Citation:

J.G. van der Corput, Levensbericht J. Popken, in:
Jaarboek, 1970, Amsterdam, pp. 240-245

Levensbericht van

JAN POPKEN

(15 december 1905 — 6 augustus 1970)

DOOR

J. G. VAN DER CORPUT

Reeds in zijn studententijd aan de Groningse Universiteit onderscheidde Jan Popken, wiens examens en promotie met het predicaat „cum laude" gekenmerkt werden, zich door zijn aanleg voor wiskunde.

Op het door hem aan die universiteit gevolgde college waren o.a. de transcendentieproblemen behandeld. Dat onderzoek heeft tot doel om uit te maken of bepaalde getallen algebraïsch dan wel transcendent zijn, d.w.z. of ze al dan niet voldoen aan een algebraïsche vergelijking, waarvan de coëfficiënten alle geheel en niet alle nul zijn.

In 1928, omstreeks zijn doctoraalexamen, werd zijn aandacht gevestigd op een artikel van E. Borel, waarin deze een transcendentiemaat van het bekende getal e bepaalde. Reeds tientallen jaren wisten de mathematici dat e niet algebraïsch is, zodat voor elke veelterm P(x) met gehele coëfficiënten, niet alle nul, de ongelijkheid $P(e) \neq 0$ geldt. Er bestaan slechts een eindig aantal veeltermen P(x) met gehele coëfficiënten van gegeven graad n en gegeven hoogte H; hierin is de hoogte van een veelterm de som van de absolute waarden der coëfficiënten. Bij gegeven n en H bestaan er dus slechts een eindig aantal veeltermen met graad $\leqq$ n en hoogte $\leqq$ H. Uit de transcendentie van e blijkt dus dat er een alleen van n en H afhankelijk positief getal c bestaat zodanig dat $|P(e)| \geqq c$ is voor elke veelterm P(x) van de graad $\leqq$ n en van de hoogte $\leqq$ H, waarvan iedere coëfficiënt geheel en niet iedere coëfficiënt nul is. Zulk een van n en H afhankelijk getal c heet een transcendentiemaat van e. Op die manier wordt de negatieve uitspraak dat e niet algebraisch is, vervangen door de positieve opgave om voor e een transcendentiemaat af te leiden. Een overeenkomstige redenering geldt voor elk transcendent getal in plaats van e. Bij elk transcendent getal moet er naar gestreefd worden om een zo groot mogelijke transcendentiemaat te vinden.

Welnu, reeds in 1929 verscheen van de hand van Jan Popken een artikel, waarin hij voor $H \geqq 3$ aantoont dat voor iedere veelterm P(x) van de graad $\leqq$ n en hoogte $\leqq$ H met gehele coëfficiënten, niet alle nul, de ongelijkheid

$$|P(e)| > H^{-n-\frac{\lambda}{\log \log H}}$$

JAN POPKEN
(15 december 1905 — 6 augustus 1970)

geldt; hierin stelt λ een geschikt gekozen, alleen van n afhankelijk getal voor. Deze transcendentiemaat is zeer scherp, omdat er een veelterm P(x) van de graad n en hoogte H met gehele coëfficiënten, niet alle nul, bestaat met

$$|P(e)| < CH^{-n},$$

waarin C een geschikt gekozen, alleen van n afhankelijk getal aangeeft. Hieruit blijkt dat de transcendentiemaat van e zeker kleiner dan CH^{-n} is, zodat de door Popken aangegeven transcendentiemaat, waarin de in de exponent optredende term $\frac{\lambda}{\log\log H}$ voor grote H klein is, zeker niet aanmerkelijk vergroot kan worden. De door Popken gevonden transcendentiemaat is eenvoudiger en tevens groter, dus beter, dan die van Borel.

Het transcendentieprobleem is bij π veel moeilijker dan bij e, omdat de reeksen die π bepalen, veel langzamer convergeren dan bij e het geval is. Trouwens de transcendentie van e wordt afgeleid uit de betrekking $e^{\pi i} = -1$, hetgeen daarop neerkomt dat men voor de transcendentie van π aantoont dat e, verheven in een macht met algebraïsche exponent, nooit -1 oplevert. Terwijl Hermite reeds in 1873 met zijn opzienbarende en geniale ontdekking kwam van de transcendentie van e, lukte dat pas in 1882, dus negen jaar later, aan Lindemann voor π. Dit laatste probleem staat in verband met de kwadratuur van de cirkel, dus met de ruim twintig eeuwen oude vraag of het mogelijk is met passer en liniaal een vierkant te construeren, waarvan het oppervlak gelijk is aan dat van een gegeven cirkel. Deze vraag is equivalent met de kwestie of π met passer en liniaal construeerbaar is. Elk met passer en liniaal construeerbaar getal kan worden gevonden door herhaalde toepassing van drie constructies: de bepaling van het snijpunt van twee gegeven rechten; de bepaling van de snijpunten van een gegeven rechte met een gegeven cirkel en ten slotte de bepaling van de snijpunten van twee gegeven cirkels. Bij de eerste constructie wordt het snijpunt bepaald door een vergelijking van de eerste graad, en bij de tweede en derde constructie worden de snijpunten bepaald door een vergelijking van de tweede graad. Als in de passer-liniaal constructie van een getal θ in totaal m dergelijke vergelijkingen van de tweede graad optreden, dan voldoet θ aan een algebraïsche vergelijking met gehele coëfficiënten, niet alle nul, van de graad $n = 2^m$. Volgens Lindemann kan dat niet bij π, maar nog in datzelfde jaar 1929 bewees Popken meer, nl. dat als θ voldoet aan een vergelijking van de graad $\leqq$ n en hoogte $\leqq$ H met gehele coëfficiënten, niet alle nul, dan is

$$|\pi - \theta| > 2^{-H^{\nu}},$$

waarin v een geschikt gekozen, alleen van n afthankelijk getal voorstelt. Dus als voor $n = 2^m$ het door Popken ingevoerde getal v berekend is, dan vinden we niet alleen dat het geconstrueerde algebraïsche getal θ van π afwijkt, maar bij elke gegeven passer-liniaal constructie vindt men volgens Popken zelfs onmiddellijk een positieve ondergrens voor de gemaakte fout. De door Popken gevonden transcendentiemaat van π is (men kan wel zeggen natuurlijk) veel en veel kleiner dan die bij e; ze is later verbeterd. In 1932 publiceerde Popken met wijlen ons medelid J. Koksma een gemeenschappelijk artikel over de transcendentiemaat van e^{π}, maar dat geschiedde pas nadat ze twee semesters in Göttingen doorgebracht hadden, onder leiding van de getallentheoreticus Edmund Landau. Na die studiereis trok Popken zich om financiële redenen terug naar zijn geboorteplaats Smilde, want toen waren de tijden voor een beginnend begaafd wiskundige moeilijk. Teruggetrokken in de woning van zijn ouders schreef hij zijn proefschrift.

Naar mijn oordeel is deze dissertatie in Nederland een van de beste op mathematisch gebied in deze eeuw verschenen. Als ik nu, na precies 36 jaar (Popken promoveerde 12 juli 1935) het geschrift herlees en me opnieuw in het onderwerp verdiep, word ik getroffen niet alleen door de bereikte resultaten, de diepe gedachtengang en de gebruikte redeneringen, afwijkend van die welke in de rest van de wiskunde gebruikelijk zijn, maar ook door de sierlijke vorm, waarin hij zijn werk gegoten heeft. Hoewel tal van eminente mathematici aan dit moeilijke gebied hun krachten gewijd hadden, waren nog slechts weinig algemene stellingen bekend, terwijl het juist de bedoeling van de schrijver was om een aantal veelomvattende stellingen af te leiden. Zijn uit 121 bladzijden bestaand proefschrift verdeelt hij daartoe in zes delen. In de inleiding bespreekt hij de oude van anderen en de nieuwe van hemzelf afkomstige resultaten. Daarop volgen vijf delen. De delen I en II zijn gewijd aan de oplossingen van differentiaalvergelijkingen van Hurwitz; deel III gaat over algebraïsche functies, deel IV over functies die voldoen aan algebraïsche vergelijkingen en ten slotte deel V over bepaalde functies die hij elementair noemt.

De dissertatie is geschreven in de bekende Landau-stijl, nergens een woord te veel, maar ook nergens een woord te weinig. Bij de hulpstellingen vraagt men zich soms af, wat die met de gevraagde stellingen te maken zouden kunnen hebben, maar daarover wordt nergens enige inlichting gegeven, omdat dat verband later blijkt in het bewijs van de stelling, waar de hulpstelling wordt toegepast. In een mondelinge voordracht zal men bij de behandeling van zulk een hulpstelling in de regel met enkele vage woorden aangeven hoe die in de richting van het gevraagde theorema ligt, maar die aanwijzing past niet in de genoemde stijl, waar geen enkele vaagheid wordt toegelaten.

In de dissertatie van Popken komen vijftien stellingen voor met bijna tweemaal zoveel, meeste uitvoerige, hulpstellingen, die, alle kunstig en vernuftig in elkaar gepast, samen precies de beoogde resultaten opleveren. Een beoefenaar van de getallenwiskunde kan het proefschrift zonder moeite lezen, omdat het gehele betoog in zoveel kleine stapjes verdeeld is, dat elk resultaat volgt uit één enkel zorgvuldig geformuleerde uitspraak. Maar een lezing, stap voor stap, kost weken en ook al kan de lezer zich dan garant stellen voor de juistheid van de bereikte resultaten, toch overziet hij nog niet de reeks van gedachten die de auteur geleid hebben bij het schrijven van het geschrift.

In zijn proefschrift nam Jan Popken de volgende taak op zich. Beschouw een verzameling van in de oorsprong analytische functies $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots$ met rationale coëfficiënten. Als van elk dier functies f(x) iets over het analytisch karakter bekend is, wat weet men dan over het rekenkundig gedrag van de coëfficiënten $a_0, a_1, \dots$? Het meest frappante punt van de dissertatie vindt men in het laatste deel, dus in deel V, dat een bewijs levert van een ongeveer zestig jaar tevoren door Tschebycheff uitgesproken vermoeden, hetwelk in die tussentijd noch bewezen noch weerlegd was. Om die conjectuur te formuleren, beschouwen wij de kleinste verzameling M, wier elementen in de oorsprong analytische functies $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots$ zijn met de volgende eigenschappen:

1°. Elke „lineaire" functie $f(x) = a_0 + a_1 x$ met willekeurige coëfficiënten a_0 en a_1 behoort tot M.

2°. Van elk tot M behorend tweetal functies behoren de som, het verschil en het produkt tot M.

3°. Een functie die algebraïsch afhangt van een aantal in M liggende functies, behoort zelf tot M.

4°. Als f(x) tot M behoort, dan behoort $e^{f(x)}$ tot M.

5°. Als f(x) met $f(0) \neq 0$ tot M behoort, dan behoort ook $\log f(x)$ tot M.

Tschebycheff vat de in M liggende functies samen onder de naam van functies, die uit een eindig aantal algebraïsche, exponentiële en logarithmische functies samengesteld zijn, maar Popken noemt hen eenvoudig „elementaire functies". In het vermoeden van Tschebycheff gaat het over de exacte noemer van een rationaal getal; dat is de noemer van de onherleidbare breuk, die gelijk is aan dat rationale getal. Het bedoelde vermoeden behelst dat bij elke elementaire functie f(x) met louter rationale coëfficiënten een constante c gevonden kan worden, zodanig dat iedere ondeelbare factor van de exacte noemer van a_h $(h = 1, 2, \dots)$ kleiner dan ch is. In deel V bewijst Popken meer, nl. dat bij elke elementaire functie f(x) met louter rationale coëfficiënten een constante C gevonden kan worden, zodanig dat iedere ondeelbare factor van de exacte noemer van a_h $(h = 0, 1, \dots)$ kleiner dan $h + C$ is.

De periode na zijn dissertatie tot aan het eind van de wereldoorlog was somber voor deze geleerde. Zijn proefschrift, hoe belangrijk ook, werd in Nederland door slechts weinigen werkelijk gelezen, begrepen en op ware prijs gesteld. Wiskundigen hebben nu eenmaal niet zo gemakkelijk de gelegenheid om uit de hun beschikbare tijd een periode van een maand te lichten, uitsluitend ter bestudering van een buiten hun eigenlijke belangstelling gelegen geschrift. Ik heb de indruk dat hij in die periode een schok gekregen heeft, waarvan hij zich nooit helemaal hersteld heeft, maar daar sprak hij nooit over.

Na de oorlog braken voor hem betere tijden aan. Hij werd eerst hoogleraar in Utrecht en later in Amsterdam, waar hij het vertrouwen van collega's en leerlingen won. Hij was heel geschikt en behulpzaam in de omgang. Vaak nam hij van collega's zo maar werk over, waartoe dezen tijdelijk niet in staat waren en tegen regelingen, die niet in zijn belang waren, verzette hij zich niet als die regeling nuttig was. Hij had gevoel voor humor en zijn colleges, die hij altijd zorgvuldig voorbereidde, waren steeds uitmuntend, nooit iets te veel, nooit iets te weinig. Zijn voordrachten waren langzaam en wel overwogen en aan het eind hadden de toehoorders de behandelde stof werkelijk te pakken.

Hij verwonderde er zich zelf over dat hij het als zijn belangrijkste en liefste taak beschouwde zijn goede leerlingen zoveel mogelijk in hun mathematische ontwikkeling te helpen en te steunen; hij heeft dan ook verschillende onder hen bij het hoger onderwijs geplaatst gezien.

Erkend moet worden dat hij, als hij onverwacht en onvoorbereid moest spreken, soms moeilijk uit zijn woorden kon komen. Dat was hinderlijk bij het middelbaar onderwijs, maar veel minder bij de universitaire studie, waar hij sprak tegen personen met speciaal mathematisch inzicht over een stof, waaraan hij zijn eigen hart had verpand.

Behalve de genoemde artikelen heeft Popken nog een aantal andere gepubliceerd van uiteenlopende aard, waarvan de meeste van dezelfde kwaliteit als zijn dissertatie waren. Onder hen bevinden zich meetkundige beschouwingen over botsingen op zee van constant varende schepen en verder een geometrisch bewijs van een belangrijke ongelijkheid uit de getallenleer. Via de analyse en de asymptotiek (die door hem met een evaluatie opgebouwd wordt) komt hij dan ook weer op het gebied van zijn eigen proefschrift terecht, waarin aan de orde komen de „gewone" nulpuntenverdeling van een produkt van σ-functies van Weierstrasz, de rekenkundige eigenschappen van de Taylor-coëfficiënten van algebraïsche functies, de differentiaal-transcendentie maat van de zetafunctie van Riemann en de verwante L-functies, een aantal differentiaal-differentie vergelijkingen enzovoort.

Zijn belangstelling voor de historie der mathesis bleek reeds uit zijn inaugurele oratie aan de Utrechtse Universiteit over de jeugdperikelen van het getal, maar kwam, afgezien van enkele artikelen, vooral te voorschijn in het, zoals steeds zorgvuldig opgesteld en interessant verslag van een college, dat hij aan de Universiteit te Berkeley in Californië gegeven heeft over de geschiedenis van de wiskunde. Toen hij daarna weer in Nederland terugkwam, moest hij midden in het Griekse tijdvak stoppen, omdat zijn werkzaamheden hier te lande hem geen tijd overlieten om dit werk voort te zetten.

Toen Popken zestig jaar werd, was hij gezond en sterk en maakte hij de indruk dat hij nog gedurende decennia zou blijven leven en werken. Het heeft niet zo mogen zijn. Hoewel hij ondanks alles zijn werk bleef voortzetten, was hij gedurende ruim twee jaar een prooi van een vermoeiende en pijnlijke ziekte die hem ten slotte, volkomen afgemat, in 1970 ten grave bracht, een leemte achterlatend in de getallenleer en bij hen, die hem gekend hebben.