \quad (61)$$

dies muss identisch bezüglich der  $A_\lambda^\mu$  mit  $\lambda \neq \mu$  verschwinden, d.h. wir haben

$$2c_{\mu v w} M^{\lambda,vw} + c_{\mu u w} M^{u,\lambda w} + c_{\mu v u} M^{u,v\lambda} = c_{u,ik} (2M^{\lambda,ik} + M^{i,\lambda k} + M^{k,i\lambda}) = 0.$$

Hieraus folgt also für die Konstanten  $M$ :

$$2M^{i,ik} + M^{i,jk} + M^{k,ij} = 0 \quad \dots \quad (62)$$

Hieraus folgt wegen  $M^{j,ik} = -M^{i,ki}$  leicht, dass  $M^{i,ik} = M^{jik}$  schief ist in allen drei Indizes. Aus der linken Seite von (61) entsteht dann, wenn man nach den Indextripeln addiert:

$$B_{u,vw} M^{u,vw} = 2 \sum_{\{uvw\}} M^{u,vw} (B_{u,vw} + B_{v,wu} + B_{w,uv}), \quad \dots \quad (63)$$

Hier ist nach Gleichung (36) im § 4 die eingeklammerte Summe der  $B$  identisch Null bezüglich der  $A_\lambda^\mu$  und aus (63) lesen wir also ab, dass zwischen den  $B$  kleine weiteren linearen Abhängigkeiten mit konstanten Koeffizienten bestehen. Wegen  $B_{u,vw} = -B_{u,wv}$  gibt es daher zu einem gegebenen Indextripel aus drei verschiedenen Zahlen  $u, v, w$  genau zwei irreduzible Syzygien  $B$ , d.h. im Ganzen  $2 \cdot \binom{6}{3} = 40$ . Ist aber z.B.  $u = v$ , so haben wir wegen  $B_{u,uw} = -B_{u,uu}$  nur eine irreduzible Syzygie  $B_{u,uu}$ .

d.h. im Ganzen  $1 \cdot \binom{2}{6} = 15$ . Es gibt daher überhaupt  $40 + 15 = 55$  irreduzible Syzygien zweiter Art vom Typus *B*.

### § 7. Der Typus *C* bei $n = 6$ .

Ganz analoges finden wir beim Typus *C* der Syzygien zweiter Art. Hier haben wir nach Gleichung (48), wobei wir den Faktor  $\frac{1}{6}$  weglassen:

$$\begin{aligned} C^{x,y,z} &= \frac{1}{6} (a^3 b^2 x) (c^3 b y z) + \frac{1}{6} (a^3 b^2 c) (c^2 b x y z) = \\ &= 6 \cdot (A' x) (c' A) (c' y) (c' z) + (A' c) (c^2 A x y z). \end{aligned}$$

Hier bringen wir im letzten Term die Reihe *c* von  $(A' c)$  in den Klammerfaktor:

$$(c^2 A x y z) (c A') = \frac{1}{3} (c^3 x y z) (A A') - \frac{1}{3} (c^3 A y z) (x A') + \\ + \frac{1}{3} (c^3 A x z) (y A') - \frac{1}{3} (c^3 A x y) (z A');$$

dies wird wegen  $(A A') = 0$

$$\begin{aligned} &= -2 (c' A) (c' y) (c' z) (A' x) + 2 (c' A) (c' x) (c' z) (A' y) - \\ &\quad - 2 (c' A) (c' x) (c' y) (A' z). \end{aligned}$$

Daher erhalten wir

$$C^{x,y,z} = (c' A) [4 (A' x) (c' y) (c' z) - 2 (A' y) (c' z) (c' x) - 2 (A' z) (c' x) (c' y)]$$

oder, in Tensorschreibweise und dual zu (60):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} C^{x,y,z} &= A_{\lambda}^{\mu} [2 c^{\lambda} y z \delta_{\mu}^x + c^{\lambda} x z \delta_{\mu}^y + c^{\lambda} y x \delta_{\mu}^z] \quad | \\ &= 2 Q^{x,y,z} + Q^{y,x,z} + Q^{z,y,x} \quad | \quad . . . \end{aligned} \quad (64)$$

mit

$$Q^{x,y,z} = A_{\tau}^x c^{\tau} y z = -\frac{1}{6} (a'^3 b'^2 c') (b' x) (c' y) (c' z). \quad . . . \quad (64a)$$

(64) multiplizieren wir wieder mit unbestimmten Konstanten  $N_{x,y,z} = -N_{x,z,y}$  und erhalten analog zu (62) die Gleichungen

$$2 N_{z,x,y} + N_{x,z,y} + N_{y,x,z} = 0,$$

woraus sich wieder die schiefe Symmetrie für die *N* und weiters analog zu (63) die Beziehung ergibt

$$C^{x,y,z} N_{x,y,z} = 2 \sum_{\{x,y,z\}} N_{x,y,z} (C^{x,y,z} + C^{y,z,x} + C^{z,x,y}). \quad . . . \quad (65)$$

Hier gilt nun analog wie bei den *B* die Identität

$$C^{x,y,z} + C^{y,z,x} + C^{z,x,y} = 0 \{ A_{\lambda}^{\lambda} \}, \quad . . . \quad (66)$$

was man mit Hilfe von (64) sofort nachweisen kann. Gleichung (65) zeigt dann, dass auch zwischen den Syzygien C keine anderen linearen Beziehungen möglich sind als (66); wir haben also auch 55 irreduzible Syzygien zweiter Art vom Typus C.

Es wäre nun nur noch möglich, dass zwischen den B und C lineare Abhängigkeiten bestehen. Um auch dies zu erledigen, machen wir den Ansatz

$$B_{\mu\nu\rho} M^{\mu\nu\rho} + \frac{1}{2} C^{\mu\nu\rho} N_{\mu\nu\rho} \equiv 0 \quad \{A_i^\mu\}, \dots \quad (67)$$

Dies führt zu den Gleichungen (Vgl. (62)):

$$c_{\mu i k} (2M^{\lambda, ik} + M^{k, i\lambda} + M^{i, \lambda k}) + c^{\lambda rs} (2N_{\mu, rs} + N_{s, r\mu} + N_{r, \mu s}) \equiv 0 \quad (68)$$

für alle  $a_{ijk}$  und für  $\lambda \neq \mu$ . Nimmt man hier den Koeffizienten von  $c_{\mu i k}$ , so kommt nur der erste Teil der linken Seite in Frage, denn das algebraische Komplement von  $\lambda rs$  enthält sicher kein  $\lambda$ . Es kommt

$$c_{\mu i k} (2M^{\lambda, ik} + M^{k, i\lambda} - 2M^{\lambda, ki} - M^{i, \lambda k}) = 6 \sum_{k=1}^6 c_{\mu i k} M^{\lambda, ik} = 0, \text{ d. h.}$$

$$M^{\lambda, ik} = 0 \quad \text{und ebenso} \quad N_{\lambda, ki} = 0. \dots \quad (69)$$

Setzen wir

$$2M^{\lambda, ik} + M^{k, i\lambda} + M^{i, \lambda k} = \bar{M}^{\lambda, ik}$$

und analog bei  $N_{\mu, rs}$ , so können wir (68) kürzer so schreiben

$$c_{\mu i k} \bar{M}^{\lambda, ik} + c^{\lambda rs} \bar{N}_{\mu, rs} = 0. \dots \quad (70)$$

Nach (69) ist jetzt auch

$$\bar{M}^{\lambda, ik} = 0 \quad \text{und} \quad \bar{N}_{\mu, rs} = 0. \dots \quad (71)$$

In (70) wählen wir nun erstens  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 2$  und setzen den Koeffizienten von  $c_{234} = -c^{156}$  Null; dies gibt

$$M^{1,34} - N_{2,56} = 0. \dots \quad (72)$$

Zweitens wählen wir in (70)  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 5$  und setzen den Koeffizienten von  $c_{534} = c^{126}$  Null:

$$M^{1,34} + N_{5,26} = 0.$$

Ein Vergleich mit (72) ergibt  $N_{2,56} = -N_{5,26}$ , also gilt allgemein

$$\bar{M}^{\lambda, ik} = -\bar{M}^{i, \lambda k} \quad \text{und} \quad \bar{N}_{\mu, rs} = -\bar{N}_{r, \mu s}. \dots \quad (73)$$

Für die  $M$  ohne Querstrich folgt aus der ersten dieser Gleichungen

$$2M^{\lambda,ik} + M^{k,i\lambda} + M^{i,\lambda k} = -2M^{i,\lambda k} - M^{k,\lambda i} - M^{\lambda,ik},$$

d.h. es gilt auch für  $M$  und  $N$  selbst

$$M^{\lambda,ik} = -M^{i,\lambda k} \quad \text{und} \quad N_{\mu,rs} = -N_{r,\mu s}$$

und die  $M$  und  $N$  sind also in allen drei Indizes alternierend. Der Ansatz (67) liefert deshalb keine neuen linearen Abhängigkeiten zwischen den Syzygien  $B$  und  $C$ .

### § 8. Die Typen $\hat{B}$ und $\hat{C}$ .

Nach (58) haben wir

$$B_{u,vw} = 2P_{u,vw} + P_{v,uw} + P_{w,uv}$$

mit

$$P_{u,vw} = A_u^\nu c_{\varrho vw} = \frac{1}{6}(a^3 b^2 c)(bu')(cv')(cw').$$

Diese letzteren Ausdrücke sind, wie an  $c_{\varrho vw}$  abzulesen ist, bezüglich  $v$  und  $w$  alternierend. d.h. es ist

$$P_{u,vw} + P_{u,wv} = 0;$$

dies ist aber keine Syzygie  $S_2$ , da diese Summe auch für alle  $A_\lambda''$  verschwindet.

$P_{u,vw}$  ist aber nach (12) auch in den Indizes  $u$  und  $v$  alternierend:

$$\hat{B}_{u,v,w} = P_{u,vw} + P_{v,uw} = A_u^\nu c_{\varrho vw} + A_v^\nu c_{\varrho uw} = 0 \quad \{a_{ijk}\} \quad . \quad (74)$$

und hier ist  $\hat{B}_{u,v,w}$  nicht für beliebige  $A_\lambda''$  Null, d.h.  $\hat{B}_{u,v,w} = 0$  stellt eine Syzygie zweiter Art dar. Wir wollen zeigen, dass  $\hat{B}$  auf  $B$  reduzierbar ist und umgekehrt.

Das letztere ergibt sich unmittelbar, wenn wir  $B_{u,vw}$  nach (58) so schreiben

$$B_{u,vw} = (P_{u,vw} + P_{v,uw}) - (P_{u,wv} + P_{w,uv}), \quad \text{d. h.}$$

$$B_{u,vw} = \hat{B}_{u,v,w} - \hat{B}_{u,w,v}. \quad . \quad (75)$$

Ferner haben wir wieder nach (58):

$$B_{u,vw} = 2P_{u,vw} + P_{v,uw} + P_{w,uv}$$

$$B_{v,uw} = 2P_{v,uw} + P_{u,vw} + P_{w,uv}$$

also durch Addition

$$\begin{aligned} B_{u,v,w} + B_{v,u,w} &= 3(P_{u,v,w} + P_{v,u,w}), \text{ d. h.} \\ \dot{B}_{uv,w} &= \frac{1}{3}(B_{u,v,w} + B_{v,u,w}). \quad . . . . . \end{aligned} \quad (75a)$$

Uebrigens gilt auch für  $\dot{B}$  analog zu (36):

$$\dot{B}_{u,v,w} + \dot{B}_{v,w,u} + \dot{B}_{w,u,v} \equiv 0 \quad \{A''\}. \quad . . . . . \quad (76)$$

Ganz analoge Formeln führen bei den  $C^{x,y,z}$  zu reduziblen Syzygien  $\dot{C}^{x,y,z}$ .

Wir haben die  $B$  aus den Ausdrücken (59)

$$P_{u,v,w} = P_{u,w,v} = A_u^v c_{v,w} = (A'c)(Au')(cv')(cw') = \frac{1}{6}(a^3b^2c)(bu')(cv')(cw') \quad (77)$$

und dual damit die  $C$  aus den Ausdrücken (vgl. (64a))

$$Q^{x,y,z} = Q^{x,y,z} = A_z^x c^y z = (A'x)(c'A)(c'y)(c'z) = -\frac{1}{6}(a'^3b'^2c')(b'x)(c'y)(c'z) \quad (78)$$

aufgebaut. Die  $P$  und  $Q$  sind nun durch Gleichungen verbunden, die identisch in den  $a_{ijk}$  gelten. Wir haben nämlich, von (78) ausgehend:

$$Q^{x,y,z} = \frac{1}{36}(b^3a^2x)(c^3ayz)$$

und bringen wir hier eine Reihe  $c$  in den ersten Klammerfaktor, so kommt

$$Q^{x,y,z} = -\frac{1}{36}(b^3a^2c)(c^2axyz),$$

also z.B.

$$\begin{aligned} Q^{456} &= -\frac{1}{36}(b^3a^2c)(c^2a)_{123} = -\frac{1}{36} \cdot 2(b^3a^2c)(c_{23}a_1 + c_{31}a_2 + c_{12}a_3) \\ &= -\frac{1}{3}(P_{231} + P_{312} + P_{123}), \text{ d. h.} \\ Q^{456} &= -P_{123}. \end{aligned}$$

Allgemein gilt also<sup>1)</sup>

$$P_{ijk} = -Q^{rst} \{a_{ijk}\}, \quad . . . . . \quad (79)$$

wobei  $rst$  das algebraische Komplement von  $ijk$  ist, d.h.  $(ijkrst)$  muss eine positive Permutation von (123456) sein.

Geometrisch ist die Beziehung (79) ohne weiteres evident. Die beiden kovarianten Ebenenkomplexe

$$(a^3b^2c)(b^c^2\pi^3) = 0 \text{ und } (a'^3b'^2c')(b'c'^2\pi'^3) = 0,$$

deren Koeffizienten die Ausdrücke  $P$  und  $Q$  sind, sind identisch.

<sup>1)</sup> O. LANDSBERG, Dissertation Breslau, S. 48 (1899).

Die Gleichung (79) oder

$$R_{ijk} = P_{ijk} + Q^{rst} = A_i^r c_{ijk} + A_j^r c^{rst} = 0 \quad \{a_{ijk}\} \quad \dots \quad (80)$$

gilt identisch in den  $a_{ijk}$ , nicht aber identisch in allen  $A_i^r$ . (80) ist deshalb eine Syzygie zweiter Art  $S_2$ . Sie ist aber reduzibel wie wir jetzt zeigen wollen.

Wir bringen in

$$P_{u,v,w} = (A' a)(Au') (av') (aw') = -\frac{1}{6} (a'^3 A' v' w') (u' A)$$

die Reihe  $u'$  in den Klammerfaktor. Es entsteht

$$P_{u,v,w} + P_{v,w,u} + P_{w,u,v} = \frac{1}{2} (A' a'^2 u' v' w') (a' A) \quad \{A_i^r\}, \quad \dots \quad (81)$$

also z.B.

$$P_{4,56} + P_{5,64} + P_{6,45} = Q^{1,23} + Q^{2,31} + Q^{3,12} \quad \{A_i^r\}.$$

Hier addieren wir

$$\dot{B}_{54,6} - \dot{B}_{64,5} \quad \text{und} \quad \dot{C}^{21,3} - \dot{C}^{31,2} \quad (\text{vgl. (74)});$$

$$3P_{4,56} + \dot{C}^{21,3} - \dot{C}^{31,2} = \dot{B}_{54,6} - \dot{B}_{64,5} + 3Q^{1,23}.$$

also wird nach der Bezeichnung (80)

$$R_{ijk} \equiv \Sigma \dot{B} + \Sigma \dot{C} \quad \{A_i^r\}, \quad \dots, \quad \dots \quad (82)$$

d.h. (80) stellt eine reduzible  $S_2$  dar.

Nach den Gleichungen (75) und (75a) sind die  $B$  und die  $\dot{B}$  äquivalent. Es gilt daher auch für die Syzygien  $\dot{B}$  das am Schlusse des § 6 Gesagte. Und nach § 7 bestehen auch zwischen den  $\dot{B}$  und  $\dot{C}$  keine linearen Abhängigkeiten. Wir werden im Weiteren in der Regel mit den einfacheren Formen  $\dot{B}$  und  $\dot{C}$  arbeiten:

$$\begin{aligned} \dot{B}_{uv,w} &= P_{u,v,w} + P_{v,u,w} = A_u^v c_{uvw} + A_v^u c_{uvw} \\ \dot{C}^{xy,z} &= Q^{x,y,z} + Q^{y,x,z} = A_x^y c^{xyz} + A_y^x c^{xyz} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} \quad \dots \quad (83)$$

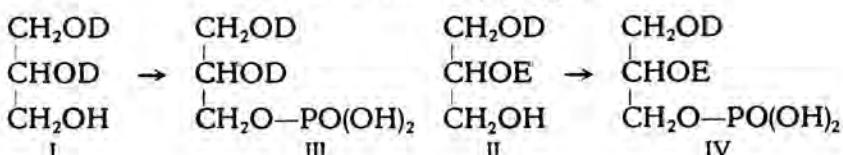
**Chemistry. — Synthesen von Glycero-phosphatidsäuren und Glycero-phosphatiden.** Von P. E. VERKADE und J. VAN DER LEE.

(Communicated at the meeting of November 27, 1937.)

§ 1. Vor kurzem haben VERKADE, VAN DER LEE, Frl. DE QUANT und DE ROY VAN ZUYDEWIJN<sup>1)</sup> den schon bekannten Methoden, die bisher von wenig Bedeutung sind und hier unerwähnt bleiben können, eine neue und einfache Methode für die Herstellung von einsäurigen und zweisäurigen  $\alpha\beta$ .Diglyceriden (I, bzw. II) hinzugefügt. Diese Methode — bestehend in der katalytisch-reduktiven Detritylierung von  $\alpha\beta$ .Diacyl- $\gamma$ .tritylglycerolen in neutralem Milieu — ist, wenigstens im Prinzip, für die Herstellung aller gewünschten  $\alpha\beta$ .Diglyceride anwendbar, falls diese keine unter den Umständen des Versuchs reduzierbare Säurekomponenten (z.B. ungesättigte Fettsäuren) enthalten müssen.

Es darf erwartet werden, dass sich in diese Diglyceride durch Einwirkung von Phosphoroxychlorid bei Zimmertemperatur in Gegenwart von Pyridin oder Chinolin immer leicht ein endständiger Phosphorsäurerest einführen lassen wird, d.h. dass hierdurch viele sog.  $\alpha$ .Phosphatidsäuren (III, bzw. IV) auf einfache Weise zugänglich geworden sind. Wir werden hinfört Substanzen vom Typus III als zweisäurige und solche vom Typus IV als dreisäurige  $\alpha$ .Phosphatidsäuren bezeichnen; auf analoge Weise werden dann selbstverständlich die beiden Typen von  $\beta$ .Phosphatidsäuren und von  $\alpha$ - und  $\beta$ .Phosphatiden unterschieden werden müssen.

(D, bzw. E = Acylgruppe)



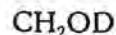
Durch von VERKADE, VAN DER LEE und Frl. MEERBURG<sup>2)</sup>, bzw. von VERKADE und VAN DER LEE<sup>3)</sup> angestellte Untersuchungen sind viele einsäurige und zweisäurige  $\alpha\gamma$ .Diglyceride — darunter gerade für unseren Zweck sehr wichtige, welche nur Fettsäuren als Säurekomponenten enthalten — leichter, in reinerem Zustande und mit besserer Ausbeute als bisher zugänglich geworden. Für die eventuelle Synthese von zweisäurigen

<sup>1)</sup> Proc. Royal Acad. Amsterdam, **40**, 580 (1937).

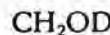
<sup>2)</sup> Rec. trav. chim., **54**, 716 (1935).

<sup>3)</sup> Ibid., **55**, 267 (1936).

und dreisäurigen  $\beta$ .Phosphatidsäuren (V. bzw. VI) durch Phosphorylierung von  $\alpha\gamma$ .Diglyceriden auf obengenannte Weise, ist diese Tatsache selbstredend von grosser Bedeutung.



V



VI

Die Einführung eines Phosphorsäurerestes in Diglyceride mit Hilfe von Phosphoroxychlorid ist zuerst von GRÜN und MEMMEN angewandt. Diese Untersuchung ist bis heute nicht in extenso veröffentlicht. Die Tatsache wird kurz in GRÜN's Beitrag über die Phosphatide in HEFTER-SCHÖNFELD's „Chemie und Technologie der Fette und Fettpprodukte“<sup>4)</sup> erwähnt. Einige Anwendungen dieses Verfahrens sind im D.R.P. 608.074 (1932) auf Namen HOFFMANN-LA ROCHE & Co., A.-G. beschrieben. Als Ausgangsmaterial dienten hier vermutlich auf technischem Wege hergestellte Diglyceride, in welchem Falle die erhaltenen Produkte wohl Gemische von Phosphatidsäuren der  $\alpha$ - und der  $\beta$ -Reihe gewesen sein werden. Das von WAGNER-JAUREGG und ARNOLD<sup>5)</sup> unter dem Namen „ $\alpha\gamma$ .Dichaulmoogroylglycerol- $\beta$ .phosphorsäure“ beschriebene, aus „ $\alpha\gamma$ .Dichaulmoogrín“ nach dem Verfahren von GRÜN und MEMMEN hergestellte Produkt war fraglos ein kompliziertes Gemisch.

Soweit uns bekannt, wurden bisher nur zwei mehr oder weniger reine  $\beta$ .Phosphatidsäuren in der Literatur beschrieben, und zwar die  $\alpha\gamma$ .Dibenzoylglycerol- $\beta$ .phosphorsäure von SUZUKI und MARUYAMA<sup>6)</sup> und die Dipalmitylverbindung (in Form eines Salzes) von KABASHIMA und SUZUKI<sup>7)</sup>; diese Produkte waren jedoch ausgehend von Glycerol- $\beta$ .phosphorsäure erhalten. Auf diese Weise sind allein zweisäurige  $\beta$ .Phosphatidsäuren, aber dann auch ohne Ausnahme und sehr leicht zugänglich. Von Bedeutung ist hierbei eine neue, einfache Methode für die Herstellung von Glycerol- $\beta$ .phosphorsäure, welche wir bald zu veröffentlichen hoffen; hierbei dient  $\alpha\gamma$ .Ditriptylglycerol als Ausgangsmaterial.

Was die  $\alpha$ .Phosphatidsäuren anbelangt, ist bisher ausgehend von einem Diglycerid nur die Herstellung von  $\alpha\beta$ .Distearylglycerol- $\gamma$ .phosphorsäure erst von GRÜN und KADE<sup>8)</sup> und später (in Form von Salzen) noch zweimal von GRÜN und LIMPÄCHER<sup>9)</sup> beschrieben worden. Von einer reinen Substanz war hier aber fraglos keine Rede. Einerseits war wenigstens das von GRÜN und KADE benutzte Ausgangsmaterial wohl keineswegs reines

<sup>4)</sup> Band I, S. 483 (1936).

<sup>5)</sup> Ber., 70, 1459 (1937).

<sup>6)</sup> Proc. Imp. Acad. (Tokyo), 6, 67 (1930).

<sup>7)</sup> Ibid., 8, 492 (1930).

<sup>8)</sup> Ber., 45, 3358 (1912).

<sup>9)</sup> Ber., 59, 1345 (1926); 60, 266 (1927).

$\alpha\beta$ .Distearin. Anderseits erfolgte die Einführung des Phosphorsäurerestes immer in der von HUNDESHAGEN herrührenden Weise, nämlich durch Erhitzen des Diglycerids mit Phosphorpanoxyd, und es ist zweifellos, — wir verweisen hierfür nach § 2 —, dass hierbei eine teilweise Isomerisierung des Diglycerids eingetreten ist.

Zweisäurige  $\alpha$ .Phosphatidsäuren sind wieder ausnahmslos und leicht ausgehend von Glycerol- $\alpha$ .phosphorsäure zugänglich. Die letztgenannte Säure ist ausgehend von Acetonglycerol leicht zu erhalten<sup>10)</sup>. Mit Hilfe von aus natürlichen Phosphatiden isolierter, optisch-aktiver Glycerol- $\alpha$ .phosphorsäure haben KARRER und BENZ<sup>11)</sup> die Diacetylverbindung hergestellt.

§ 2. Von GRÜN und dessen Mitarbeitern sind einige  $\alpha$ - und  $\beta$ .Phosphatide beschrieben worden, die alle ausgehend von einem geschmolzenen Diglycerid durch aufeinanderfolgendes Verrühren mit Phosphorpanoxyd und Cholinbikarbonat, bezw. Colaminkarbonat hergestellt waren. Wir werden uns hier nur mit den Distearyl-lecithinen<sup>12)</sup> und den Distearyl-kephalinen<sup>13)</sup> beschäftigen. Hierbei ergab sich nämlich die merkwürdige Tatsache, dass zwischen den Eigenschaften der aus  $\alpha\beta$ .Distearin und  $\alpha\gamma$ .Distearin hergestellten Produkte praktisch keine Unterschiede gefunden wurden. GRÜN und LIMPÄCHER haben denn auch schon die Möglichkeit geäussert, — einen sicheren Schluss in diesem Sinne wagten sie mit Recht aus der genannten Tatsache nicht zu ziehen —, dass während dieser Synthesen Umlagerungen eingetreten sind und aus beiden Distearinen entweder dasselbe Phosphatid oder dasselbe Gemisch der beiden isomeren Phosphatide entstanden ist.

In diesem Zusammenhange möge nunmehr die Phosphorylierung durch Erhitzen mit Phosphorpanoxyd etwas näher besprochen werden. GRÜN<sup>14)</sup> hat nachweisen können, dass z.B. die beiden Distearine sich bei mehrstündigem Erhitzen eben über ihren Schmelzpunkt oder schneller bei 120—140° isomerisieren, sodass ein Gleichgewichtszustand eintritt, bei welchem ein beträchtlicher Prozentsatz von jedem der Isomeren vorhanden ist. Es hat sich uns nun gezeigt, dass Zusatz einer kleinen Menge Phosphorpanoxyd zu den geschmolzenen, auf 80—85° erhitzten Diglyceriden — bei etwa dieser Temperatur führen GRÜN c.s. die Phosphorylierung aus — die wechselseitige Umlagerung der Isomeren sehr bedeutend beschleunigt. Zweifelsohne sind denn auch die von GRÜN und seinen Mitarbeitern in der genannten Weise erhaltenen Phosphatide immer Gemische gewesen. Die aus  $\alpha\beta$ - und aus  $\alpha\gamma$ .Distearin entstandenen Gemische können jedoch in keinem Falle identisch gewesen sein, da die Phosphorylierung ja nicht

<sup>10)</sup> Vgl. z.B. FISCHER und PFÄHLER, Ber., 53, 1606 (1920).

<sup>11)</sup> Helv. chim. acta, 10, 87 (1927).

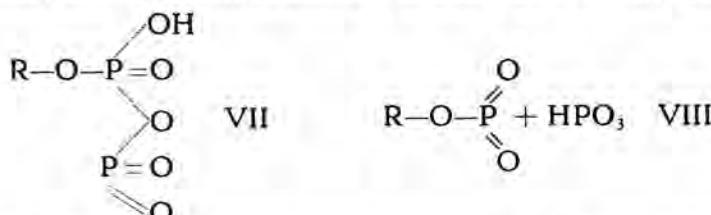
<sup>12)</sup> GRÜN und LIMPÄCHER, Ber., 59, 1350 (1926); 60, 147 (1927).

<sup>13)</sup> GRÜN und LIMPÄCHER, Ber., 60, 151 (1927).

<sup>14)</sup> Vgl. HEFTER-SCHÖNFELD, Band I, 234, 250 (1936); KIRCH, Inaug.-Diss. Technische Hochschule Dresden (1928).

wartet, bis die Einstellung des Gleichgewichtes erfolgt ist. Jedenfalls ist hier die Phosphorylierung mit Phosphorpentoxid in präparativer Hinsicht absolut wertlos.

Es scheint uns nicht unmöglich, dass der eigentliche Katalysator bei dieser gegenseitigen Umlagerung von Diglyceriden das saure Reaktionsprodukt dieser Substanzen mit Phosphorpentoxid ist, für dessen Zusammensetzung GRÜN die Möglichkeiten VII und VIII ( $R = \text{Diglyceridrest}$ )



äusserte. Wir hätten dann mit einem interessanten Fall von Autokatalyse zu tun. Bei dieser Annahme sind wir der von STIMMEL und KING<sup>15)</sup> gefundenen Umlagerung von  $\beta$ .Monopalmitin unter Einfluss von kalter alkoholischer Salzsäure und der Tatsache eingedenk, dass wir selbst bei  $\alpha\beta$ .Diglyceriden eine derartige Labilität gegenüber Mineralsäure ange troffen haben. Es drängt sich die Frage auf, inwieweit diesen Acylwanderungen, und dann auch solchen Wanderungen im allgemeinen, immer Gleichgewichtseinstellungen unter katalytischem Einfluss zugrunde liegen. Es liegt ausserhalb des Rahmens dieser Abhandlung sich hierüber weiter zu verbreiten; nähere Untersuchung des Mechanismus der Acylwanderungen ist fraglos erwünscht.

Bei Phosphorylierung von Diglyceriden mit Hilfe von Phosphoroxychlorid bei Zimmertemperatur in Gegenwart von Pyridin oder Chinolin braucht, auf Grund der Erfahrung bei Einführung anderer Gruppen in ähnlicher Weise, keine Störung des Reaktionsverlaufes infolge Umlagerung dieser Substanzen befürchtet zu werden.

§ 3. Ausgehend von jetzt — mit durch unsere Arbeiten — zur Verfügung stehenden  $\alpha$ .Phosphatidsäuren ist nun, wie wir glauben annehmen zu dürfen, die Synthese von reinen *zweisäurigen* und *dreisäurigen*  $\alpha$ .Phosphatiden (Lecithinen, Kephalinen u. dergl.) möglich geworden. Außerdem wird der Umstand, dass viele  $\beta$ .Phosphatidsäuren als Resultat von in unserem Laboratorium ausgeführten Untersuchungen leichter zugänglich geworden sind, selbstverständlich von diesen Säuren ausgehenden Versuchen zur Synthese von *zweisäurigen* und *dreisäurigen*  $\beta$ .Phosphatiden zustatten kommen.

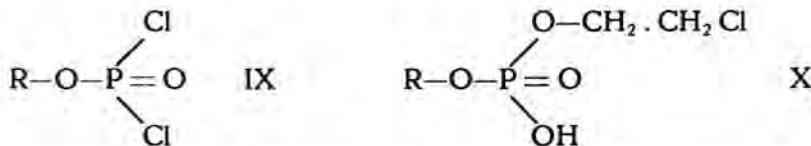
Es erübrigt sich für unseren Zweck, jetzt eingehend zu untersuchen, auf welche Weisen eine solche Synthese von Phosphatiden in Angriff zu nehmen ist. Es sei hier nur auf die Synthese von Dipalmityl- $\beta$ .lecithin und Dipalmityl- $\beta$ .kephalin durch KABASHIMA und SUZUKI<sup>7)</sup> hingewiesen, die

<sup>15)</sup> J. Am. Chem. Soc., 56, 1724 (1934).

einen zuverlässigen Eindruck macht und unmittelbar zum Ziele führt. Diese Forscher setzen nämlich das Monosilbersalz von  $\alpha\gamma$ .Dipalmitylglycerol- $\beta$ .phosphorsäure mit Hilfe von ( $\beta$ .Bromäthyl)trimethylammoniumpikrat, bzw.  $\beta$ .Bromäthylammoniumpikrat und zwar durch Erhitzen auf 85—90° während einiger Stunden in acetonisch-benzenischer Lösung um. Nach den von den genannten Forschern gemachten Angaben zu urteilen, würde hierbei in der Tat reine  $\beta$ .Phosphatide entstanden sein.

Es muss hier noch erwähnt werden, dass nach GRÜN und LIMPÄCHER<sup>16)</sup> auch  $\alpha$ - und  $\beta$ .Phosphatidsäuren und ihre Salze sich wechselseitig umlagern. Unseres Erachtens enthalten die betreffenden Abhandlungen jedoch keine einzige Tatsache, die mit Recht als Beweis oder Stütze für diese Behauptung angeführt werden kann. Nähere Untersuchung wird lehren können, ob diese Isomerisierung in der Tat stattfindet und im bejahenden Falle, unter welchen Umständen und in welchem Masse. Es ist selbstverständlich, dass die Herstellung von wirklich reinen Phosphatiden aus den Phosphatidsäuren durch eine solche Isomerisierung, gesetzt, dass diese leicht vor sich ginge, erschwert werden könnte. Die Resultate der in einer Abhandlung von KARRER und BENZ<sup>11)</sup> beschriebenen Untersuchungen, diejenigen der schönen Arbeiten über Phosphatide aus der Schule von SUZUKI und auch die Stabilität der beiden Glycerolphosphorsäuren<sup>17)</sup> sind Fingerzeige dafür, dass diesbezügliche Schwierigkeiten nicht oder kaum zu erwarten sind.

Auch sei noch auf zwei von GRÜN<sup>18)</sup> sehr kurz angegebene Methoden hingewiesen, welche ebenfalls — nun neben den  $\alpha\gamma$ .Diglyceriden auch die  $\alpha\beta$ -Isomeren leicht zugänglich geworden sind — die Synthese von  $\alpha$ - und  $\beta$ .Phosphatiden von unverdächtiger Konstitution gestatten sollen und wobei die korrespondierenden Phosphatidsäuren nicht als Zwischenprodukte auftreten. Nach der einen Methode wird das bei der Einwirkung von Phosphoroxychlorid auf ein Diglycerid in Gegenwart von Pyridin entstandene Produkt IX (R = Diglyceridrest) nicht hydrolysiert, sondern direkt mit  $\beta$ .Chloräthanol in Reaktion gebracht, wobei die Substanz X entstehen kann, worauf man dann Trimethylamin einwirken lässt. Nach der anderen



Methode — diese scheint schon von GRÜN angewandt worden zu sein, doch nähere Angaben hierüber fehlen — wird die Reihenfolge der Reaktionen einigermassen verwechselt; die Substanz X wird hier dadurch erhalten, dass man Phosphoroxychlorid in Gegenwart von Pyridin mit

<sup>16)</sup> Ber., 60, 266 (1927); vgl. auch GRÜN und LIMPÄCHER, ibid., 60, 255 (1927).

<sup>17)</sup> Siehe z.B., neben der schon zitierten Literatur, SUZUKI und MARUYAMA, Proc. Imp. Acad. (Tokyo), 6, 67 (1930) und BAILLY und GAUMÉ, C. r., 198, 2258 (Fussnote) (1934).

<sup>18)</sup> HEFTER-SCHÖNFELD, Band I, 485 (1936).

$\beta$ .Chloräthanol reagieren und erst danach ein Diglycerid einwirken lässt. Es hat keinen Zweck, diese Methoden, die sich möglicherweise noch etwas modifizieren lassen, hier bezüglich ihres eventuellen Wertes in experimenteller Hinsicht mit anderen, von Phosphatidsäuren ausgehenden Methoden zu vergleichen.

§ 4. Glycero-phosphatide (Lecithine und Kephaline) und zwar Repräsentanten der  $\alpha$ - und der  $\beta$ -Reihe, und sehr wahrscheinlich auch Glycero-phosphatidsäuren, spielen im Pflanzen- und Tierreich eine ausserordentlich wichtige Rolle. Namentlich SUZUKI und seine Mitarbeiter haben versucht, aus Naturprodukten (Sojabohnen, menschlichem Gehirn) individuelle Phosphatide zu isolieren und in der Tat mehrere solche Substanzen, durchweg in Form ihrer Bromadditionsprodukte, beschrieben. Wahrscheinlich müssen die Ergebnisse dieser Untersuchungen mit Vorbehalt akzeptiert werden. Indessen rechtfertigen sie unseres Erachtens wohl die Auffassung, dass im pflanzlichen und tierischen Organismus eine ausgesprochene Vorliebe für Bildung *dreisäuriger* Phosphatide vorhanden ist. Ein Analogon dieser Erscheinung finden wir bei den Fetten; man kann nämlich fast sagen, dass hier, wenn möglich, gemischte Triglyceride gebildet werden. In Anbetracht des Umstandes, dass zwischen beiden Klassen von Verbindungen genetischer Zusammenhang besteht, liegt eine solche Uebereinstimmung auf der Hand.

Im Hinblick auf die ausserordentliche Wichtigkeit dieser Substanzen kennzeichnet sich die Entwirrung natürlicher Phosphatidgemische zweifelsohne als ein Aufgabe von grosser Bedeutung. Wir brauchen uns hier nicht über die Möglichkeiten und Schwierigkeiten solcher Untersuchungen zu verbreiten. Sie werden selbstredend noch bedeutend an Wert gewinnen, wenn zugleich die Konstitution der isolierten individuellen Phosphatide vollständig bestimmt werden kann. Dies ist wohl allein durch Vergleichung der isolierten Substanzen — eventuell in Form von Bromadditions- oder Hydrierungsprodukten — mit auf synthetischem Wege erhaltenen Produkten möglich. Für soweit es sich hierbei um dreisäurige Phosphatide handelt, stehen für die Herstellung von diesem Vergleichungsmaterial zurzeit allein die oben besprochenen, von zweisäurigen Diglyceriden ausgehenden Wege zur Verfügung. Ausdrücklich sei nochmals hervorgehoben, dass diese leider noch nicht die Herstellung von jedem gewünschten dreisäurigen Phosphatid ermöglichen; z.B. ist dies nicht der Fall für  $\alpha$ .Phosphatide mit ungesättigten Säurekomponenten. Zweisäurige Phosphatide sind nicht nur ausgehend von einsäurigen Diglyceriden, sondern auch, und dann ohne Ausnahme, ausgehend von den Glycerolphosphorsäuren zugänglich.

Die Konstitution eventuell isolierter Phosphatidsäuren wird in analoger Weise bestimmt werden müssen.

Ferner ist es als höchst wichtig zu erachten, Phosphatidsäuren und vor allem Phosphatide von beiden Reihen in reicher Auswahl in reinem

Zustande herzustellen. — wobei natürlich die Säurekomponenten auch mit Berücksichtigung derjenigen der Naturprodukte gewählt werden müssen —, ihre chemischen, physikalischen und physiologischen Eigenschaften zu untersuchen und die Eigenschaften isomerer Repräsentanten der  $\alpha$ - und  $\beta$ -Reihe zu vergleichen. Es ist wohl kaum zweifelhaft, dass derartige Untersuchungen in physiologisch-chemischer Hinsicht zu interessanten Resultaten führen werden, umso mehr, da auch von anderen Basen als Cholin oder Colamin abgeleitete Phosphatide in die Untersuchungen einbezogen werden können.

Diese Abhandlung bezweckt nur auf dies alles die Aufmerksamkeit hinzu lenken, auf neue Möglichkeiten für die Synthese der hier in Frage stehenden Substanzen hinzuweisen und — für soweit dies tunlich ist — das betreffende Gebiet für uns zu reservieren.

§ 5. Selbstverständlich wird der Wunsch rege, auch *Lysophosphatidsäuren* und *Lysophosphatide* von völlig bekannter Konstitution in die so eben angedeuteten mehr allgemeinen Untersuchungen einbeziehen zu können. Bei Verwendung tritylierter Glycerolderivate als Ausgangsmaterialien liegen in dieser Richtung fraglos Möglichkeiten vor. Wir hoffen, hierauf später zurückzukommen.

*Rotterdam, Dezember 1937.*

*Laboratorium der Niederländischen Handels-Hochschule.*

---

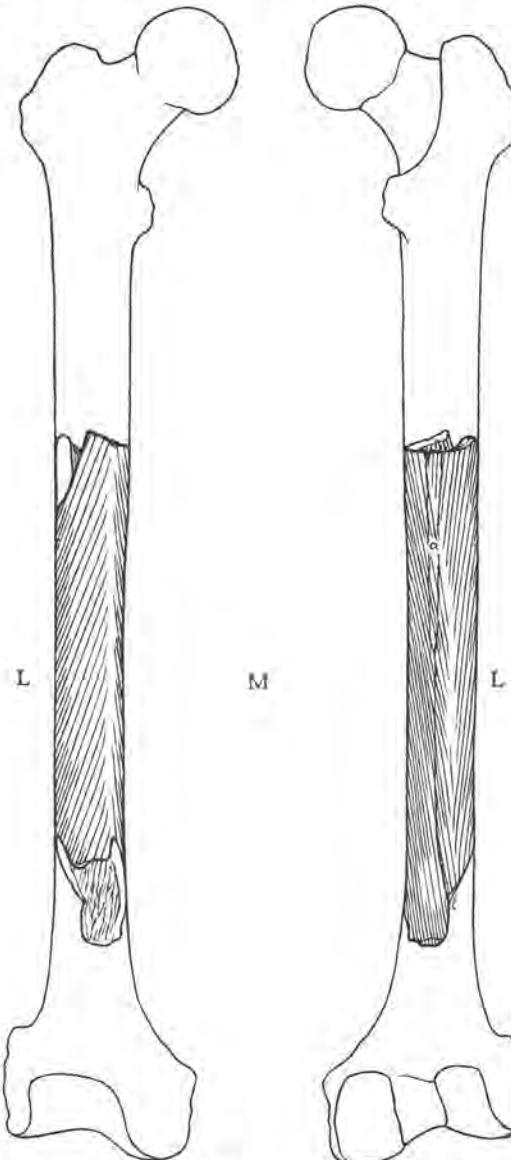
**Anatomy.** — *The osteone arrangement of the thigh-bone compacta of Man identical with that, first found, of Pithecanthropus.* By EUG. DUBOIS.

(Communicated at the meeting of November 27, 1937.)

The evidence of the existence, on the six hitherto acquired thigh-bones of *Pithecanthropus*, of certain distinctly deviating external features, common to all of them, in so far as these features fall within the limits of the preserved parts, "firmly established that ""the Trinil femur"" was not quite of the human, but of a different type and belonged to a different organism". This is a conclusion which harmonizes with the result, in this respect, of my researches on the cephalization.

Further evidence of difference from the human femur appeared to be given, seemingly, by the Fifth fossil Trinil femur, clearly showing an osteone arrangement of the compact bone substance, which strikingly deviates from that generally believed, though erroneously as now turns out, to exist in Man. I may here refer to the description, the plates and

the diagrams of my paper<sup>1)</sup> communicated at the meeting of February 24, 1934, adding, however, a few words concerning, firstly, the fossilization



Diagrams of the fifth *Pithecanthropus* femur, from before (left diagram) and from behind (right diagram). The fragmental shaft located in the outlined entire right femur  $\frac{1}{3}$ . M medial side, L lateral side, a linea aspera, l its divergent Labium laterale<sup>2)</sup>.

and a subsequent process, which made so clearly perceptible the osteone

<sup>1)</sup> New evidence of the distinct organization of *Pithecanthropus*. Proc. Royal Acad. Amsterdam, 37, 139—145 (1934). With 2 Plates and 2 diagrams.

<sup>2)</sup> The maximum of obliquity is  $15^\circ$ , (erroneously in the quoted paper  $20^\circ$ ).

arrangement, that it enabled Professor BOK to make the beautiful photographs reproduced in the two Plates which illustrate the quoted paper. It was undoubtedly the action of sulphuric acid which corroded the perfectly fossilized femur *V* and abraded the superficial layer of the compacta. At the same time it caused a *bas-relief* sculpture, composed of, principally, two systems of fine grooving or furrowing, together with coarse unevennesses<sup>1)</sup>, of different direction, both principal systems oblique with respect to the long axis of the shaft, the one diverging from the other anteriorly and converging posteriorly, the two separated, anteriorly and posteriorly, by a narrow and nearly vertical intermediate zone. The sculpture otherwise envelopes the shaft completely. Numerous very thin white stripes, the Haversian canals filled up, probably with calcite, are seen running parallel to the corrosional grooves. More than one, even quite a number of Haversian canals may belong to one groove. However, the corrosional fine grooves, as well as the thin natural canals, indicate the directions of the osteones.

I may, further, remind of the obviousness that this striking osteone arrangement was caused by the tension stresses corresponding to the action of the different parts of the *musculus quadriceps femoris*, especially the *vastus lateralis* and the *vastus medialis*, with the *vastus intermedius*. It is the exact reverse of the opposite muscle fibre arrangement. To the *rectus femoris* evidently belongs, in the right diagram, the posterior narrow intermediate strip, laterally from the *crista femoris*, about the middle of the shaft, when it was complete. It may be remarked that the osteone arrangement system belonging, in the same diagram, to the *vastus lateralis*, transgresses the lateral limit of the *crista femoris*. In the left diagram the intermediate partition line is the reverse of the opposite *crista femoris* and its *labium laterale*; below, therefore, it runs near to the medial side of the femur shaft.

This structure of the femur of *Pithecanthropus* seemed, indeed, very different from the human conditions as they were in the current opinion. Therefore, in the quoted paper of 1934, I wrote (p. 143):

"The histological conditions in the compacta of the femur shaft in Man differ greatly from those in *Pithecanthropus*. The well-known regular perpendicular arrangement of the osteones, parallel to the axis of the shaft, requires no description. Such a regular axial structure is also apparent in the direction of the lamellae and trabeculae of the cancellous tissue at the lower end of the human femur. I have made sure, moreover, by means of ultra-violet rays, in the Laboratory of Professor L. VAN ITALLIE, that there exists no other obliquity in the structure of the human (European, Javanese) femur. In Anthropomorphous Apes (Chimpanzee,

<sup>1)</sup> The grooves are in reality generally very much finer than would appear from the unevennesses in the microphotographs ( $5/1$ ) which were not adjusted to the surface of the fossil bone, but to the Haversian canals, on a somewhat deeper level. Something of the real condition is to be seen, though faintly, on the right-hand side of Plate *I* and *II* in the quoted paper.

EUG. BUBOIS: THE OSTEONE ARRANGEMENT OF THE THIGH-BONE  
COMPACTA OF MAN IDENTICAL WITH THAT, FIRST FOUND, OF  
PITHECANTHROPUS.

PLATE I



Right Femur 1. 1/1. Posteriorly medial view, showing reverse of the opposite vastus lateralis muscle.

Orang-outan, Gibbons) there is some rough indication of a certain diagonal structural deviation in the compacta of the lower end of the femur, of the same kind as that in the cancellous tissue, a long time ago (1904) recognized by O. WALKHOFF. But the one and the other are as different from the condition in *Pithecanthropus* as from that in Man. Thus, morphologically, *Pithecanthropus*, in this respect, is well distinct from those two families of Primates."

However, I was not quite satisfied, and thought of a way to check more rigorously the current opinion on the structure of the compacta of the human femur, properly dating from the time of HERMANN VON MEYER's publication of 1867, on "Die Architektur der Spongiosa" <sup>1)</sup>), in which he said, that, self-evidently, the compacta must have an architecture answering to a condensed spongiosa. Though the "trajectorial structure" of the substantia spongiosa has been intensively studied since VON MEYER's remarkable discovery of functionality in the arrangement of that substance, it was not before 1925 that an investigation into the macroscopical structure of the substantia compacta was actually carried out. A. BENNINGHOFF then applied a method, which had its origin in observations of DUPUYTREN (1836) and MALGAIGNE (1859), and was applied, in researches on the course of the fibres in the cutis, by LANGER (1862), and on the structure of articular cartilage by HULTKRANTZ (1898), and found that, the same as pricks in the (dead) cutis and articular cartilage, pricks in the superficially decalcified bone compacta, made with a round awl (previously dipped in a stain) do not cause (stained) round holes, but (stained) small splits. This obviously is, and was in the other cases, a consequence of stresses resulting from some degree of external desiccation. In this way BENNINGHOFF <sup>2)</sup> (1925) found ranges of such splits, which compose "split lines", to be parallel to the direction of the osteones, and consequently of the greatest resistance to tension and pressure. He examined especially flat bones. Having first put to the test of this method the long bones, he saw that almost generally the split lines on the shaft run lengthwise, and, after removal of the external layers of the compacta, the general lamellae, it appeared to him, that in the deeper layers the direction of the osteones, as perceptible with the naked eye, remains parallel to the long axis of the shaft. He adds, however, that he did not succeed in isolating the osteones on longer stretches than 3 to 4 cm, and did not take special pains in that respect.

Again, HENCKEL <sup>3)</sup> (1931) confined his researches on the structure of the

<sup>1)</sup> HERMANN VON MEYER, Die Architektur der Spongiosa. Reichert und du Bois Reymond's Archiv für Anatomie und Physiologie (1867).

<sup>2)</sup> A. BENNINGHOFF, Spaltlinien am Knochen, eine Methode zur Ermittlung der Architektur platter Knochen. Verhandl. Anatom. Gesellsch., pp. 189—206 (1925).

<sup>3)</sup> K. O. HENCKEL, Vergleichend-anatomische Untersuchungen über die Struktur der Knochenkomplecta nach der Spaltlinienmethode. Gegenbaurs morphol. Jahrbuch, **66**, 22—45. With two plates (1931).

bone compacta, by means of the split line method, to the superficial layer of the compacta. Concerning the human thigh-bone, he figures the upper part and says: "Am Schaft des Femur ziehen die Spaltlinien in der Längsrichtung des Knochens, wobei im Bereich der Linea aspera die Spaltlinien in schräger Richtung auf die Erhebung zu verlaufen können (spacing from myself)<sup>1)</sup>. Im proximalen Abschnitt (vgl. Abbildung 19) ziehen die vom Schaft herkommenden Spaltlinien zum Teil zum Trochanter major, zum Teil zum Trochanter minor."

I regret that not until last summer I became acquainted with those publications on the structure of the compacta, especially because the researches only referred to the superficial layer, and thus the papers contained at the same time the unspoken information that our knowledge of the structure of the compacta as a whole, namely including the deeper layers, particularly in the case of the human femur, is not founded on direct observation, but on conclusions from the trajectorial structure of the spongiosa. BENNINGHOFF<sup>2)</sup> (1927), in another paper, in extending into the compacta the trajectorial stress lines of the spongiosa of the Dolphin (*Delphinus delphis*) radius, after ROUX' incomplete drawing, emphasizes, rightly in my opinion, that compacta and spongiosa are but parts of one system of "substantiated" stress lines. Evidently in this case, the same as in the case of the humerus of the small White Whale (*Delphinapterus leucas*), of which R. SCHMIDT<sup>3)</sup> photographed the sagittal section, the beautiful "substantiated" trajectorial stress lines cannot but be caused by muscle action. However, apparently, this did not induce ROUX, SCHMIDT and BENNINGHOFF to reconsider the case of the human thigh-bone.

It was fatal to the growth of this important branch of biological science that the first discovery of what afterwards was called *funktionelle Anpassung* in the spongiosa of the upper end of the human femur had a bearing on the erect stature. This induced the anatomist HERMANN VON MEYER readily to adopt from CARL CULMANN, great builder of iron bridges and founder of graphostatics, the ideas of the crane with trajectories, and the "architecture" in bone substance: as subjects of statics. This view, from such an authority, would prevail till the present time, hampering the development of biodynamics. But about 1867 the opposition against vitalistic views was at its climax, and thirty years before, the description of the experiments of the brothers WEBER,

<sup>1)</sup> Probably this relates to cases of somewhat deeper decalcifying; the oblique convergent directions may then have been those of more internal compacta layers. The same was possibly the case, in the proximal part of the shaft, with some of the figured oblique split lines, which may have reached the deeper compacta layers.

<sup>2)</sup> A. BENNINGHOFF, Ueber die Anpassung der Knochenkomplexe an geänderte Beanspruchungen. *Anatomischer Anzeiger*, 63, 289—299 (1927).

<sup>3)</sup> R. SCHMIDT, Vergleichend-anatomische Studien über den mechanischen Bau der Knochen und seine Vererbung. *Zeitschrift für wissenschaftl. Zoologie*. (Kölliker u. Ehlers), 65, 65—111. With two plates (1899).

EUG. BUBOIS : THE OSTEONE ARRANGEMENT OF THE THIGH-BONE  
COMPACTA OF MAN IDENTICAL WITH THAT, FIRST FOUND, OF  
PITHECANTHROPUS.

PLATE II

Proximal



Distal

Part of shaft of femur 1,  $\frac{5}{1}$ . Medial posterior view. Reverses of the opposite vastus lateralis muscle (on the left side), and vastus medialis muscle (on the right side).

(WILHELM the physicist and EDUARD the physiologist), described in their "*Mechanik der menschlichen Gehwerkzeuge*", had made a lasting impression on the minds of a great number of biologists. Apparently, the human upright stature and gait were, indeed, almost mere mechanism, but minimal performance.

However, in a living organism, muscle force is very much greater than mere gravity. *In casu*, the physiological section of the human *musculus quadriceps femoris* corresponds to a total of contraction forces of about twenty times, and cooperation of the four parts of this, by far the strongest human muscle, develops a force of at least four times the dead body weight.

All these considerations induced me, during the last summer, to check the current idea on the structure of the human femur compacta. What nature did with the fossil Trinil femur V, remove the superficial layer of the compacta by corrosion, I tried first on a macerated human thigh-bone, by abrading its general lamellae with a rasp and a series of emery papers, from very coarse to very fine, to a depth of about one millimeter, and then, after decalcifying, applying the split line method. It appeared however, that this method was in fact inadequate to reveal such a subtle structure as that made perceptible on the fossil femur by nature. I then thought that, perhaps, more might directly be expected from thigh-bones which had been, during a long time, in conditions, to some degree comparable with those which obtain in fossilization processes.

In such conditions had been a number of human thigh-bones from an old burial-place in the Valken-Bulwark (now called Rijnsburger Bulwark) at Leyden, used in periods of plague epidemics, dating from years between 1752 and 1875. There these bones remained, in the clayey soil of the Holland lowland, during a lapse of time from a minimum of 61 to a maximum of 184 years. The ground water level has been much lowered in that time. It did not surprise me, that many of the bones, in these circumstances, showed a brownish impregnation, the nature of which is not yet investigated. Probably it is impregnating limonite (hydrous ferric oxide).

After the removal, in the same way as described above from the macerated thigh-bone, of a superficial layer of the shaft of seven of these thigh-bones, of which number 1, 2, 3, 6 and 7 are from the right side, number 4 and 5 from the left side, it appeared that on all of them the osteone arrangement is identical with that of the fossil *Pithecanthropus* femur V. Consequently it needs no further description.

The general direction of the Haversian canals is, in each system, distinctly visible on the seven thigh-bones, all of them, by means of a magnifier. But according as the brown tinted impregnated parts increase and become darker, in the series of the numbers 2, 4, 3, 5, 1, 7, 6, the Haversian canals become less perceptible. In places, however, the impregnation painted the osteone arrangement in a similar way as the corrosion sculptured the grooves or furrows on the fossil Trinil femora II to VI, most beautifully on

femur V. In this manner a reddish white impregnation has made the osteone arrangement surprisingly perceptible on the thigh-bone Nr. 1, by differential impregnation of the lamellar substance, in an analogous way as on the fossil femur by differential corrosion. Therefore there is a certain amount of similarity between the impregnated thigh-bone 1 of Table I and the corroded fossil femur, in so far as regards the grooving or furrowing.

A photograph of this thigh-bone, natural size, ("the whole length in the natural position" being 452 mm),<sup>1)</sup> viewed from behind and medially, in order to show a part in full length of the clear reverse of the vastus lateralis muscle, the most powerful part of the musculus quadriceps femoris, is reproduced in Plate I. Plate II is a reproduction of a microphotograph, 5 X nat. size, of a part about 3 cm above the middle of the shaft's length. It shows the convergence of the reverses of the vastus lateralis and vastus medialis muscles.

Of course the now found structural and functional similarity of Man and *Pithecanthropus* is new evidence of relationship between the two. Not, however, of organismal identity, as it, perhaps, will appear to narrow morphology, for, the distinctness of *Pithecanthropus* is firmly established by certain constant external characters of the thigh-bone, and, above-all, by that determinant character, the cephalization level, which in *Pithecanthropus* is one degree below that in Man. An analogous case we meet with in *Australopithecus transvaalensis*, the teeth of which extraordinary being resemble closely those of modern Man; its cephalization level, however, compels to place this species with Anthropoid Apes.

I am much indebted to Professor WOERDEMAN for the great care he took, in his Laboratory for Anatomy and Embryology of Amsterdam University, to represent, by clear photographs, all that is perceptible of the osteone arrangement on this Leyden thigh-bone 1. From the above descriptions, of those burial-place thigh-bones and the fossil Trinil-femur V, the reader will be convinced, that in the photographs, which are reproduced in the two plates illustrating this paper, Professor WOERDEMAN did, indeed, succeed very well.

---

<sup>1)</sup> I may remind of the same "length" of *Pithecanthropus erectus* 1 being 455 mm.

**Mathematics.** — *Noch einige Integraldarstellungen für Produkte von WHITTAKERSchen Funktionen.* Von C. S. MEIJER. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT).

(Communicated at the meeting of November 27, 1937).

§ 1. In einer kürzlich erschienenen Note hat Herr W. N. BAILEY<sup>1)</sup> mit Hilfe eines Satzes des Verfassers für das Produkt  $W_{k,m}(ze^{\frac{1}{2}\pi i}) W_{k,m}(ze^{-\frac{1}{2}\pi i})$  die folgende Integraldarstellung abgeleitet

$$W_{k,m}(ze^{\frac{1}{2}\pi i}) W_{k,m}(ze^{-\frac{1}{2}\pi i}) = \frac{2z}{\Gamma(\frac{1}{2} + m - k) \Gamma(\frac{1}{2} - m - k)} \left\{ \begin{array}{l} \\ \times \int_0^\infty K_{2m}(z \sinh t) \coth^{2k} \frac{1}{2}t dt; \end{array} \right\} . \quad (1)$$

hierin ist  $z \neq 0$ ,  $\arg z \equiv \frac{1}{2}\pi$  und  $|\Re(m)| + \Re(k) < \frac{1}{2}$ .

Ich werde jetzt analoge Integraldarstellungen für die Funktionen  $W_{k,m}(z) M_{-k,m}(z)$  und  $W_{k,m}(z) W_{-k,m}(z)$  angeben.

§ 2. Ist  $z \neq 0$ ,  $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$ ,  $\Re(m-k) > -\frac{1}{2}$ ,  $2m \neq -1, -2, -3, \dots$  und  $2k \neq 1, 2, 3, \dots$  so hat man<sup>2)</sup>

$$W_{k,m}(z) M_{-k,m}(z) = \frac{(2z)^{2k} \Gamma(1+2m)}{\Gamma(\frac{1}{2} + m - k)} \int_0^\infty J_{2m}(v) \left\{ \begin{array}{l} \\ \times F(\frac{1}{2} - k, 1 - k; 1 - 2k; -v^2/z^2) v^{-2k} dv. \end{array} \right\} . \quad (2)$$

Nimmt man nun  $z > 0$  und ersetzt man überdies  $v$  durch  $z \sinh t$ , so findet man<sup>3)</sup>

<sup>1)</sup> BAILEY, [1], S. 52.

<sup>2)</sup> Man vergl. MEIJER, [10], Formel (18) (mit  $\alpha = 1+m$  und  $\beta = m$ ); siehe auch Formel (2) von [10].

Für grosse Werte von  $v$  ist (siehe BARNES, [2], S. 146, Formel (I))

$$F(\frac{1}{2} - k, 1 - k; 1 - 2k; -v^2/z^2) v^{-2k} = O(v^{-1});$$

das auf der rechten Seite von (2) vorkommende Integral existiert also, falls  $\Re(m-k) > -\frac{1}{2}$  ist.

<sup>3)</sup> Ich benutze die Beziehung  $F(a, b; c; z) = (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c; z)$ .

$$\left. \begin{aligned} W_{k,m}(z) M_{-k,m}(z) &= \frac{2^{2k} z \Gamma(1+2m)}{\Gamma(\frac{1}{2} + m - k)} \int_0^\infty J_{2m}(z \sinh t) \\ &\times F(\tfrac{1}{2} - k, 1 - k; 1 - 2k; -\sinh^2 t) \sinh^{-2k} t \cosh t dt \\ &= \frac{2^{2k} z \Gamma(1+2m)}{\Gamma(\frac{1}{2} + m - k)} \int_0^\infty J_{2m}(z \sinh t) F(\tfrac{1}{2} - k, -k; 1 - 2k; -\sinh^2 t) \sinh^{-2k} t dt. \end{aligned} \right\} (3)$$

Man hat aber nach GAUSS<sup>4)</sup>

$$F(a, b; a+b+\tfrac{1}{2}; 4x(1-x)) = F(2a, 2b; a+b+\tfrac{1}{2}; x).$$

Setzt man hierin  $b = a - \tfrac{1}{2} = -k$  und  $x = -\sinh^2 \tfrac{1}{2}t$ , so erhält man

$$F(\tfrac{1}{2} - k, -k; 1 - 2k; -\sinh^2 t) = \cosh^{4k} \tfrac{1}{2}t.$$

Aus (3) ergibt sich daher, falls  $z > 0$ ,  $2m \neq -1, -2, -3, \dots$  und  $\Re(m-k) > -\tfrac{1}{2}$  ist<sup>5)</sup>,

$$W_{k,m}(z) M_{-k,m}(z) = \frac{z \Gamma(1+2m)}{\Gamma(\frac{1}{2} + m - k)} \int_0^\infty J_{2m}(z \sinh t) \coth^{2k} \tfrac{1}{2}t dt. \quad (4)$$

Diese Beziehung entspricht Relation (1).

§ 3. Um eine verwandte Integraldarstellung für  $W_{k,m}(z) W_{-k,m}(z)$  abzuleiten gehe ich aus von<sup>6)</sup>

$$\left. \begin{aligned} W_{k,m}(z) W_{-k,m}(z) &= -\frac{2^{2k} z}{\pi i} \int_{\infty}^{(1+)} K_{2m}(z v) \\ &\times F(\tfrac{1}{2} - k, 1 - k; 1 - 2k; v^2) v^{-2k} dv \end{aligned} \right\} \dots \quad (5)$$

(wo  $z \neq 0$ ,  $|\arg z| < \tfrac{1}{2}\pi$  und  $2k \neq 1, 2, 3, \dots$  ist) und benutze die bekannte Formel<sup>7)</sup>

$$\begin{aligned} F(a, b; c; w) &= \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)} F(a, b; a+b-c+1; 1-w) \\ &+ \frac{\Gamma(c) \Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} (1-w)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c-a-b+1; 1-w), \end{aligned}$$

<sup>4)</sup> GAUSS, [4], S. 226.

<sup>5)</sup> Die Bedingung  $2k \neq 1, 2, 3, \dots$  kann in (4) durch Grenzübergang beseitigt werden.

<sup>6)</sup> MEIJER, [8], Formel (4) (mit  $\alpha = \tfrac{1}{2} - k + m$  und  $\beta = \tfrac{1}{2} - k - m$ ).

<sup>7)</sup> BARNES, [2], S. 152, Formel (IX).

Wegen<sup>8)</sup>

$$\int_{\infty}^{(1+)} K_{2m}(zv) F(\tfrac{1}{2}-k, 1-k; \tfrac{3}{2}; 1-v^2) v^{-2k} dv = 0$$

folgt also aus (5)

$$W_{k,m}(z) W_{-k,m}(z) = -\frac{z}{\pi i} \int_{\infty}^{(1+)} K_{2m}(zv) (1-v^2)^{-\frac{1}{2}} \\ \times F(\tfrac{1}{2}-k, -k; \tfrac{1}{2}; 1-v^2) v^{-2k} dv.$$

Diese Beziehung ist äquivalent mit<sup>9)</sup>

$$W_{k,m}(z) W_{-k,m}(z) = \frac{2z}{\pi} \int_1^{\infty} K_{2m}(zv) (v^2-1)^{-\frac{1}{2}} \left. \right\{ \\ \times F(\tfrac{1}{2}-k, -k; \tfrac{1}{2}; 1-v^2) v^{-2k} dv. \quad (6)$$

Nun hat man<sup>10)</sup>

$$F(\tfrac{1}{2}-k, -k; \tfrac{1}{2}; -tg^2 \varphi) \cos^{2k} \varphi = \cos 2k\varphi.$$

Aus (6), mit  $v = \sec \varphi$  angewendet, ergibt sich somit, falls  $z \neq 0$  und  $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$  ist<sup>11)</sup>,

$$W_{k,m}(z) W_{-k,m}(z) = \frac{2z}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} K_{2m}(z \sec \varphi) \cos 2k\varphi \sec \varphi d\varphi. \quad (7)$$

§ 4. Eine andre Integraldarstellung für  $W_{k,m}(z) W_{-k,m}(z)$  lautet wie folgt<sup>12)</sup>

$$W_{k,m}(z) W_{-k,m}(z) = \frac{1}{2} z i e^{(m-k)\pi i} \int_L H_{2m}^{(1)}(z \sinh t) \tanh^{2k} \frac{1}{2}t dt. \quad (8)$$

Hierin sind  $k$  und  $m$  beliebig und  $z$  positiv; der Integrationsweg  $L$

<sup>8)</sup> Der Punkt  $v=0$  ist die einzige im Endlichen liegende singuläre Stelle des Integranden und dieser Punkt liegt ausserhalb des Integrationsweges.

<sup>9)</sup> Man vergl. WHITTAKER and WATSON, [12], § 12.22.

<sup>10)</sup> GAUSS, [4], S. 127, Formel (XXII).

<sup>11)</sup> Die Bedingung  $2k \neq 1, 2, 3, \dots$  darf wieder fortgelassen werden.

<sup>12)</sup> Relation (8) ist eine Erweiterung einer von BAILEY gegebenen Integraldarstellung (siehe BAILEY, [1], Formel (2.3)).

läuft von  $\infty e^{\pi i}$  nach  $\infty$  und zwar so, dass der Punkt  $t=0$  durch einen oberhalb der reellen Achse liegenden Halbkreis vermieden wird<sup>13)</sup>.

Man hat nämlich<sup>14)</sup>

$$W_{k,m}(z) W_{-k,m}(z) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + m + k) \Gamma(\frac{1}{2} - m + k)}{2\pi i} \times \{e^{k\pi i} W_{-k,m}(ze^{\pi i}) W_{-k,m}(z) - e^{-k\pi i} W_{-k,m}(ze^{-\pi i}) W_{-k,m}(z)\}.$$

Hieraus und aus (1) geht hervor, falls  $z > 0$  und  $|\Re(m)| - \Re(k) < \frac{1}{2}$  ist,

$$W_{k,m}(z) W_{-k,m}(z) = \frac{z}{\pi} \int_0^\infty \{e^{k\pi i} K_{2m}(ze^{\frac{1}{2}\pi i} \sinh t) + e^{-k\pi i} K_{2m}(ze^{-\frac{1}{2}\pi i} \sinh t)\} \tanh^{2k} \frac{1}{2}t dt. \quad (9)$$

Nun ist<sup>15)</sup>

$$K_r(w) = \frac{1}{2} \pi i e^{\frac{1}{2}r\pi i} H_r^{(1)}(we^{\frac{1}{2}\pi i}). \quad (10)$$

Aus (9) ergibt sich daher

$$\begin{aligned} W_{k,m}(z) W_{-k,m}(z) &= \frac{1}{2} z i e^{m\pi i} \int_0^\infty \{e^{k\pi i} H_{2m}^{(1)}(ze^{\pi i} \sinh t) + e^{-k\pi i} H_{2m}^{(1)}(z \sinh t)\} \tanh^{2k} \frac{1}{2}t dt \\ &= \frac{1}{2} z i e^{(m-k)\pi i} \int_0^\infty [H_{2m}^{(1)}\{z \sinh(te^{\pi i})\} \tanh^{2k}(\frac{1}{2}te^{\pi i}) + H_{2m}^{(1)}(z \sinh t) \tanh^{2k} \frac{1}{2}t] dt \\ &= \frac{1}{2} z i e^{(m-k)\pi i} \int_{-\infty e^{\pi i}}^\infty H_{2m}^{(1)}(z \sinh t) \tanh^{2k} \frac{1}{2}t dt \end{aligned}$$

(im letzten Integral wird der Punkt  $t=0$  durch einen oberhalb der reellen Achse liegenden Halbkreis vermieden).

Formel (8) ist also bewiesen für den Fall, dass  $|\Re(m)| - \Re(k) < \frac{1}{2}$  ist. Da aber beide Seiten von (8) analytische Funktionen von  $k$  und  $m$  sind<sup>16)</sup>, so gilt Formel (8) nach der Theorie der analytischen Fortsetzung für alle Werte von  $k$  und  $m$ .

§ 5. Das Verfahren, womit ich (8) aus (9) abgeleitet habe, ist auch auf<sup>17)</sup>

$$\left. \begin{aligned} W_{k,m}(z) W_{-k,m}(z) &= \frac{z}{\pi} \int_0^\infty J_{2k}(\frac{1}{2}t) K_{2m}(z^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}}) \\ &\times \{e^{k\pi i} K_{2m}(z^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}\pi i}) + e^{-k\pi i} K_{2m}(z^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\pi i})\} dt \end{aligned} \right\}. \quad (11)$$

<sup>13)</sup> Für jeden Punkt  $t$  von  $L$  gilt also  $0 \leq \arg t \leq \pi$ .

<sup>14)</sup> MEIJER, [6], Formel (24).

<sup>15)</sup> WATSON, [11], S. 78, Formel (8).

<sup>16)</sup> Der Punkt  $t=0$  liegt nicht auf dem Integrationswege.

<sup>17)</sup> MEIJER, [6], Formel (25); in (11) ist  $z \neq 0$ ,  $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$  und  $|\Re(m)| - \Re(k) < \frac{1}{2}$ .

anwendbar und liefert dann<sup>18)</sup>

$$W_{k,m}(z) W_{-k,m}(z) = \frac{1}{2} z i e^{(m-k)\pi i} \int_L J_{2k}(\frac{1}{2}t) K_{2m}(z^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}}) H_{2m}^{(1)}(z^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}}) dt. \quad (12)$$

Hierin ist  $z \neq 0$ ,  $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$ ,  $k$  beliebig und  $m$  beliebig; der Integrationsweg  $L$  hat dieselbe Gestalt wie in (8).

Aus (11) und (10) folgt nämlich

$$\begin{aligned} W_{k,m}(z) W_{-k,m}(z) &= \frac{1}{2} z i e^{(m-k)\pi i} \int_0^\infty \{ J_{2k}(\frac{1}{2}te^{\pi i}) K_{2m}(z^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\pi i}) H_{2m}^{(1)}(z^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\pi i}) \\ &\quad + J_{2k}(\frac{1}{2}t) K_{2m}(z^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}}) H_{2m}^{(1)}(z^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}}) \} dt \\ &= \frac{1}{2} z i e^{(m-k)\pi i} \int_{\infty e^{-\pi i}}^\infty J_{2k}(\frac{1}{2}t) K_{2m}(z^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}}) H_{2m}^{(1)}(z^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}}) dt \\ &= \frac{1}{2} z i e^{(m-k)\pi i} \int_L J_{2k}(\frac{1}{2}t) K_{2m}(z^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}}) H_{2m}^{(1)}(z^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}}) dt. \end{aligned}$$

Hiermit ist (12) bewiesen<sup>19)</sup>.

§ 6. Die parabolische Zylinderfunktion  $D_n(z)$  wird bekanntlich definiert durch<sup>20)</sup>

$$D_n(z) = 2^{\frac{1}{2}n+1} z^{-\frac{1}{2}} W_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}z^2).$$

Aus dieser Definition geht hervor

$$D_n(z) D_{-n-1}(z) = z^{-1} W_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}z^2) W_{-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}z^2). \quad . \quad (13)$$

Nun hat man<sup>21)</sup>

$$K_{-\frac{1}{2}}(w) = \sqrt{\frac{\pi}{2w}} e^{-w}, \quad H_{-\frac{1}{2}}^{(1)}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi w}} e^{iw}.$$

Ist  $z \neq 0$  und  $|\arg z| < \frac{1}{4}\pi$ , so folgt also aus (13) und (7)

$$D_n(z) D_{-n-1}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\frac{1}{2}z^2 \sec^2 \varphi} \cos(n + \frac{1}{2}) \varphi \sec^{\frac{1}{2}} \varphi d\varphi.$$

<sup>18)</sup> Integraldarstellung (12) ist eine Erweiterung von Formel (3) meiner Arbeit [6].

<sup>19)</sup> Die Bedingung  $|\Re(m)| - |\Re(k)| < \frac{1}{2}$  darf wieder fortgelassen werden (analytische Fortsetzung).

<sup>20)</sup> WHITTAKER and WATSON, [12], § 16.5.

<sup>21)</sup> WATSON, [11], S. 202, Formel (1) und S. 198, Formel (5).

Auf analoge Weise findet man mit Hilfe von (13) und (8), falls  $z > 0$  ist, (ich ersetze  $t$  durch  $2t$  in (8))

$$D_n(z) D_{-n-1}(z) = \frac{e^{-\frac{1}{4}n\pi i}}{\sqrt{2\pi}} \int_L^\infty e^{\frac{1}{4}iz^2 \sinh 2t} \frac{\tanh^n t}{\cosh t} dt; \quad . . . \quad (14)$$

ebenso mittels (13) und (12), falls  $z \neq 0$  und  $|\arg z| < \frac{1}{4}\pi$  ist,

$$D_n(z) D_{-n-1}(z) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{4}n\pi i} \int_L^\infty e^{(i-1)z t^{\frac{1}{2}}} J_{n+\frac{1}{2}}(t) t^{-\frac{1}{2}} dt. \quad . . . \quad (15)$$

Ersetzt man  $n$  durch  $-n-1$  in (14) und (15), so erhält man

$$D_n(z) D_{-n-1}(z) = \frac{e^{\frac{1}{4}(n+1)\pi i}}{\sqrt{2\pi}} \int_L^\infty e^{\frac{1}{4}iz^2 \sinh 2t} \frac{\tanh^{-n-1} t}{\cosh t} dt$$

und

$$D_n(z) D_{-n-1}(z) = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{4}(n+1)\pi i} \int_L^\infty e^{(i-1)z t^{\frac{1}{2}}} J_{-n-\frac{1}{2}}(t) t^{-\frac{1}{2}} dt.$$

§ 7. Bekanntlich hat man<sup>22)</sup>

$$K_r(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} W_{0,r}(2z)$$

und

$$I_r(z) = \frac{1}{2^{2r+1} z^{\frac{1}{2}} \Gamma(r+1)} M_{0,r}(2z).$$

Ist  $z > 0$  und  $\Re(r) > -\frac{1}{2}$ , so gilt also wegen (4)

$$K_r(z) I_r(z) = \int_0^\infty J_{2r}(2z \sinh t) dt. \quad . . . \quad (16)$$

Ebenso findet man mit Rücksicht auf (7), bzw. (8), oder (12)

$$K_r^2(z) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} K_{2r}(2z \sec \varphi) \sec \varphi d\varphi = 2 \int_0^\infty K_{2r}(2z \cosh t) dt. \quad . . . \quad (17)$$

<sup>22)</sup> MEIJER, [5], Formel (8); WHITTAKER and WATSON, [12], § 17.212.

(wo  $z \neq 0$  und  $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$  ist), bzw.

$$K_v^2(z) = \frac{1}{2}\pi i e^{v\pi i} \int_L H_{2v}^{(1)}(2z \sinh t) dt \quad . . . . . \quad (18)$$

(wo  $z > 0$  ist), oder

$$K_v^2(z) = \pi i e^{v\pi i} \int_L J_0(t) K_{2v}(2z^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}}) H_{2v}^{(1)}(2z^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}}) dt$$

(wo  $z \neq 0$  und  $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$  ist).

Die Beziehungen (16) und (17) waren schon bekannt<sup>23)</sup>.

§ 8. Formel (18) ist erweiterungsfähig. Man hat nämlich<sup>24)</sup>

$$H_v^{(1)}(z) = \frac{2}{\pi i} e^{-\frac{1}{2}v\pi i} K_v(z e^{-\frac{1}{2}\pi i}) \quad . . . . . \quad (19)$$

und

$$H_v^{(2)}(z) = -\frac{2}{\pi i} e^{\frac{1}{2}v\pi i} K_v(z e^{\frac{1}{2}\pi i}) \quad . . . . . \quad (20)$$

Definiert man nun die Funktionen  $V_{v,\mu}(z)$  und  $U_{v,\mu}(z)$  durch

$$V_{v,\mu}(z) = \frac{1}{2} \{ e^{\frac{1}{2}(v-\mu)\pi i} H_v^{(1)}(z) H_\mu^{(2)}(z) + e^{\frac{1}{2}(\mu-v)\pi i} H_\mu^{(1)}(z) H_v^{(2)}(z) \}, \quad . . . . . \quad (21)$$

und

$$U_{v,\mu}(z) = \frac{1}{2i} \{ e^{\frac{1}{2}(v-\mu)\pi i} H_v^{(1)}(z) H_\mu^{(2)}(z) - e^{\frac{1}{2}(\mu-v)\pi i} H_\mu^{(1)}(z) H_v^{(2)}(z) \}, \quad . . . . . \quad (22)$$

so gilt also wegen (19) und (20)

$$\frac{1}{2}\pi^2 V_{v,\mu}(z) = K_v(z e^{-\frac{1}{2}\pi i}) K_\mu(z e^{\frac{1}{2}\pi i}) + K_\mu(z e^{-\frac{1}{2}\pi i}) K_v(z e^{\frac{1}{2}\pi i}) \quad . . . . . \quad (23)$$

und

$$\frac{1}{2}\pi^2 i U_{v,\mu}(z) = K_v(z e^{-\frac{1}{2}\pi i}) K_\mu(z e^{\frac{1}{2}\pi i}) - K_\mu(z e^{-\frac{1}{2}\pi i}) K_v(z e^{\frac{1}{2}\pi i}) \quad . . . . . \quad (24)$$

Nun hat man<sup>25)</sup>

$$2 K_v(z) \cos v\pi = K_v(z e^{\pi i}) + K_v(z e^{-\pi i}),$$

also

$$2 K_v(z) K_\mu(z) \cos v\pi = K_v(z e^{\pi i}) K_\mu(z) + K_\mu(z) K_v(z e^{-\pi i}). \quad . . . . . \quad (25)$$

<sup>23)</sup> WATSON, [11], S. 435, Formel (3) und S. 440, Formel (1); DIXON and FERRAR, [3], S. 138 und S. 145; MEIJER, [7], S. 17; [8], S. 483; [9], S. 526.

<sup>24)</sup> MEIJER, [6], Formeln (5) und (6).

<sup>25)</sup> WATSON, [11], S. 80, Formel (18).

Durch Addition, bezw. Subtraktion von (25) und der Beziehung, die man erhält, wenn man in (25)  $\nu$  und  $\mu$  vertauscht, findet man mit Rücksicht auf (23), bezw. (24)

$$\left. \begin{aligned} 4 K_\nu(z) K_\mu(z) \cos \frac{1}{2}(\nu + \mu)\pi \cos \frac{1}{2}(\nu - \mu)\pi \\ = \frac{1}{2}\pi^2 \{V_{\nu, \mu}(ze^{\frac{1}{2}\pi i}) + V_{\nu, \mu}(ze^{-\frac{1}{2}\pi i})\}, \end{aligned} \right\}. \quad (26)$$

bezw.

$$\left. \begin{aligned} 4 K_\nu(z) K_\mu(z) \sin \frac{1}{2}(\nu + \mu)\pi \sin \frac{1}{2}(\nu - \mu)\pi \\ = \frac{1}{2}\pi^2 i \{U_{\nu, \mu}(ze^{\frac{1}{2}\pi i}) - U_{\nu, \mu}(ze^{-\frac{1}{2}\pi i})\}, \end{aligned} \right\}. \quad (27)$$

Nun besitzen die durch (21) und (22) definierten Funktionen  $V_{\nu, \mu}(z)$  und  $U_{\nu, \mu}(z)$  die Integraldarstellungen<sup>26)</sup>

$$V_{\nu, \mu}(z) = \frac{8}{\pi^2} \cos \frac{1}{2}(\nu + \mu)\pi \int_0^\infty K_{\nu+\mu}(2z \sinh t) \cosh(\nu - \mu)t dt. \quad (28)$$

$$U_{\nu, \mu}(z) = \frac{8}{\pi^2} \sin \frac{1}{2}(\nu + \mu)\pi \int_0^\infty K_{\nu+\mu}(2z \sinh t) \sinh(\nu - \mu)t dt. \quad (29)$$

In diesen beiden Relationen ist  $z \neq 0$  und  $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$ ; ferner wird  $|\Re(\nu + \mu)| < 1$  in (28) und  $< 2$  in (29) vorausgesetzt.

Ist überdies  $|\Re(\nu - \mu)| < \frac{3}{2}$ , so sind die rechten Seiten von (28) und (29), wie man leicht einsieht<sup>27)</sup>, stetige Funktionen von  $z$  für  $|\arg z| \leq \frac{1}{2}\pi$ . Die Beziehungen (28) und (29) gelten also für  $|\arg z| \leq \frac{1}{2}\pi$ , wofern  $\nu$  und  $\mu$  in (28) den Bedingungen  $|\Re(\nu + \mu)| < 1$ ,  $|\Re(\nu - \mu)| < \frac{3}{2}$ , in (29) aber den Bedingungen  $|\Re(\nu + \mu)| < 2$ ,  $|\Re(\nu - \mu)| < \frac{3}{2}$  genügen.

Ist  $z > 0$ ,  $|\Re(\nu + \mu)| < 1$  und  $|\Re(\nu - \mu)| < \frac{3}{2}$ , so folgt daher aus (26) und (28)

$$\begin{aligned} K_\nu(z) K_\mu(z) \cos \frac{1}{2}(\nu - \mu)\pi \\ = \int_0^\infty \{K_{\nu+\mu}(2ze^{\frac{1}{2}\pi i} \sinh t) + K_{\nu+\mu}(2ze^{-\frac{1}{2}\pi i} \sinh t)\} \cosh(\nu - \mu)t dt \\ = \int_0^\infty [K_{\nu+\mu}(2ze^{-\frac{1}{2}\pi i} \sinh(te^{\pi i})) \cosh\{(v-\mu)(te^{\pi i})\} \\ + K_{\nu+\mu}(2ze^{-\frac{1}{2}\pi i} \sinh t) \cosh(\nu - \mu)t] dt. \end{aligned}$$

<sup>26)</sup> MEIJER, [7], Formeln (52) und (54).

<sup>27)</sup> Für grosse Werte von  $|w|$  ist

$$K_\nu(w) = \sqrt{\frac{\pi}{2w}} e^{-w} \{1 + O(w^{-1})\}.$$

Mit Rücksicht auf (10) hat man also, falls  $z > 0$  und  $|\Re(v - \mu)| < \frac{1}{2}$  ist<sup>28)</sup>

$$K_v(z) K_\mu(z) \cos \frac{1}{2}(v - \mu)\pi = \frac{1}{2}\pi i e^{\frac{1}{2}(v+\mu)\pi i} \int_L H_{v+\mu}^{(1)}(2z \sinh t) \cosh(v - \mu)t dt; \quad (30)$$

hierin hat der Integrationsweg  $L$  dieselbe Gestalt wie in (8).

Auf analoge Weise findet man mit Hilfe von (27) und (29)

$$K_v(z) K_\mu(z) i \sin \frac{1}{2}(v - \mu)\pi = \frac{1}{2}\pi i e^{\frac{1}{2}(v+\mu)\pi i} \int_L H_{v+\mu}^{(1)}(2z \sinh t) \sinh(v - \mu)t dt. \quad (31)$$

Die Beziehungen (30) und (31) liefern bei Addition

$$K_v(z) K_\mu(z) = \frac{1}{2}\pi i e^{\mu\pi i} \int_L H_{v+\mu}^{(1)}(2z \sinh t) e^{(v-\mu)t} dt; \quad . . . \quad (32)$$

hierin ist  $z > 0$  und<sup>29)</sup>  $\Re(v - \mu) < \frac{1}{2}$ .

Formel (32) ist eine Erweiterung von (18).

#### LITERATURVERZEICHNIS.

W. N. BAILEY.

1. An integral representation for the product of two WHITTAKER functions. Quarterly Journ. of Math. (Oxford series), **8**, 51—53 (1937).

E. W. BARNES.

2. A new development of the theory of the hypergeometric functions. Proc. London Math. Soc., (2) **6**, 141—177 (1908).

A. L. DIXON and W. L. FERRAR.

3. Infinite integrals in the theory of BESSEL functions. Quarterly Journ. of Math. (Oxford series), **1**, 122—145 (1930).

C. F. GAUSS.

4. Disquisitiones generales circa seriem infinitam....., Werke, **3**, 123—162 und 207—229 (1866).

C. S. MEIJER.

5. Einige Integraldarstellungen für WHITTAKERsche und BESSELsche Funktionen. Proc. Royal Acad. Amsterdam, **37**, 805—812 (1934).

6. Einige Integraldarstellungen für Produkte von WHITTAKERschen Funktionen. Quarterly Journ. of Math. (Oxford series), **6**, 241—248 (1935).

7. Integraldarstellungen aus der Theorie der BESSELschen Funktionen. Proc. London Math. Soc., (2) **40**, 1—22 (1936).

8. Neue Integraldarstellungen aus der Theorie der WHITTAKERschen und HANKELSchen Funktionen. Math. Annalen, **112**, 469—489 (1936).

9. Einige Integraldarstellungen aus der Theorie der BESSELschen und WHITTAKERschen Funktionen. Proc. Royal Acad. Amsterdam, **39**, 394—403 und 519—527 (1936).

10. Ueber Produkte von WHITTAKERschen Funktionen. Proc. Royal Acad. Amsterdam, **40**, 133—141 und 259—263 (1937).

G. N. WATSON.

11. A treatise on the theory of BESSEL functions (1922).

E. T. WHITTAKER and G. N. WATSON.

12. A course of modern analysis (4th edition (1927)).

<sup>28)</sup> Die Bedingung  $|\Re(v + \mu)| < 1$  fällt aus, da der Punkt  $t = 0$  nicht auf  $L$  liegt.

<sup>29)</sup> Das auf der rechten Seite von (32) vorkommende Integral konvergiert für  $\Re(v - \mu) < \frac{1}{2}$  und ist eine analytische Funktion von  $v$  und  $\mu$ .

**Geology.** — *Fossiele cellenstructuur in jong-Pleistoceene Oost-Nederlandse afzettingen. (Voorloopige mededeeling.)* Door F. FLORSCHÜTZ en I. M. VAN DER VLERK. (Aangeboden door Prof. L. RUTTEN.)

(Communicated at the meeting of November 27, 1937.)

De voortzetting van het onderzoek naar flora en fauna van het Weichsel-(Würm)-Glaciaal bracht ons er toe, opnieuw aandacht te schenken aan de kryoturbate verschijnselen in Twenthe. Bij het graven van het zijkanaal van Wiene naar Almelo werd, vooral in het vak ten zuiden van de spoorbrug, de veenlaag met de kuipvormige instulpingen van de dekkende zanden, reeds vroeger voor den noordelijken wand van het hoofdkanaal afgebeeld en beschreven door EDELMAN, FLORSCHÜTZ en JESWIET (Lit. 1), goed ontsloten. Dit kryoturbate type-„Wiene“ maakt het voorwerp van deze korte verhandeling uit. Ook thans werd ons het veldwerk zeer vergemakkelijkt door de groote hulpvaardigheid van den betrokken Ingenieur en de Technische Ambtenaren van den Rijkswaterstaat en de Opzichters der Nederlandsche Heidemaatschappij.

De aanleiding tot nadere bestudeering van deze eigenaardige vorst- en dooiwerkingen vormde het constateeren van het feit, dat bodem en wanden der kuipen in het veen veelal bekleed waren met een viltig laagje goedbewaarde bladmossen, dat zich eveneens over het intakte veen uitstrekte. Op één plaats waren zelfs twee dergelijke laagjes te zien, een als bekleedsel van de kuip<sup>1)</sup>, het andere ongeveer te halver hoogte (Afb. 1). Het onderste laagje, zoo meenden wij, moest, vóór het ontstaan van de instulpingen, aan de oppervlakte van het veen gelegen hebben en het weggeduwde of wegzaakkende veen gevuld zijn; het bovenste, blijkbaar een gevolg van mosgroei op het zand, zou aanvankelijk ook een horizontalen stand ingenomen, maar door het dieper worden van de kuip een boogvorm gekregen hebben. In beide gevallen kon de kracht, die de instulping veroorzaakte, niet anders dan zeer geleidelijk hebben gewerkt.

Een tweede waarneming betrof de plaatselijke aanwezigheid van een kleilaagje onder het veen en rustend op zand, dat tot een vrijwel constante diepte gemarmerd was door hoofdzakelijk verticale en horizontale, met klei, veen of beide gevulde, spleten.

Ter verkrijging van een beter inzicht in den bouw van dit sedimentencomplex, werd eerst het dekkende zand, uitgezonderd in de diepere depressies, de kuipen, afgegraven. De veenoppervlakte deed zich toen

<sup>1)</sup> Deze kuip was ± 50 cm breed en ± 45 cm diep.

F. FLORSCHÜTZ EN I. M. VAN DER VLERK: FOSSIELE CELLENSTRUCTUUR  
IN JONG-PLEISTOCEENE OOST-NEDERLANDSCHE AFZETTINGEN.



Afb. 1



Afb. 2



Afb. 3



Afb. 4

Photo's F. FLORSCHÜTZ, Wiene, Oct./Nov. 1937.

voor als een heuvellandschap in miniatuur (Afb. 2). Vervolgens werden ook het veen en de daaronder liggende klei verwijderd, waarbij opgemerkt werd, dat de verticale spleten in deze lagen uitmondden. Hierop werd een coupe ongeveer halverwege de hoogte van de spleten gemaakt (Afb. 3) en ten slotte een deel van de horizontale spleten blootgelegd (Afb. 4).

Op grond van onze waarnemingen, gecombineerd met palaeobotanische vondsten in de zanden onder de spleten, hebben wij de volgende hypothese ontworpen voor het ontstaan van het kryoturbate type-„Wiene“.

In een zeker stadium van den Weichsel-ijsstijd zette een rivier ter plaatse aanvankelijk grof zand met grit af. Het hooger gelegen land was begroeid met een Dryasflora (onder meer *Dryas octopetala*, *Betula nana*, *Salix herbacea*, *polaris* en *reticulata*). Geleidelijk verminderde het transporteerend vermogen van het water: de sedimenten werden fijner, tijdelijk werd nog alleen klei neergelegd. Daarna werd weder zand aangebracht en eindelijk viel de rivierbodem droog. De vorst bracht in dit landoppervlak een stelsel aan van verticale en horizontale spleten, samen een cellenstructuur<sup>1)</sup> vormend, zooals uit arctische streken bekend is (afbeeldingen in Lit. 2, blz. 320 en 323, en Lit. 3, blz. 84). Boven een permanent bevroren ondergrond vulden deze spleten zich met ijs.

Des zomers had bij geringen dooi op het niet volkomen vlakke terrein eenig vervoer van klei plaats en ten slotte kon zich in Laatglaciaal<sup>2)</sup> tijd een eutrooph veen ontwikkelen (*Carices*, *Hypnaceae*, *Menyanthes* met *Betula nana* en *Selaginella selaginoides*). Tegen het einde van het Pleistoceen werd dit veen door zand overstoven.

Het ontstane lagencomplex was derhalve van onder naar boven aldus samengesteld: bevroren ondergrond — zand met verticale en horizontale spleten, gevuld met ijs — kleilaagje — veenlaag — zanddek.

Misschien nog in het allerlaatst van het Pleistoceen, maar waarschijnlijker eerst in het begin van het Holocene, steeg de temperatuur aanmerkelijk. Het ijs in de spleten smolt en werd vervangen door de klei, welke de nauwere openingen geheel vulde, maar in de wijdere nog ruimte liet, die door veen werd ingenomen. Was het kleilaagje zeer dun of ontbrak het, dan vloeide hoofdzakelijk of uitsluitend veen in de spleten<sup>3)</sup>.

Op de plaatsen, waar weinig veen was weggezakt, ontstonden vlakke kommen in de veenoppervlakte; de diepere, de kuipen, correspondeerden met wijdere spleten, die veel veen hadden opgenomen. Al deze depressies werden door het dekkende zand aangevuld.

Wij meinen te mogen concluderen, dat het kryoturbate type-„Wiene“ het gevolg is van vorst, die, op een afstand van ten minste 250 km van den

<sup>1)</sup> De „cellen“ waren hier gemiddeld 25 cm hoog en 20 cm breed.

<sup>2)</sup> Onder Laat-Glaciaal verstaan ook wij de perioden van het subarctisch parklandschap, van de Dennen- en Berkenbosschen en van het eerste optreden van thermophile bomen. Met deze laatste periode werd dan het Pleistoceen afgesloten.

<sup>3)</sup> Het is niet onmogelijk, dat het smelten van grote massa's sneeuw bijgedragen heeft tot het „vloeibaar“ worden van de klei en het veen.

westelijken landijsrand, een cellenstructuur in den bodem teweegbracht, en van dooi, tijdens welken klei en veen in de spleten wegzakten.

Bij ons is de vraag gerezen, of het ontstaan van de in arctische streken voorkomende netwerken van steenen in sommige gevallen niet eveneens op dergelijke wijze kan worden verklaard. Wij achten de mogelijkheid niet uitgesloten, dat de gang van zaken dan de volgende is geweest.

Nadat in een tijdperk van groote koude de oppervlaktelagen een cellenstructuur hadden gekregen, ontdooide bij het gunstiger worden van het klimaat de bodem voorloopig slechts tot geringe diepte, waarna een doorweekte massa fijn materiaal met steenen aanwezig was boven een systeem van met ijs gevulde vorstspleten in een nog bevroren ondergrond. Bij het verder doordringen van den dooi, zooals in het optimum van den postglaciale warmtijd, vloeide het fijne materiaal in de spleten, terwijl de steenen achterbleven, aldus aan de oppervlakte een netwerk vormend, congruent met de horizontale doorsnede der spleten.

Wij stellen ons voor, dit denkbeeld nader uit te werken en de juistheid daarvan te toetsen aan de door anderen in arctis en subarctis waargenomen verschijnselen.

*Velp (G.),*  
*Leiden,*

25 November 1937.

#### LITTERATUUR.

1. C. H. EDELMAN, F. FLORSCHÜTZ en J. JESWIET: Ueber spätpleistozäne und fröhholozäne kryoturbate Ablagerungen in den östlichen Niederlanden. Verhandelingen van het Geologisch-Mijnbouwkundig Genootschap voor Nederland en Koloniën, Geologische Serie, XI, 301—336 (1936).
2. B. HÖGBOM: Ueber die geologische Bedeutung des Frostes. Bulletin of the Geological Institution of the University of Upsala, XII, 257—390 (1914).
3. W. MEINARDUS: Arktische Böden. In E. BLANCK: Handbuch der Bodenlehre, 3, 27—96 (1930).

#### ZUSAMMENFASSUNG.

*Jungpleistozäner „Zellenboden“ in den östlichen Niederlanden.*

Verfasser sind der Meinung, dass die kryoturbaten Erscheinungen („Wannenboden“) bei Wiene in Twenthe (Provinz Overijssel) entstanden sind durch Auffüllung, in spätpleistozäner oder fröhholozäner Zeit, der Spalten eines arktischen „Zellenbodens“ mit dem hangenden Ton und Torf.

Sie tragen der Möglichkeit Rechnung, dass die Entstehung der aus heutigen arktischen Regionen bekannten Steinnetze („Strukturboden“) zum Teil in analoger Weise erklärt werden kann.

**Palæontology. — Ein Unterkieferfragment des Pithecanthropus aus den Trinilschichten Mitteljavas. Von G. H. R. VON KOENIGSWALD.  
(Communicated by Prof. L. RUTTEN.)**

(Communicated at the meeting of November 27, 1937.)

Schichten mit fossilen Vertebraten sind in Mittel- und Ostjava recht verbreitet. Sie beginnen westlich von Soerabaja, wo sie den Rändern der verschiedenen Synkinalen folgen und ziehen sowohl am Nordrande des Kendeng als auch am Südrande entlang, um unter dem Mantel des Merapi-Merbaboevulkans zu verschwinden. Stets lassen sich zwei Faunen unterscheiden: eine ältere mit *Leptobos*, *Nestoritherium*, *Epimachairodus*, die Djetis-Fauna, und die jüngere Trinil-Fauna mit *Elephas cf. namadicus* als Leitfossil. Diese Zweiteilung bleibt über eine Entfernung von über 200 km durch verschiedenartige Fazies hindurch auffallend gleich.

Am Südrande des Kendeng liegen Kedoeng Broeboes und Trinil, an welchen Fundstellen DUBOIS die Reste seines *Pithecanthropus* entdeckte. Diese sind sehr verschieden gedeutet worden, je nachdem man die menschlichen oder die äffischen Eigenheiten der Funde in den Vordergrund stellte. Dass es dabei zu so weitgehenden Meinungsverschiedenheiten kommen konnte, beweist schon ihre Bedeutung für das Problem des fossilen Menschen. Durch neue Funde zu einer Lösung des Problems beizutragen, war mein Wunsch bei palaeontologischen und stratigraphischen Arbeiten auf Java. Es ist mir eine Pflicht, denjenigen zu danken, die mich in den ungünstigen Zeiten nach 1934 dabei unterstützt haben: Herrn G. R. ERDBRINK, Bandoeng und seinen Freunden, die mir Mittel für derartige Studien zur Verfügung stellten und PÈRE TEILHARD DE CHARDIN, der die Unkosten einer gemeinsamen Exkursion freundschaftlich auf sich nahm. Wenn ich seit kurzem meine Untersuchungen auf einer sehr viel breiteren Basis fortsetzen kann, so verdanke ich dies dem CARNEGIE INSTITUTION OF WASHINGTON. Der Verfasser ist dafür diesem Institute, insbesondere Herrn JOHN. C. MERRIAM, zu grösstem Dank verpflichtet.

Ehe die Vertebratenschichten in Mitteljava im Osten unter dem Merapi untertauchen, treten sie nördlich von Solo noch einmal in einer, etwa 5 km. grossen Kuppel zu Tage, in deren Zentrum das Dorf Sangiran liegt. Das Gebiet ist durch natürliche Aufschlüsse gut gegliedert. Hier ist die Djetis-Fauna vorwiegend an dunkle Süsswassertone mit einer marinen Einschaltung gebunden; die Trinil-Fauna kommt in mehr tuffösen Schichten und Konglomeraten vor, die etwa 100 m dick sind. Diese bilden

im Gelände einen Steilhang, der sich gegenüber den ausgeräumten liegenden Tonen deutlich abhebt. Die ersten Säugetierreste von hier werden schon 1864 vermeldet (Natk. Tijdschr. Ned. Indië 27, pag. 399). MARTIN hat Mollusken bearbeitet, und auch DUBOIS gibt die Fundstellen auf seiner Karte an. Ueber Geologie und Stratigraphie haben DUYFJES, VAN ES und der Verfasser Arbeiten veröffentlicht.

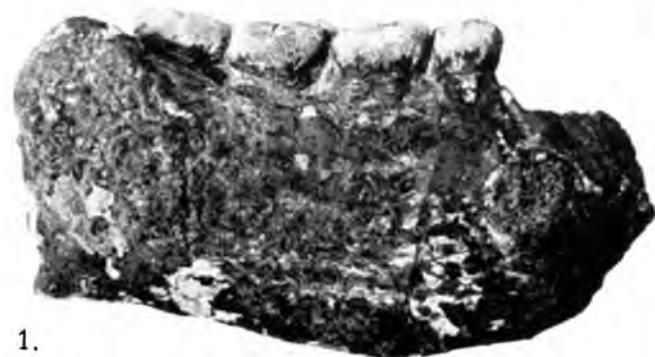
Durch die starke tropische Verwitterung werden hier immer wieder Fossilien ausgespült. Dies Material, meist angewittert und zerbrochen, ist trotzdem wegen des Nachweises seltener und sogar neuer Arten sehr wichtig. Für Grabungen ist der Fossilinhalt nicht reich genug. Dies wichtige Fossilmaterial und insbesondere die Entdeckung primitiver Steinwerkzeuge in den Trinil-Schichten — ein Anzeichen, dass gerade hier Reste fossiler Menschen zu erwarten seien — waren für mich ein Grund, die Fundstellen immer wieder absammeln zu lassen.

Unter dem Material, das während meiner Abwesenheit von Java gesammelt worden war befand sich ein Unterkieferfragment eines Hominiden, das dem *Pithecanthropus* zugewiesen werden muss. Das Stück hatte offenbar schon längere Zeit an der Oberfläche gelegen und ziemlich durch Verwitterung gelitten. Es war beinahe ganz von einer dünnen Mangankruste umgeben, die nur teilweise entfernt werden konnte. An verschiedenen Stellen sassen Reste eines feinkörnigen Konglomerates daran fest, wie es für die Trinil-Schichten typisch ist. Vergeblich hat sich Verfasser bemüht, die genaue Fundstelle auszufinden. Das Stück war vor Ende 1936 gefunden worden. Der angebliche Fundplatz liegt in den tonigen Djetis-Schichten, aus denen der Kiefer nach seinem Erhaltungszustand nicht stammen kann, doch musste mein Sammler zugeben, dass er auch in den ganz in der Nähe anstehenden Trinilschichten gesammelt hatte. Ist auch somit die genaue Fundstelle nicht mehr anzugeben, so darf doch gesagt werden, dass der Fund aus den Trinilschichten des nordöstlichen Sektors der Kuppel stammen muss.

Es handelt sich um den grössten Teil eines rechten Unterkieferastes. Der Ramus ascendens fehlt; hinten ist der Kiefer kurz hinter dem dritten Molaren, vorne zwischen dem zweiten und dem ersten Incisiven durchgebrochen. Das Kieferstück ist 96,5 mm lang. Von den Zähnen sind die Molaren und der zweite Prämolar erhalten. Die davorliegenden Alveolen sind mit der gleichen Matrix erfüllt, die auch einen Teil des Kiefers einhüllte; die Zähne waren also vor der Einbettung des Kiefers in das (hauptsächlich vulkanische) Konglomerat ausgefallen. Der Schmelz der Zähne ist durch die Verwitterung, vielleicht auch durch Pflanzenwuchs, ziemlich aufgelöst und zerstört, doch lassen sich die wichtigsten Details noch erkennen. Das Stück ist schwer und ausgezeichnet fossilisiert. Die Abbildungen Tafel I zeigen den Kiefer nach der ersten Präparation. Am Hinterrande wurde ein Teil der Matrix stehen gelassen.

Die Zähne fallen gleich durch ihre Grösse auf. Sie stehen blockartig aus dem Kiefer hervor, und sind ein wenig auseinandergerückt, so dass

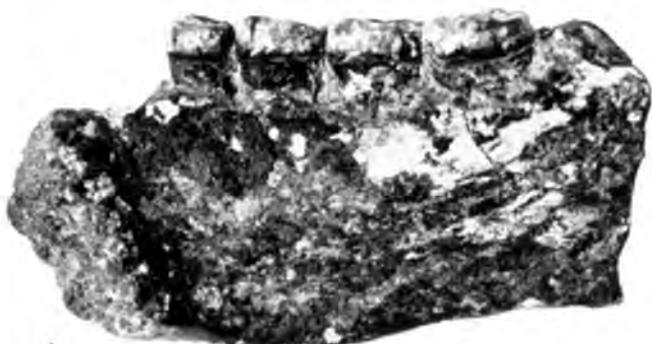
G. H. R. VON KOENIGSWALD: EIN UNTERKIEFERFRAGMENT DES  
PITHECANTHROPUS AUS DEN TRINILSCHICHTEN MITTELJAVAS.



1.



2.



3.

Fig. 1 von ausen, Fig. 2 von oben, Fig. 3 von innen geschen.

Fragment eines rechten Unterkieferastes von *Pithecanthropus erectus* aus den unteren Trinilschichten der Umgebung von Sangiran (Solo). Zustand nach der ersten Präparation, ca. 1/1 natürliche Grösse.

sie sich nicht berühren. Bereits die Anordnung der Zähne auf einer leicht nach innen gebogenen Sehne lässt den Zahnbogen typisch menschlich erscheinen. Bei den Anthropomorphen stehen die Molaren und mindestens der letzte Prämolar in einer geraden Reihe oder kann der Zahnbogen im hinteren Ende selbst leicht nach aussen geschwungen sein, wie dies z.B. bei *Simia* öfters zu beobachten ist. Im vordersten Teile ist der Kiefer zersplittet und, da die Wände der Alveolen schräg angeschnitten sind, lassen sich Masse nur angenähert geben. Die Alveole des zweiten Incisiven lässt keine besonderen Einzelheiten erkennen. Die Alveole des Caninus dürfte labial-lingual einen Durchmesser von ca. 9 mm bei einer Breite von ca. 5 mm besessen haben; der Eckzahn war jedenfalls nicht sehr prominent. Die Alveole des ersten Prämolars ist von einer Kruste teilweise überdeckt, doch lässt sich sagen, dass nur eine Alveole vorhanden war und nicht zwei, wie bei den Anthropoiden.

Der zweite Prämolar ist gross und ausgesprochen pithecoïd. Man könnte geneigt sein, diesen Zahn einem Anthropoiden zuzuschreiben, wenn er nicht ganz gleich bei *Sinanthropus* ausgebildet wäre (WEIDENREICH 1936 B, Fig. 10). Protoconid und Metaconid stehen weit vorne. Beide sind wohl entwickelt, etwa gleich stark und durch eine Furche von einander getrennt. Am Vorderende des Zahnes findet sich eine Fovea anterior. Am Hinterende ist ein weiter Talon vorhanden. Von den Spitzen der vorne liegenden Conide ziehen plumpe Leisten zum Talon hinab, dessen Hinterrand von einem durchlaufenden, ebenfalls plumpen Cingulum gebildet wird. Durch die Liebenswürdigkeit von Herrn Prof. WEIDENREICH liegen mir Abgüsse der Prämoliaren des *Sinanthropus* vor. Es zeigt sich, dass unser Zahn in Bauplan und Grösse völlig mit dem entsprechenden des *Sinanthropus* übereinstimmt, nur dass bei letzterem durch zahlreiche feine Runzeln („wrinkles“) die Zahndkrone viel feiner zerteilt ist, wogegen das Relief unseres Zahnes plumper und gröber wirkt. Die Grössenverhältnisse zeigt Tabelle I.

Die Molaren zeigen, obwohl sie gut angekaut und verwittert sind, ein starkes Relief, das komplizierter ist als beim heutigen Menschen, aber einfacher als bei *Sinanthropus*, wie wir es bereits bei der Betrachtung des hinteren Prämoliaren hervorheben mussten. Auf Einzelheiten des Zahnbau soll erst eingegangen werden, wenn die Arbeit über das Gebiss des *Sinanthropus* erschienen ist, in welche Prof. WEIDENREICH mir bei meinem Aufenthalt in Peking Einsicht gab und ohne welche es nicht gut möglich ist, die Verschiedenheiten im Zahnbau zwischen *Sinanthropus* und *Pithecanthropus* darzulegen. Nur sei hier bemerkt, dass unser Kiefer sich im Zahnbau mehr den Neanderthalern anzuschliessen scheint.

Die Länge der drei Molaren im Kiefer beträgt nicht weniger als 41.0 mm. Selbst wenn man 1 mm abzieht, da die Zähne nicht aneinanderstossen, bleibt als Länge noch 40.0 mm übrig. Dies ist eine für einen Hominiden sehr ungewöhnliche Zahnlänge, wie aus Tabelle II hervorgeht;

sie erreicht beinahe das bei Orangutan beobachtete Mittel von 42.4 mm (GREGORY).

Auffallend ist die relative Länge der Molaren: sehr deutlich zeigt sich eine progressive Größenzunahme von vorne nach hinten. Dies

Tabelle I.  
Größenverhältnisse des zweiten Prämolaren:

	Länge.	Breite.
Pithecanthropus	9.2	11.1
Sinanthropus (A)	9.0	10.5
B V (A)	8.8	9.8
C I (A)	8.8	11.8
Homo heidelbergensis r (S)	7.5	9.2
Homo neanderthalensis:		
Le Moustier r (G)	8.5	10.0
Krapina (S)	8.35	9.55
Ehringsdorf I r (G)	7.3	10.0
Spy I (S)	6.5	8.0
Homo sapiens:		
Neger Ex. 10 (G)	6.7-8.3	8.2-9.8
M. 10 (G)	7.4	8.8
Australier M (G)	7.3	8.7
Weiße Rasse Ex. 3 (G)	6.4-9.3	7.6-9.6
	M. 20 (G)	7.1
		8.4

Tabelle II.  
Gesamtlänge der drei Molaren:

Pithecanthropus	40.0
Sinanthropus G I (A)	37.5
A II (A)	35.8
Homo heidelbergensis r (S)	36.5
Homo neanderthalensis:	
Le Moustier I (W)	36.9
Krapina G	36.5
Ehringsdorf I r (W)	35.3
Spy I (W)	35.3
	32.4
Homo sapiens:	
Neger M. 10 (G)	35.8
Australier M. 10 (G)	33.1
Weiße Rasse, Männer M. 10 (G)	32.0
Weiße Rasse, Frauen M. 10 (G)	30.6

Tabelle IV.  
Längenbreitenindices der Molaren.

	M 1	M 2	M 3
Pithecanthropus	104.0	100.0	86.2
Sinanthropus G I	103.8	114.2	105.6
A II	100.0	103.5	105.1
Homo heidelbergensis	96.6	94.5	89.3
Homo sapiens:			
Australier Max. (G)	109.5	103	101.9
M. 10 (G)	102.43	98.5	96.8
Neger Max. (G)	101.9	108	128.6
M.	98.6	97.1	99.5
Weiße Max. (G)	100	110.6	105.0
Schimpanse Max (G)	100	100	105.6
M. 10 (G)	92	96.2	96.2
Orang Max. (G)	96.4	99.2	96.7
M. 10 (G)	90.8	94.3	87.3
Gorilla Max. (G)	92.1	93.5	89.2
M. 10 (G)	85.4	86.4	84.5

Tabelle VI.  
Länge des dritten unteren Molaren:

Pithecanthropus	14.5
Homo neanderthalensis	
Ehringsdorf I l. (W)	9.3
Ehringsdorf II l. (W)	12.6
Krapina	11.1-13.6

Tabelle III.  
Länge und Breite der Molaren.

	erster Molar		zweiter Molar		dritter Molar	
	Länge	Breite	Länge	Breite	Länge	Breite
Pithecanthropus	12.5	13.0	13.0	13.0	14.5	12.5
Sinanthropus G I (A)	13.0	13.5	12.0	13.7	12.5	13.2
A II (A)	11.5	11.5	11.5	9.8	10.5	
Homo heidelbergensis r.	11.6	11.2	12.7	12.0	12.2	10.9
Homo neanderthalensis:						
Krapina S	12.9	12.1	12.8	11.5	-	-
Krapina C	12.5	11.6	13.4	12.0	-	-
Le Moustier r. (G)	12.5	11.6	12.3	11.6	11.4	10.4
Ochos I. (S)	12.0	11.2	12.0	11.5	12.0	12.0
r. (S)	11.5	11.0	12.0	12.2	-	-
Ehringsdorf I r.	11.8	11.0	11.7	10.5	10.2	9.7
Krapina H. l.	11.5	11	11.6	11.5	12.0	10.5
Krapina I.	11.4	11.1	12.0	11.8	11.5	10.8
Spy I (S)	10.0	10.5	10.0	10.0	11.0	11.0
Homo sapiens:						
Neger (G)	12.2	11.4	12.0	10.8	12.5	11.7
Australier Am. 99-8174 (G)	12.0	12.8	11.6	12.0	11.2	11.4
Weisser Am. 99-7740 (G)	10.6	10.0	10.5	10.2	9.6	9.4

Tabelle VII.  
Höhe und Dicke des Unterkieferastes.

	Hinter M <sub>2</sub>		Zwischen M <sub>3</sub> u. M <sub>2</sub>		Zwischen M <sub>1</sub> u. P <sub>2</sub>		Zwischen P <sub>2</sub> u. P <sub>1</sub>	
	Höhe	Dicke	Höhe	Dicke	Höhe	Dicke	Höhe	Dicke
Pithecanthropus	33.2	23.5	31.0	20.0	33.4	17.2	35.8	16.5
Sinanthropus G I (A)	33.7	21.9	32.5	19.7	33.8	19.2	35.8	17.8
Homo heidelbergensis	29.9	23.5	30.6	21.4	34.3	18.5	33.0	19.4

Tabelle V.  
Maximum- und Mittelwerte der Molarenlängen.

	M 1	M 2	M 3
Pithecanthropus	12.5	13.0	14.5
Homo sapiens:			
nach Black: Max. M.	12.0	11.2	12.0
de Terra: Max. M.	12.8	12.5	15.0
de Jonge-Cohen: Max. M.	13.3	13.9	13.8
Gregory: Australier Max. M.	12.0	11.2	12.0
Weisse (Frauen) Max. M.	11.85	11.0	10.8
	10.7	10.0	9.9

Bemerkungen: Die in den Tabellen gebrauchten Abkürzungen bedeuten:  
 A nach Abguss; G nach GREGORY; S nach SCHÖTTENSACK; W nach WERTH;  
 Ex. Extreme; Max. Maximalwert; Min. Minimalwert; M. Mittelwert; die  
 vermeldeten Zahlen geben die Anzahl der vermessenen Individuen an;  
 l. links; r. rechts. Alle Massen in mm.

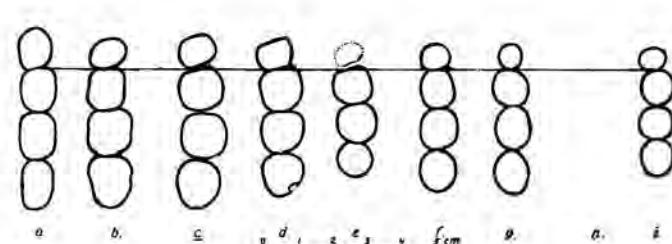


Fig. 1. Umarisslinien der drei Molaren und des zweiten Prämolaren des Unterkiefers bei verschiedenen recenten und fossilen Anthropomorphen und Hominiden.  
 a) Simia satyrus (n. WERTH), b) Dryopithecus frickae (n. GREGORY), c) Pithecanthropus erectus, d & e) Sinanthropus pekinensis (n. WEIDENREICH), f) Homo heidelbergensis (n. WERTH), g) Homo neanderthalensis (Krapina, n. GÖRJANOVIC KRAMBERGER), h & i) Homo sapiens (h Australier; i Franzose; aus BOULE).  
 Alle Figuren leicht schematisiert.

ist genau umgekehrt wie beim recenten Menschen, bei dem der erste Molar der grösste zu sein pflegt und der dritte kleiner oder ebenso gross wie der zweite (Siehe Tabelle III). Auch unter Neanderthalern kann Verfasser kein vergleichbares Beispiel finden. Wenn, wie z.B. bei Ehringsdorf II oder Krapina H der dritte Molar der grösste ist, so erreicht der Wert der Grössenzunahme doch niemals ähnliche Dimensionen. Eigenartig ist, dass gerade die ältesten bisher bekannten menschlichen Kiefer, die des *Sinanthropus* und des *Homo heidelbergensis*, bereits einen deutlich reduzierten dritten Molaren aufweisen (Textfigur). Um die gleichen Grössenverhältnisse zu finden, müssen wir schon Anthropoiden heranziehen. So beobachten wir dieselben Verhältnisse z.B. bei *Dryopithecus* und beim Orang, während Gorilla oft und Schimpanse meist Reduktionserscheinungen am dritten Molaren erkennen lassen. Die Grössenzunahme der Molaren von vorne nach hinten bei unseren Kiefer darf als pithecoïd angesprochen werden.

Die Grössenverhältnisse der einzelnen Molaren gehen aus Tabelle III hervor.

Die Höcker sind bei allen Molaren undeutlich und plumpt. Das Metaconid muss sehr kräftig entwickelt gewesen sein. Alle Zähne haben eine deutliche Fovea anterior. Der erste Molar dürfte fünf Höcker besessen haben. Dieser Zahn ist breiter als lang und hat einen hohen Längenbreitenindex. Wie aus Tabelle IV hervorgeht, kommen derartig hohe Indices nur beim Menschen vor. Besonders deutlich zeigt dies die primitivste Rasse des Menschen, der Australier, bei dem selbst der Mittelwert nach GREGORY auf über 100 kommt. *Sinanthropus* geht bis 104 (WEIDENREICH; H IV). Für den Neanderthaler liegen die entsprechenden Werte meist unter 100, doch ergibt Spy I der Wert 105. Unter den Anthropomorphen scheinen Werte über 100 weder beim ersten noch beim zweiten Molaren vorzukommen. Nach GREGORY's Tabellen ist 100 noch eben das Maximum beim Schimpansen; Orang und Gorilla bleiben weit darunter. Unter fossilen Anthropomorphen finden wir einen ersten Molaren mit dem Index 100 bei *Proconsul africanus Hopwood* aus dem Miocän von Kenya. Bei *Dryopithecus* liegen die Werte zwischen 85.6 und 95 für den ersten und zwischen 80.5 und 100 für den zweiten Molaren (GREGORY).

Der hohe Längenbreitenindex des ersten Molaren ist typisch menschlich.

Der zweite Molar ist rechteckig von Umriss mit stark gerundeten Ecken. Er dürfte fünf, vielleicht sechs Höcker besessen haben. Der Zahn ist ebenso lang als breit. Sein hoher Index erlaubt ähnliche Schlussfolgerungen wie bei dem vorhergehenden Zahn. Sind die Molaren auch auffallend gross und liegen ihre Längenmasse über den beim heutigen Menschen beobachteten Durchschnittswerten, so erreichen doch weder der erste noch der zweite Molar ganz die bei diesem beobachteten Maximumlängen. Vom dritten Molaren geben BLACK, GREGORY und DE JONGE-COHEN derartige Längen nicht auf, aber DE TERRA erwähnt einen noch grösseren Molaren

eines Papuas, anscheinend als einziges Exemplar unter einem grösseren Material. Darauf folgt in seinen Tabellen sofort ein Araber, dessen dritter Molar 14 mm misst.

Bei den Neanderthalern erreicht trotz der meist beträchtlichen Grösse der Zähne der letzte Molar keine sehr bedeutende Länge, wenn er auch länger zu sein pflegt als beim heutigen Menschen (siehe Tabelle III und VI). Selbst unter den grossen Molaren von Krapina erreicht kein einziger die gleiche Länge wie der letzte Molar des *Pithecanthropus*. Im allgemeinen ist der dritte Molar beim Neanderthaler deutlich in Reduktion begriffen.

Wie schon bemerkt, zeigt der dritte Molar bereits beim Heidelberger wie beim *Sinanthropus* Reduktionserscheinungen (Fig. 1 d—f). Dies ist eigentlich erstaunlich, denn bei beiden ist die Kieferform so primitiv, dass man solche eigentlich nicht erwarten würde. Wohl ist der dritte Molar im allgemeinen sehr variabel, aber wir brauchen nicht anzunehmen, dass gleich der erste Kiefer des *Pithecanthropus* uns einen Ausnahmezustand zeigen soll. Von *Sinanthropus* liegen noch grössere erste Molaren vor, so dass wir nicht einmal glauben dürfen, dass unser Kiefer etwa einem besonders grossen Exemplare angehört haben müsste. Der grosse unreduzierte dritte Molar passt in unserem Falle so völlig harmonisch in den massigen, grosszähnigen Kiefer und zu dem primitiven Charakter des *Pithecanthropus* überhaupt, dass er als eine besondere Eigenheit desselben gelten darf.

Wenden wir uns nun dem Unterkieferast selbst zu. Durch die Kürze und Rundung des prämolaren Kieferabschnittes unterscheidet sich unser Kiefer von dem aller Anthropomorphen. Das Kinn ist deutlich fliehend. Der Durchschnitt der Symphyse ist nicht ganz einfach zu beurteilen, da der Kiefer nicht in der Mittellinie und dazu noch schräg durchgebrochen ist. Er ist etwa plump elliptisch zu denken (Taf. I, Fig. 3); ein für die lebenden Anthropomorphen typischer, nach hinten gerichteter Fortsatz (*Spina interdigastrica*: „simian shelf“) fehlt. Dieser Fortsatz reicht so weit nach unten, dass bei diesen der Kiefer auch im Vorderabschnitt die gleiche Höhe behält resp. noch an Höhe zunimmt. In unserem Falle wird der Kiefer gerade in dieser Region niedriger.

Bei unserem Kiefer wird der ganze Unterrand des vorderen Kiefernabschnittes von einer Fläche eingenommen, die unter dem Vorderende des ersten Molaren beginnt und schnell an Breite zunimmt. Sie ist gegen den Vorderrand des Kiefers durch einen scharfen Knick abgegrenzt; nach hinten zu ist die Grenze nicht sehr scharf. Es handelt sich hier um eine auffällig breite und grosse Ansatzfläche für den *Musculus digastricus*. Eine derartige *Fossa digastrica* findet sich auch an einem anderen Kiefer von Java, von dem leider nur ein sehr kleines Fragment erhalten geblieben ist, das DUBOIS in Kedoeng Broeboes gefunden und zu *Pithecanthropus* gestellt hat. Es stammt ebenfalls aus den Trinilschichten, die hier unter den tuffösen Djetisschichten des Goenoeng Boetak als fluviatile Ablagerungen entwickelt sind (DUYFJES; VAN ES; VON KOENIGSWALD). Es handelt

sich um ein Bruchstück von nur 36 mm Länge, ohne Zahnkronen, nur mit der Wurzel des vordersten Prämolaren, das nicht leicht zu beurteilen ist. Wie bei unserem Kiefer muss der Caninus klein gewesen sein (DUBOIS). Das auffälligste ist eine geradezu enorme Fossa digastrica, die den ganzen breiten Unterrand des Kieferstückchens einnimmt, nach WEIDENREICH (1936 A, pag. 122) „without parallel among all known hominid mandibles“. So breit wie an diesem Kiefer scheint diese Fossa bei dem unsrigen nicht entwickelt zu sein, auch ist bei diesem die Ansatzfläche mehr nach hinten ansteigend. Diese Unterschiede scheinen mir jedoch nicht so wichtig, da beide Kiefer von sehr verschiedener Höhe sind und eine derartige Fläche darum an dem niedrigeren Kiefer von Kedoeng Broeboes auch etwas anders gestellt sein kann. Die Unterkiefer des *Sinanthropus* haben gezeigt, dass bei diesem die Geschlechtsunterschiede sicher ebenso deutlich ausgeprägt sind wie bei den Anthropomorphen, und dass männliche und weibliche Unterkiefer u.a. sehr verschieden hoch sind. Dies würde darauf weisen, dass unser Kiefer einem männlichen, der von Kedoeng Broeboes einem weiblichen Exemplare von *Pithecanthropus* angehört haben könnte. Jedenfalls ist diesen beiden Kiefern trotz gewisser Unterschiede eine auffällige stark entwickelte Fossa digastrica gemeinsam.

Der Kieferast ist ausserordentlich massig, viel stärker als beim rezenten Menschen. Auch der Neanderthaler bleibt, ausgenommen vielleicht einige Kiefer von Krapina, im allgemeinen schwächer, ganz abgesehen davon, dass beide ein sehr verschiedenes Prämolarengebiss besitzen. Was dies letztere betrifft, so ist unser Kiefer ja nur mit *Sinanthropus* zu vergleichen; ferner müssen wir noch den Unterkiefer des *Homo heidelbergensis* von Mauer bei Heidelberg berücksichtigen, der wohl rezent-menschliche Zähne besitzt, die aber in dem massigsten Kiefer sitzen, der bisher von einem Menschen bekannt geworden ist. Der Unterrand unseres Kiefers ist sanft geschwungen. Er hat seine geringste Höhe unter dem Hinterrande des dritten Molaren, nimmt nach vorne an Höhe zu, erreicht sein Maximum etwa unter dem Hinterrande des ersten Molaren und verliert dann wieder an Höhe. Bei den Neanderthalern ist der Unterrand mehr geradlinig, wenn auch der Unterkiefer von hinten nach vorne an Höhe zunimmt, im Gegensatz zu *Sinanthropus*, bei dem der Ast von hinten bis vorn etwa dieselbe Höhe beibehält. Dagegen beobachten wir etwa die gleichen Verhältnisse am Kiefer des *Homo heidelbergensis*.

Die Profilkurven sind nicht direkt zu vergleichen, da bei unserem Kiefer der Molarenabschnitt länger ist. Da bei ihm ausserdem der dritte Molar höher eingepflanzt ist als die vor ihm liegenden, wird der Kiefer hinten wieder etwas höher. Bei dem *Sinanthropus*-kiefer ist der Torus mandibularis mitgemessen.

Die Ähnlichkeit zwischen unserem Kiefer und dem von Mauer erstreckt sich nicht nur auf den basalen Rand. Nach vorne zu werden beide niedriger wobei es beim Heidelberger zur Bildung einer Incisura submentalalis (KLAATSCH) kommt, so dass die Symphyse beim Aufsetzen des Kiefers

auf eine Ebene diese nicht berührt. Soweit es sich beurteilen lässt, besass auch unser Kiefer eine derartige Incisur; sie findet sich auch bei Australiern, aber nicht bei *Sinanthropus*.

Legen wir zwischen dem zweiten und dritten Molaren einen Querschnitt durch den Kiefer, so zeigt es sich, dass die grösste Dicke von 20.0 mm nicht nahe dem Oberrand liegt, wie bei *Sinanthropus*, sondern etwa auf  $\frac{1}{3}$  der Höhe (von oben gerechnet), ganz wie bei *Homo heidelbergensis*, und dass auch wie bei diesem der Kiefer nach unten hin durch eine ausgesprochenere Fossa subalveolaris sich schneller verschmälert als der Kiefer des *Sinanthropus*. Im ganzen aber bleibt der Ast des Heidelberger Kiefers doch schwerer.

Auf der lateralen Seite des Kiefers finden sich statt eines einheitlichen grossen Foramen mentale, mindestens drei kleine Foramina, von denen das deutlichste unter dem Vorderende des zweiten Prämolaren liegt, 16.5 mm vom basalen Rande entfernt. Etwa 2 mm höher befindet sich vorn im Abstande von 7 mm und hinten im Abstande von 8 mm je ein weiteres kleines Foramen, die auf der Abbildung wegen der Manganüberkrustung kaum zu erkennen sind. Das Vorkommen von drei Foramina mentalia bei unserem Kiefer ist sehr eigenartig. Beim rezenten Menschen finden wir drei nach SIMONTON nur in 0.19 %. Der Neanderthaler zeigt gewöhnlich zwei Foramina, drei sind nur bei Krapina G beobachtet. Ferner hat drei Foramina der Heidelberger Unterkiefer (wenigstens rechts) und zwei Unterkiefer des *Sinanthropus*, bei welchem die Zahl der Foramina übrigens bis fünf steigen kann. Mehr als drei sind noch nie beim rezenten Menschen gefunden, und selbst zwei noch nicht in 5 %. Auch bei den Anthropomorphen ist das Vorkommen von mehr als zwei Foramina eine Ausnahme. Das Vorkommen dreier Foramina mentalia an unserem Kiefer ist als ein primitives Merkmal zu deuten.

Die linguale Fläche des Kiefers zeigt keine Besonderheiten. Eine wenig ausgeprägte Linea mylohyoidea ist bis unter den zweiten Molaren zu verfolgen. Ein Torus mandibularis ist nicht ausgebildet.

Damit hätten wir auf die wichtigsten Eigenheiten unseres Kieferfragmentes hingewiesen. Zusammenfassend dürfen wir sagen, dass es sich besonders durch die Form des Zahnbogens, die Kürze und Rundung des prämolaeren Abschnittes, das Vorhandensein nur einer Alveole für den ersten Prämolaaren sowie durch die relativen Proportionen des ersten Molaren von allen Anthropomorphen deutlich unterscheidet, und dass gerade die eben angegebenen Merkmale typisch hominid sind. Der Kiefer kann also nur einem Hominiden angehört haben.

*Pithecid* wirken der grosse zweite Prämolar und der in der Grösse unreduzierte dritte Molar. Gleichartig grosse Prämolaren besitzt *Sinanthropus*, der einzige Hominide, mit dem das Gebiss verglichen werden kann. Beide stimmen ferner überein in den grossen Zähnen sowie im klotzartigen Herausstehen derselben. Verschieden sind sie in der Schmelzrunzelung,

die bei den *Pithecanthropus*-Zähnen viel gröber ist, und in der Form des dritten Molaren, der bei *Sinanthropus* deutlich eine Größenreduktion zeigt.

Der Kiefer ist von dem des *Sinanthropus* verschieden durch seine Höhenzunahme von hinten nach vorn im Molaren- und einer Erniedrigung im Kinnabschnitt, gegenüber der mehr gleichbleibenden Höhe des Kiefers bei diesem, und durch das Fehlen eines Torus mandibularis. Die Gestalt des Kiefers gleicht viel mehr dem des *Homo heidelbergensis*, ohne jedoch dessen Massigkeit zu erreichen.

Mit dem Kieferfragment von Kedoeng Broeboes hat unser Kiefer die auffallend grosse Ansatzfläche für den Digastricus gemeinsam. Beide Stücke sind bei dem fragmentären Zustande von DUBOIS' Fund und dem Fehlen des grössten Teiles des entsprechenden Unterrandes im Kinnabschnitt bei unserem Kiefer nur schwierig zu vergleichen. DUBOIS hat dies Kieferfragment dem *Pithecanthropus* zugeschrieben. Wenn wir hier das gleiche mit dem neugefundenen Unterkiefer tun, so können wir uns nicht nur auf eine Aehnlichkeit zwischen beiden Kiefern oder auf die Tatsache berufen, dass auch er den Trinilschichten entstammt. Ebenso wie das Schädeldach von Trinil sich im Typ von allen bekannten fossilen Hominiden am meisten dem des *Sinanthropus* nähert, — man hat *Pithecanthropus* und *Sinanthropus* selbst in einem Genus vereinigen wollen —, ohne ihm indes völlig zu gleichen, so darf das gleiche auch wenigstens vom Gebiss des eben beschriebenen Unterkiefers gesagt werden. Dass unser Kiefer nur dem *Pithecanthropus* und dieser den Hominiden zugerechnet werden darf, glaubt Verfasser inzwischen auch noch auf andere Weise erwiesen zu haben. Denn aus dem gleichen Schichtkomplex, in dem der Unterkiefer gefunden wurde, konnte Verfasser am 13. August ein Schädeldach bergen, das im Typus dem Funde von Trinil völlig entspricht, und das im Bau der Temporalregion so entscheidend menschliche Eigenheiten zeigt — wir nennen hier nur die Ausbildung einer vertieften Fossa mandibularis mit vorgelagerten Tuber articulare —, dass die Hominidenatur des *Pithecanthropus* nicht nur durch diesen Unterkiefer, sondern auch durch dies vollständiger erhaltene Schädeldach bestätigt wird.

Durch seinen noch unreduzierten letzten Molaren erweist sich der *Pithecanthropus* in Bezug auf das Gebiss als der primitivste bisher bekannte Hominide.

Seine Beziehungen zu *Sinanthropus* müssen noch sorgfältig nachgeprüft werden. WEIDENREICH vertritt neuerdings die Auffassung, dass dieser die primitivste Hominidenform darstelle, da bei ihm im Gegensatz zu *Pithecanthropus* die Stirnhöhlen noch nicht in die Stirnwölbung einbezogen seien, was einen ursprünglicheren Zustand wiedergäbe. Wir haben es hier vermutlich mit einer Spezialisationskreuzung zu tun.

Dass „der Unterkiefer von Mauer einem *Pithecanthropus*-ähnlichen Wesen angehört“, hat (nach WERTH, pag. 141) SCHWALBE für möglich gehalten, und im gleichen Sinne sprechen sich auch DUCKWORTH und

WERTH aus. Eine derartige Auffassung lässt sich durch den neuen Kiefer durchaus stützen, der generell genommen, die Kieferform des Heidelbergers mit dem Gebiss des *Sinanthropus* vereinigt. Beim Unterkiefer von Mauer besteht eine gewisse Disharmonie zwischen dem schweren noch äffischen Kiefer mit den Ansätzen für eine mächtige Muskulatur, und dem im Verhältnis dazu schwachen rein menschlichen Gebiss, was die Annahme rechtfertigt, dass die Kieferform konservativer sei als dieses. Wir könnten daher sehr wohl gerade die beim Heidelberger zu beobachtende Kieferform mit entsprechend schwerem, aber harmonischem Gebiss erwarten, und solch ein Kiefer liegt in unserem Falle tatsächlich vor.

Es ist in diesem Zusammenhang wichtig, dass immer wieder auf gewisse auffällige Ähnlichkeiten hingewiesen wird, die gerade sowohl der Unterkiefer von Mauer — unser Kiefer ist leider zu fragmentär und gestattet keine weitergehenden Vergleiche — einerseits als das Schädeldach von Trinil anderseits mit den Gibbons teilen. Im Falle des Heidelberger Unterkiefers ist es deutlich, dass wir es bei diesem Funde mit einem „durch sein Gebiss als menschlich sichergestelltes Fossil“ (SCHOETENSACK, pag. 37) zu tun haben, und dass hier trotz der Form des Kiefers die Ausbildung des Gebisses den Ausschlag gibt. Wir dürfen aber nicht vergessen, dass dieser Unterkiefer so vollständig wie nur möglich ist. Dies kann von dem Schädeldach von Trinil nicht gesagt werden, dem sehr wichtige Teile fehlen. Gerade dadurch ist, wie sich gezeigt hat, eine sehr verschiedene Interpretation möglich. Es ist vor allem MARCELLIN BOULE gewesen, der dafür eintrat, dass der *Pithecanthropus* eine Art Riesengibbon gewesen sei. Eine solche Auffassung ist schon noch den Funden des *Sinanthropus*, der unzweifelhaft Beziehungen zu *Pithecanthropus* aufweist, nicht aufrecht zu erhalten, wie WEIDENREICH kürzlich (1937) ausführlich gezeigt hat, und die neuen Funden auf Java bestätigen dies völlig. Die Ähnlichkeit, die zwischen *Pithecanthropus* und den Gibbons besteht, dürfen wir wohl mit KAATSCH so auslegen, dass „sowohl die Hylobatiden als die primitiven Hominiden sich dem für alle höheren Primaten gemeinsamen Ausgangszustande näher anschliessen als die grossen Menschen“.

So deutet manches darauf hin, dass eine engere Beziehung zwischen *Pithecanthropus* und dem „*Homo*“ *heidelbergensis* angenommen werden darf, und zwar wäre ersterer natürlich wegen seines Gebisses die primitivere Form. Stratigraphisch dürften beide Funde vermutlich nicht von wesentlich verschiedenem Alter sein — in Mauer *Elephas antiquus*, in Trinil der ihm in der Spezialisationshöhe gleichstehende *Elephas cf. namadicus* —, aber wir wissen noch nichts über die vertikale Verbreitung des *Pithecanthropus*.

Wie der Fund des „*Homo*“ *modjokertensis* gezeigt hat, findet sich der Mensch in Java sicher schon im ältesten Pleistocän. Noch heute ist Insulinde durch viele „altertümliche“ Arten ausgezeichnet: das gleiche gilt auch für die geologische Vergangenheit. Von Menschen finden wir im jüngsten Pleistocän auf Java in Ngandong noch Neander-

thaler. Vieles spricht dafür, dass auch der *Pithecanthropus* im Mittelpleistocän bereits eine Reliktförm ist, die sich durch besondere Umstände hier länger gehalten hat, und die einem Entwicklungsstadium des Menschen entspricht, das als Typus als jungpliozän angesehen werden darf.

Bandoeng, 20. September 1937.

#### LITERATUR.

- BOULE, M., L'homme fossile. Paris (1928).
- DAVIDSON BLACK, Preliminary report on the *Sinanthropus* lower jaw specimens. Bull. Geol. Soc. China, **11**, 241—246. Peiping (1931).
- DUBOIS, E., *Pithecanthropus erectus*, eine menschenähnliche Uebergangsform aus Java. Batavia (1894).
- On the principal characters of the cranium and the brain, the mandible and the teeth of *Pithecanthropus erectus*. Proc. Royal Acad. Amsterdam, **27**, 265—278 (1924).
- DUYFJES, J., Zur Geologie und Stratigraphie des Kendengebietes zwischen Trinil und Soerabaja (Java). De Ing. in Ned. Indië, **4**, 136—149. Batavia (1936).
- ES, L. J. C. VAN, The age of *Pithecanthropus*. Den Haag (1931).
- GORJANOVIC—KRAMBERGER, K., Der diluviale Mensch von Krapina in Kroatien. Stud. über die Entwicklungsmechanik, herausgegeb. von C. Walkhoff. II. Lief. Wiesbaden (1906).
- GREGORY, W. K., The origin and evolution of the human dentition. Baltimore (1922).
- The dentition of *Dryopithecus* and the origin of man. Anthropol. paper Amer. Mus. Nat. Hist., **28**, 1—123.
- JONGE—COHEN, TH. E. DE, Maximal-, Minimal- und Mittelwerte der mesiodistalen Dimensionen der postkaninen Zähne des menschlichen Gebisses. Z. f. Anat. u. Entwgesch., **99**, 324—337. Berlin (1932).
- KOENIGSWALD, G. H. R. VON, Zur Stratigraphie des javanischen Pleistocän. De Ing. in Ned. Indië, **1**, 185—201. Batavia (1934).
- Die fossilen Säugetierfaunen Javas. Proc. Royal Acad. Amsterdam, **38**, 188—198 (1935).
- Der gegenwärtige Stand des *Pithecanthropus*-Problems. Handel. 7de N. I. Naturw. Congr., 724—732. Batavia (1935).
- Erste Mitteilung über einen fossilen Hominiden aus dem Altpleistocän Ostjavas. Proc. Royal Acad. Amsterdam, **39**, 1000—1009 (1936).
- Ein fossiler Hominide aus dem Altpleistocän von Java. De Ing. in Ned. Indië, **4**, 149—157. Batavia (1936).
- SCHOETENSACK, O., Der Unterkiefer des *Homo heidelbergensis*. Leipzig (1908).
- SIMONTON, F. V., Mental foramen in the anthropoids and in man. Am. Journ. Phys. Anthropol., **6**, 413—421.
- TERRA, M. DE, Beiträge zu einer Odontographie der Menschenrassen. Berlin (1905).
- WEIDENREICH, F., The mandibles of *Sinanthropus pekinensis*. Palaeontologia Sinica, Ser. D, Vol. VII, Fasc. 3. Peiping (1936) (1936A).
- Sinanthropus pekinensis*, a distinct primitive Hominid. Proc. Anthrop. Soc. Tokyo, **1**, Sess., 13—37. Tokyo (1936) (1936B).
- The new discoveries of *Sinanthropus pekinensis* and their bearing on the *Sinanthropus* and *Pithecanthropus* problems. Bull. Geol. Soc. China, **17**, 439—470 (1937).
- WERTH, E., Der fossile Mensch. Berlin (1928).

**Anatomy.** — *Notes on the telencephalon of Mormyrus and Gnathonemus.*

By JEAN K. WESTON, Ann Arbor, Michigan<sup>1</sup>). (From the Central Institute for Brain Research, Amsterdam.) (Communicated by Prof. C. U. ARIËNS KAPPERS.)

(Communicated at the meeting of November 27, 1937.)

**Introduction.** In studying teleostean acousticolateral and cerebellar systems, particular interest centered on the brains of *Mormyrus* and *Gnathonemus*, where these systems are highly developed. The tracing of cerebellar fibers rostralward demanded a more exact knowledge of telencephalic and diencephalic structures. Certain of the former appeared distinctly different from those of other teleostean brains and worth recording. No attempt is made here to present a detailed telencephalic study, the available material imposing definite limitations, but the chief structural differences which *Mormyrus* and *Gnathonemus* exhibit from those of other teleosts (see GOLDSTEIN, '05; ARIËNS KAPPERS, '06; JOHNSTON, '11; SHELDON, '12; HOLMGREN, '20; and others) will be noted. The terminology used will be largely that found in ARIËNS KAPPERS, HUBER and CROSBY ('36), figures 544 and 545, in the text of which the homologies of these terms are clearly and specifically elucidated.

**Material.** The material available in the collection of the Central Institute for Brain Research, at Amsterdam, comprised: One transverse series of *Mormyrus* caschive with alternate sections stained after VAN GIESON and WEIGERT—PAL (counterstained with paracarmine); one sagittal series of *Mormyrus* caschive treated as the latter; one similarly stained transverse series each of *Gnathonemus elephas*, *G. petersi* and *G. monteiri*; ten whole brains of various Mormyroid fishes. The rich collection of other teleost brains possessed by the Institute<sup>2</sup>) was freely consulted.

**Olfactory bulb.** In *Mormyrus*, the olfactory bulb is small and lies close to the rostral pole of the telencephalon. Only a very small, unpaired, slit-like olfactory ventricle is demonstrable (fig. 1G, H). In *Gnathonemus*, the olfactory bulb lies farther from the telencephalon, and an unpaired, collapsed olfactory ventricle exists caudally, which bifurcates rostrally

<sup>1</sup>) This study was in part completed while the author was on leave for one year from the Laboratory of Comparative Neurology of the University of Michigan to the Anatomical Institute of the State University of Groningen, Holland.

<sup>2</sup>) I am deeply indebted to Professor C. U. ARIËNS KAPPERS both for placing the resources of the Institute at my disposal and for his kind and helpful interest, to Professor ELIZABETH C. CROSBY for valuable criticisms and suggestions, and to Professor H. M. DE BURLET for the use of his technical staff and equipment, in the preparation of this communication.

into paired olfactory ventricles that fade out at the caudal ends of their respective olfactory bulbs. Both lateral and medial olfactory tracts are present. The former originates from the medial (and dorsal) portion,

and the latter from the lateral (and ventral) portion of the olfactory bulb (fig. 1). This is interesting since most workers (SHELDON, '12, fig. 6; HOLMGREN, '20, fig. 30a) consider the reverse to be the case. Lack of silver or Golgi material made it impossible to pursue this matter more fully; similarly, the course of the nervus terminalis was inevident. The material confirms, so far as it goes, SHELDON's ('12) results relative to the distribution of the medial and lateral olfactory tracts.

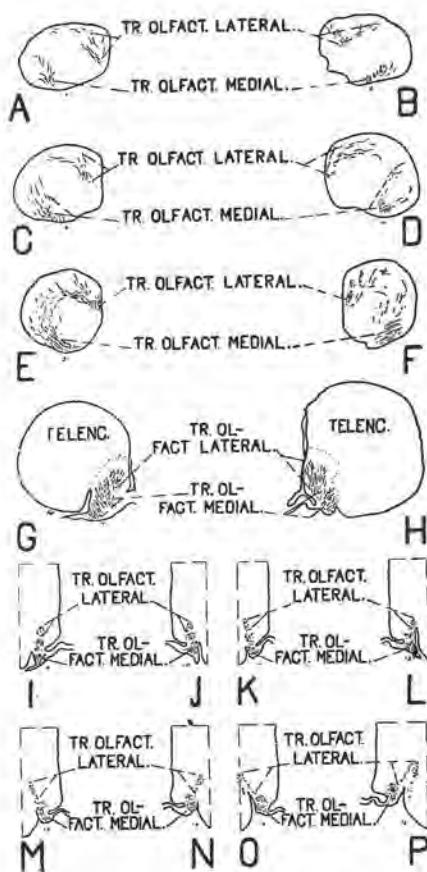


Fig. 1. Transverse hemisections through the olfactory bulb and telencephalon to illustrate the medial and lateral olfactory tracts in *Mormyrus caschive*. The hemisections on the left are the odd numbers, beginning with 1, and those on the right the even numbers, beginning with 2, of the series, consisting of alternate sections of one brain. The course of these tracts can be carried on in figure 2 I. WEIGERT-PAL preparations.  $\times 15$  (approximately).

(fig. 3A). The nucleus *a* extends neither so far rostralward, lateralward, nor caudalward as does the nucleus *b*, which latter separates it almost entirely from other telencephalic structures. Medially (and caudally) the nucleus *a* abuts on the triangular shaped (in cross sections) area (c, figs.

*Nuclei*. The structure most characteristic of the Mormyroid telencephalon is the obvious nuclear mass at its ventrolateral surface (figs. 2, 3, 4). This is apparent grossly in *Mormyrus* as an elongated, oval elevation, bounded laterally by a shallow sulcus (deeper in *Gnathonemus*). It extends through about the middle third of the telencephalon, largely rostral to the anterior commissure. We will here be chiefly concerned with the description and interpretation of this mass.

Microscopically, this elevation consists of two distinct parts, provisionally designated as nucleus *a* and nucleus *b*. The nucleus *a*, composed of closely-packed, small, granule cells, is superficial throughout (figs. 2, 3, 4), excepting caudally, where it lies somewhat deeper (fig. 2B, F); in *Gnathonemus* its lateral portion is similarly withdrawn from the surface

2, 3) just lateral to the fissura endorhinalis; laterally and caudally it borders on the pars lateralis, area olfactoria dorsalis of HERRICK. This

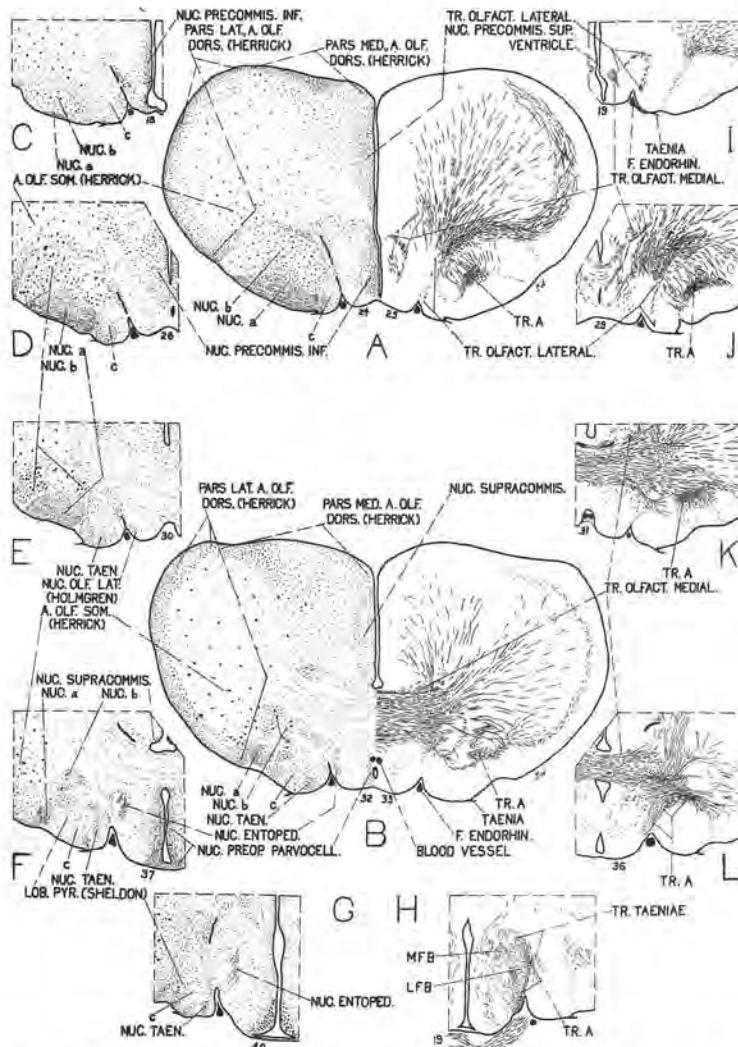


Fig. 2. Transverse hemisectsions and segments of such sections through the telencephalon of *Mormyrus caschive* to show the relations of the nuclei *a* and *b* and their fiber connections. Only those labels not obvious will be listed. The taeniae were either actually seen or were indicated where the change in epithelial structure from that lining the ventricle to that covering the surface of the brain was observed. A. OLF. SOM. (HERRICK), area olfacto-somatica of HERRICK; F. ENDORHIN., fissura endorhinalis; LOB. PYR. (SHELDON), lobus pyriformis of SHELDON; NUC. ENTOPED., nucleus entopeduncularis (of SHELDON); NUC. TAEN., nucleus taeniae (of SHELDON). The left side of the figure was taken from the VAN GIESON series of alternate sections and the right side from the WEIGERT-PAL series; the numbers below indicate the number of the section in its respective series.  
× 18 (approximately).

nucleus *a* is always, excepting most caudally (where it consists of irregular cell groups; fig. 2B, E, F), sharply delimited dorsally from the nucleus *b* (not so sharply in *Gnathonemus*, fig. 3), due to their marked difference in cell type, as well as to the fibers and blood vessels which intervene. At first glance the cells of the nucleus *a* appear to fuse medially with the granule cells marking the taenia (fig. 2A, D, E), but close inspection shows no real continuity (see particularly *Gnathonemus*; fig. 3A). Here it should be noted that, in *Mormyrus*, the area *c* (fig. 2; see above) obviously passes over rostrally into the area lying lateral to the nuclei *a* and *b* (fig. 2A, C), which latter area it resembles very closely in cell type and distribution; a similar tendency is apparent caudally (see especially *Gnathonemus elephas*; fig. 3B). STENDELL ('14) figured this nucleus *a* in *Mormyropsis anguilloides* and labeled it as the lobus parolfactorius.

Lying dorsal to the nucleus *a*, and separating it throughout (excepting far caudally, and, in *Gnathonemus*, dorsolaterally as well) from other

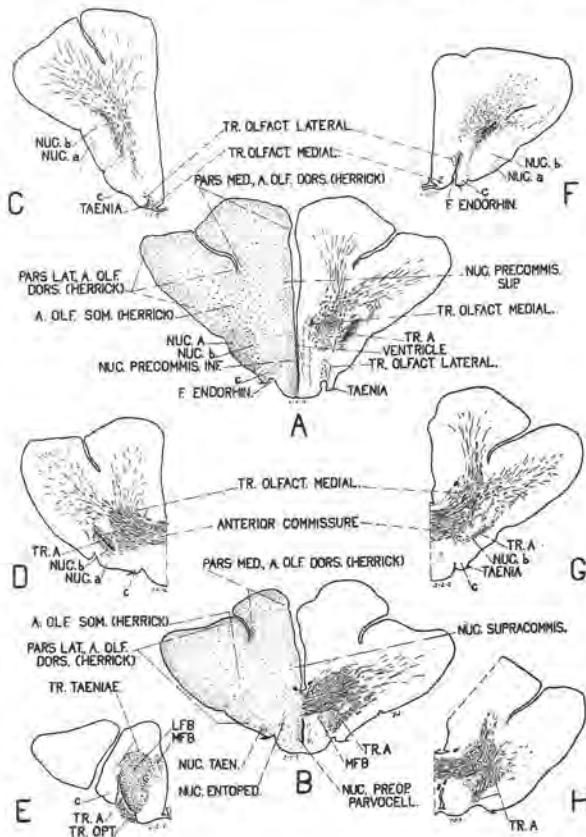


Fig. 3. Transverse hemisects of the telencephalon of various species of *Gnathonemus*: A, B, C, G, and E, *Gnathonemus elephas*; D, F, and H, *Gnathonemus petersi*. The taeniae were located as explained for figure 1. See fig. 1 for those labels not perfectly obvious. WEIGERT-PAL preparation.  $\times 6$  (approximately).

telencephalic structures, is a lighter-staining, sausage-shaped (in cross section) mass, consisting of numerous, very large, multipolar neurons. This is the nucleus *b*. It is marked off from the nucleus *a* as noted previously. A fiber net separates it dorsally (especially laterally) from the remainder of the telencephalon. Its relations are obvious in figures 2 and 3 (note its smaller size in *Gnathonemus*). STENDELL ('14) appeared not to have definitely differentiated this mass at all.

No similar structures seem to have been recorded in the literature, excepting for the work of STENDELL ('14). Neither were they demonstrable in any of the other teleostean brains in the collection of the Institute.

Two main connections characterize the nucleus *a* in the material available. One (the less heavily medullated) passes into the middle portion of the anterior commissure (fig. 2B, K), although its proportional derivation from the nucleus *b* and the telencephalic area immediately lateral thereto is not clear. Its further course is uncertain, although many of its fibers are apparently both decussating and commissural to contralateral telencephalic centers, while others obviously turn caudalward, after crossing, into the lateral forebrain bundle. This seems to be in part the homologue of the tractus bulbo-parolfactorius of STENDELL ('14, p. 33), which he believed might reach the medulla oblongata. The other is a strongly developed, predominantly uncrossed, heavily medullated one (tractus A, figs. 2, 3), definitely associated very largely with the nucleus *a* in *Mormyrus*. In *Gnathonemus*, due to the smaller sizes of the nuclei *a* and *b* and because the tractus A runs through the nucleus *b*, rather than between that mass and the nucleus *a*, this tract becomes more mixed with the fibers overlying the nucleus *b* (fig. 3A). The position of the tractus A in the lateral forebrain bundle is obvious and its course caudalward is unquestionable (figs. 2, 3, 4), although its exact distribution could not be ascertained. It apparently occupies the area in the lateral forebrain bundle assigned by SHELDON ('12, fig. 69) to the tractus striothalamicus incruciatus, but, being much larger than that tract as illustrated in his figures of the carp, it also occupies a large part of the area SHELDON labeled tractus strio-thalamicus cruciatus. It seems homologous, at least in part, with the tractus pallii of JOHNSTON ('11) and the tractus strio-thalamicus lateralis of HOLMGREN ('20). Although a portion of this tract definitely passes into the hypothalamic region (fig. 4), its exact distribution there is not clear. Another portion can be followed into relation with the nucleus rotundus and prerotundus, as SHELDON ('12) noted for the tractus strio-thalamicus, but here again, the terminal relationships are inconclusive. Further homolateral connections of the nucleus *a* with the other more lateral forebrain areas, but particularly with the nucleus *b*, appear likely from the material, but cannot be clearly differentiated. Neither is it possible to state definitely the direction of conduction in any of these tracts. This tractus A appears to be the homologue of the tractus taeniae of STENDELL ('14, see his figs. 18, 19, 21).

but it must be emphasized that no part of the tractus A can be traced into the habenula (which STENDELL considered to be the termination of his tractus taeniae) in any of the material consulted (*vide infra*).

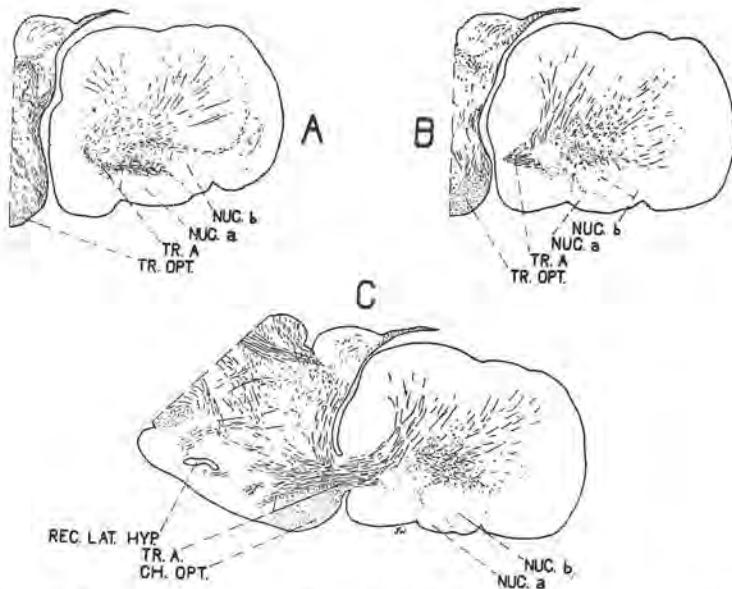


Fig. 4. Longitudinal sections through the forebrain of *Mormyrus caschive*, to illustrate the course of the tractus A. REC.LAT.HYP., recessus lateralis hypothalami. WEIGERT-PAL (5 X, approximately).

The nucleus *b* contributes fibers which pass chiefly towards the anterior commissure (fig. 2); whether they be decussating, commissural, or both, is not clear. Connections with the nucleus *a* and with other homolateral forebrain centers seem obvious. An especially well-marked, rather heavily medullated connection from the more mediocaudal part of this nucleus *b* (fig. 2B, K), seemingly truly commissural, is in part homologous to the tractus bulbo-parolfactorius illustrated by STENDELL ('14, fig. 1).

No connection to either the nuclei *a* or *b* could be definitely established from either the lateral or the medial olfactory tracts. Should such connections be present they must be extraordinarily small.

The connections of the above-delineated area *c* (figs. 2, 3) deserve some mention. Fibers of the lateral olfactory tract obviously become lost throughout much of the area *c*. No interconnections between the area *c* and the nucleus *a* could be established, or (though less definitely) with the nucleus *b*. The area *c* contributes a few scattered fibers to the anterior commissure (fig. 2K). Its main connection, however, is a typical tractus taeniae of SHELDON ('12). This tractus taeniae is very small and consists chiefly of medullated fibers (figs. 2H, 3E). It originates in the area *c*, mostly caudal to the level of the anterior commissure, from two fairly obvious nuclei, which, because of these connections as well as their other

relations (figs. 2B, E, F, G, 3B), seem entirely homologous to the nucleus taeniae and lobus pyriformis as illustrated and described by SHELDON ('12, carp) and illustrated by ARIËNS KAPPERS, HUBER and CROSBY ('36, sunfish). (HOLMGREN's, '20, figure 15, illustrated a nucleus taeniae in a similar position for *Osmerus*). This tractus taeniae could be followed caudally into relation with the homolateral habenular nuclei and into the habenular commissure. These facts adequately contradict STENDELL's ('14) identification of the nucleus *a* of this account as a strongly developed lobus parolfactorius, since on page 33 he said: "Der Name Nucleus taeniae ist ja ein Synonym mit Lobus parolfactorius....." However, in comparing this mass with the nucleus taeniae of the literature, he noted (p. 32) that "hier der Kern (his lobus parolfactorius) sich weit vor die Kommissure hinzicht, ja sogar mit dem grösseren Anteil vor ihr gelegen ist. Hierfür kann aber wohl die starke Entwicklung des Kernes der Grund sein".

The area lying lateral and dorsal to the nuclei *a* and *b* chiefly contributes fibers to the anterior commissure, although connections with the nucleus *b*, particularly, but to some extent with the nucleus *a*, seem indicated. There is some tendency for uncrossed fascicles from this area (fig. 2B) to accompany the numerous uncrossed fibers coming from the dorsomedial area of the telencephalon, which lie, in the lateral forebrain bundle, internal (and, more caudally, dorsal) to the tractus A.

#### *Discussion and conclusions.*

Three reasonably possible explanations might account for the presence of the nuclei *a* and *b*. The *first*, that they are entirely new structures, has little in its favor. The relative hypertrophy of lateral line and cerebellar systems is the chief characteristic distinguishing the Mormyroid nervous system from that of the other teleosts. In view of this, and when we note their but mediocre optic and gustatory development (BERKELBACH VAN DER SPRENKEL, '15) and the reduced olfactory system, it would be most phenomenal to find two new structures only in the telencephalon, since almost invariably the appearance of a new structure in one part of the nervous system is correlated with the appearance of new structures elsewhere in that system. STENDELL ('14) related the development of his lobus parolfactorius (nucleus *a*) to the long snout of these forms, and considered the lateral line hypertrophy the result "eines noch unbekannten Oralsinns, der hier ausser vom Trigeminus wohl durch den Kopfast des Lateralnerven bedient wird". He subsequently ('14a) demonstrated special lip organs which he believed were related to lateral line organs and found them to be supplied by the anterior lateral line nerve. Since it is the posterior lateral line nerve and lobe that are most developed (see BERKELBACH VAN DER SPRENKEL, '15; SUZUKI, '32), it is difficult to believe the long snout responsible either for their development, or, in the apparent absence of other related specialized centers, for that of the nucleus *a*.

A *second* possibility is that these two nuclei are specialized ventrolateral portions of the telencephalon. This is in part STENDELL's ('14) interpretation, since he homologized the nucleus *a* with the nucleus taeniae. Valid reasons were given above for discarding this suggestion, as well as the possibility of their being an hypertrophied lobus pyriformis of SHELDON ('12). Another serious objection is the inevidence, in other teleosts with large lateral line and cerebellar systems, of any similar ventrolateral differentiations. This possibility may not be completely disregarded, however, for those ventrolateral telencephalic portions lying lateral to the lobus pyriformis of SHELDON ('12).

The *third* possibility is that we have here structures, better developed than usual, which are present in unusual surroundings, hence confounding any immediate homology with those of other teleosts. Certainly the above objections would seem to favor this notion; at least it is worth pursuing farther.

HOLMGREN ('20) noted for *Osmerus* that the large, centrally-lying cells of the area olfacto-somatica of HERRICK tended to be most densely grouped close inside the superficial portion of the telencephalon which HERRICK called the pars dorsalis, area olfacto-dorsalis (HOLMGREN's primordium pallii, pars dorsolateralis); in fact, his tendency was to consider both these areas as one mass. In comparing *Mormyrus* and *Gnathonemus* with other teleosts, this observation was repeatedly verified. It is further notable that the pars dorsalis, area olfacto-dorsalis varies considerably in size and position in different teleosts, and that the area olfacto-somatica shows concomitant changes in size and position. When, finally, the former area demonstrates an uncrossed, heavily medullated connection to the lateral portion of the lateral forebrain bundle, the size of which seems to vary with the size of that area and is otherwise suggestive of the tractus A, the obvious correlation could no longer be denied. Figure 5 demonstrates diagrammatically some of these relationships for several teleosts. No pars dorsalis, area olfacto-dorsalis occupies its usual position in *Mormyrus* (fig. 2); in *Gnathonemus* a deep fissure occurs in its stead (fig. 3). In both these forms there is but one place where a differentiable area of the massive telencephalic wall, bordering on the ventricle, can be found in close relation to the area olfacto-somatica of HERRICK, and that is ventrally and laterally (fig. 5A, L; compare figs. 2, 3).

Consequently, based in part on the relations to other telencephalic centers and in part on the fiber connections, it is concluded: (1) that the nucleus a is the exceptionally well-developed homologue of the pars dorsalis, area olfacto-dorsalis of HERRICK; (2) that the nucleus b is homologous to the area olfacto-somatica of HERRICK; (3) that the area c is a part of the pars lateralis, area olfacto-dorsalis of HERRICK, which has become separated from its usual lateral relations by the incursion of the nucleus a.

Considered from this angle, the large comparative development here of the pars dorsalis, area olfacto-dorsalis of HERRICK offers support of HOLMGREN's conception of this area as general pallium, since in these forms olfactory, optic, and gustatory sensibility are not highly developed while the lateral line system patently is. Further, it is possible, in view of its cell type, to consider this area as receptive, in which case the tractus A is probably the chief pathway over which thalamic centers relay the somatic sensibility (here probably largely lateral line in type) to this area. If this should be true, its ventral position in these forms might be explainable as due to the operation of neurobiotactic phenomena

(ARIËNS KAPPERS, '06). Similarly, the close relation of the area olfacto-somatica, its more efferent cell type, and the fact that it migrates with the pars dorsalis, area olfactoria dorsalis of HERRICK, probably mean,

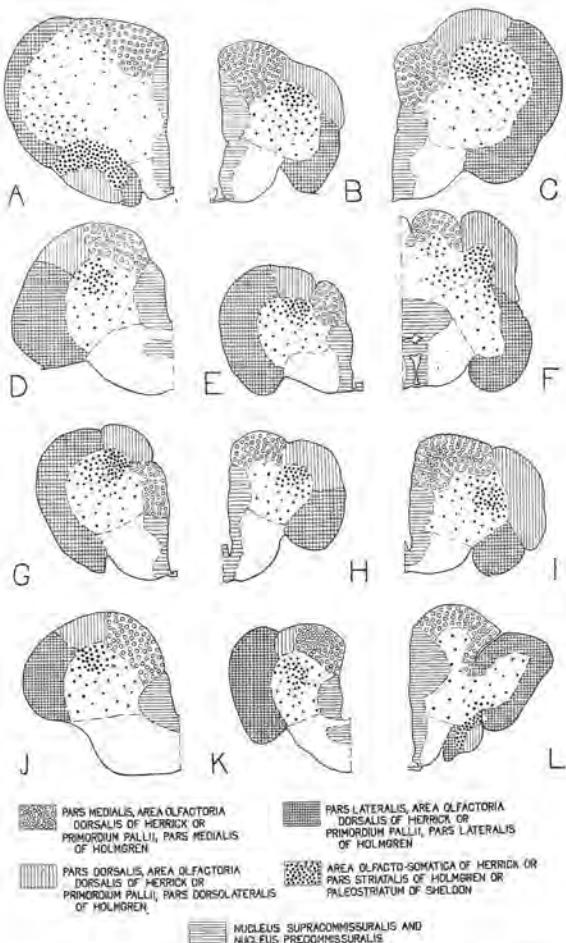


Fig. 5. Semi-diagrammatic transverse hemisections through the telencephalons of a variety of species of teleosts as listed below. The black dots indicate, in a general way, the relative density of distribution of the large cells characterizing the area olfacto-somatica of HERRICK. Note also the variation in size of the pars dorsalis, area olfactoria dorsalis of HERRICK, but keep in mind that apparent size alone in such a figure can give no true indication of the relative density of the small granule cells characterizing this area. A, *Mormyrus caschive*,  $\times 11$ ; B, *Ophiocephalus striatus*,  $\times 8$ ; C, *Gadus aeglefinus*,  $\times 7$ ; D, Carp, SHELDON's ('12) figure 38, page 273, copied; E, *Lota lota*,  $\times 5$ ; F, *Monopterus javanensis*,  $\times 8$ ; G, *Motella mustela*,  $\times 8$ ; I, *Anguilla vulgaris*,  $\times 8$ ; J, *Osmerus eperlanus*, HOLMGREN's ('20) figure 15, page 164, copied; K, *Eupomotis gibbosus*, ARIËNS KAPPERS, HUBER and CROSBY's ('36) figure 545A, page 1274, copied; L, *Gnathonemus monteiri*,  $\times 8$ . WEIGERT-PAL preparations where not copied.

neurobiotactically considered, that it is chiefly concerned in discharging this latter area.

No valid explanation for the unusual (as compared with other teleosts) positions of these centers in *Mormyrus* and *Gnathonemus* can be offered. In addition to the neurobiotactic factors noted previously, pressure factors incident to the extreme cerebellar hypertrophy during embryologic development may be operative, since, among others, such factors undoubtedly play an important part in the development of the nervous system, especially in teleosts, as has been previously noted. In explaining the extreme degree of development of these nuclei, however (provided they have been correctly identified), it is not necessary to postulate a special 'Oralsinn' in the sense of STENDELL ('14), since we are dealing with a form possessing no great optic, gustatory or olfactory development, but an extreme development of somatic lateral line sensibility. Hence, if such somatic sensibility is projected via the acousticolateral lemniscus (as WALLENBERG, '07, in particular, believed), which here is very large, directly (or even indirectly by way of the tectum) onto the thalamus and from there onto the telencephalon, which seems entirely possible since they are interconnected, then the telencephalic area upon which it impinges should reflect to some noticeable extent any considerable variation in the development of such sensibility over the usual condition, particularly if other sensory centers are not highly developed to confuse the issue. These relationships might be adduced as indirect evidence of a sort in support of the previous conclusions.

The possibility of the nuclei *a* and *b*, together with the area *c*, being a primordial amygdaloid complex (which had not occurred to me and was called to my attention by Professor CROSBY) should also be noted. The position of these centers lateral and dorsolateral to the fissura endorhinalis is suggestive of such a relationship — more so are their connections. In mammals the lateral and basal amygdaloid nuclei (in most forms at least) do not receive olfactory tract fibers, composing, then, a somatic portion of the amygdaloid complex. Their other connections include commissural and crossed septal, preoptic, and hypothalamic fibers, as well as uncrossed amygdalo-hypothalamic and preoptic fibers running in part on the ventral (or ventrolateral) border of the lateral forebrain bundle. Certainly the connections of the nuclei *a* and *b*, so far as they could be unravelled in the material, are quite closely comparable. It is interesting, too, to note that in reptiles the somatic portion of the amygdaloid complex originates from the dorsal ventricular ridge, the homologue of which would probably be included, in fishes, in the pars dorsalis, area olfactoria dorsalis of HERRICK. The nucleus taeniae, with its olfactory tract and habenular connections, would homologize well with the mammalian medial amygdaloid nucleus, which receives olfactory tract fibers and connects with the habenula by way of a cortico- or amygdalo-habenular tract. The remainder of the area *c* would then correspond to

the intermediate portions of the mammalian complex (i.e., those lying between the basal and lateral amygdaloid nuclei, on the one hand, and the medial amygdaloid nucleus on the other), which in part receive olfactory tract fibers and contribute a small connection to the anterior commissure.

The exact relation of the above observations to the notions of telencephalic development expounded by GAGE ('93), STUDNIČKA ('95), ARIËNS KAPPERS ('06), JOHNSTON ('06), SHELDON ('12), and others, is not clear, but certainly they strongly suggest, if correct, that factors other than simple eversion or modified eversion are operative in teleostean telencephalic development. What is here most forcibly brought out, however, is the fundamental similarity of pattern of the teleostean telencephalon.

#### *Summary.*

1. The olfactory bulbs of *Mormyrus* and *Gnathonemus* are small, with the lateral olfactory tract originating from their medial, and the medial olfactory tract from their lateral portions.
2. Two unusual ventrolaterally-lying nuclei are described. On the basis of comparative anatomic relations and fiber connections the nucleus *a* is homologized to the pars dorsalis, area olfactoria dorsalis of HERRICK, and the nucleus *b* to the area olfacto-somatica of HERRICK.
3. The area *c*, lying between the above two nuclei and the fissura endorhinalis is considered to be merely a displaced portion of the pars lateralis, area olfactoria dorsalis of HERRICK.
4. The possibility of these three masses being a primordial amygdaloid complex is considered.

#### BIBLIOGRAPHY.

- (Any references listed in the text and not found below can be obtained at the end of Chapters VIII or IX in the first reference listed below.)
- ARIËNS KAPPERS, C. U., HUBER, G. C. and CROSBY, E. C. The comparative anatomy of the nervous system of vertebrates, including man. The Macmillan Co. New York (1936).
- SUZUKI, N. A contribution to the study of the mormyrid cerebellum. Ann. Zoolog. Japon., 13, No. 5 (1932).

**Mathematics.** — *On additive properties of squares of primes.* I. By  
P. ERDÖS. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT).

(Will be published in Proceedings XLI, №. 1.)

#### ERRATA.

(Proc. Royal Acad. Amsterdam, **40**, №. 9 (1937)).

- p. 754, 3d line from bottom: In the latter case we have, to be read:  
In the latter case, however, we have
- p. 754, 24th line from top: carbon dioxide already urged SCHAUM in  
1909 to propose, to be read: carbon dioxide urged SCHAUM in 1918  
to propose etc.
-

